Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100546**

ID профиля: **848275**

Вариант 19

Чистовик

№1. S_{14}

(a_n) возр., $a_i \in Z$

$$\begin{cases} a_9 \cdot a_{17} > S+12 \\ a_{11} \cdot a_{15} < S+47 \end{cases}$$

$S_{14} = \dfrac{2a_1 + 13d}{2} \cdot 14 = 14a_1 + 7 \cdot 13d$, где d - разность a_n

тогда переписав условие (т.к. $a_i = a_1 + (i-1) \cdot d$)

1. $$\begin{cases} (a_1+8d)(a_1+16d) > 14a_1 + 7 \cdot 13d + 12 \\ (a_1+10d)(a_1+14d) < 14a_1 + 7 \cdot 13d + 47 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 24d \cdot a_1 + 128d^2 > 14a_1 + 7 \cdot 13d + 12 \\ a_1^2 + 24d \cdot a_1 + 140d^2 < 14a_1 + 7 \cdot 13d + 47 \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} b = a_1^2 + 24d \cdot a_1 \\ b + 128d^2 > S+12 \\ b + 140d^2 < S+47 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = a_1^2 + 24d \cdot a_1 \\ b + 128d^2 > S+12 \\ b + 140d^2 - 35 < S+12 \end{cases}$$

тогда

$\cancel{b + 128d^2 > b + 140d^2}$

$b + 128d^2 > b + 140d^2 - 35$

$35 > 12d^2$

$d^2 < \dfrac{35}{12}$

3. вспомним, что (a_n) сост. из целых чисел, но тогда и $d \in Z$, но, т.к. (a_n) возр., то $d \in N$

4. $$\begin{cases} d^2 < \dfrac{35}{12} \\ d \in N \end{cases}$$

$35 : 12 = 2,9\ldots$

$2,9 < \dfrac{35}{12} < 3$

$2,8 < 1,7^2 = 2,89 < 2,9$

значит

$d = 1$

5. Возвращаясь к исход. системе

$$\begin{cases} d = 1 \\ a_1^2 + 24d \cdot a_1 + 128d^2 > 14a_1 + 7 \cdot 13d + 12 \\ a_1^2 + 24d \cdot a_1 + 140d^2 < 14a_1 + 7 \cdot 13d + 47 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 10a_1 + 128 > 7 \cdot 13 + 12 \\ a_1^2 + 10a_1 + 140 < 7 \cdot 13 + 47 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 10a_1 + 128 - (91+12) > 0 \\ a_1^2 + 10a_1 + 140 - (91+47) < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0 \\ a_1^2 + 10a_1 + 2 < 0 \end{cases}$$

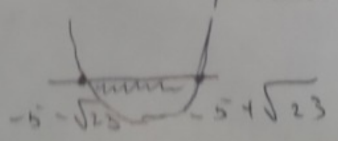
Решим нер-во $a_1^2 + 10a_1 + 2 < 0$ методом схематичного построения графика

$a_1^2 + 10a_1 + 2 = 0$

$\frac{D}{4} = 25 - 2 = 23$

$a_1 = -5 \pm \sqrt{23}$

т.к. ветви данной параболы направ. вверх



21100546 (U848275 M1298055)

Чистовик

$$\begin{cases} -5-\sqrt{23} < a_1 < -5+\sqrt{23} \\ a \in Z \\ (a_1+5)^2 > 0 \end{cases}$$ $\cancel{a_1 \neq -5}$

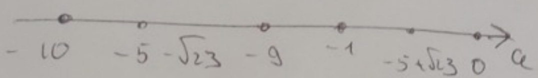
очевидно

$4 < \sqrt{23} < 5 \Rightarrow \cancel{-1 < -5+\sqrt{23} < 0}$ $-1 < -5+\sqrt{23} < 0$

$-5 < -\sqrt{23} < -4$

$-10 < -5-\sqrt{23} < -9$

значит



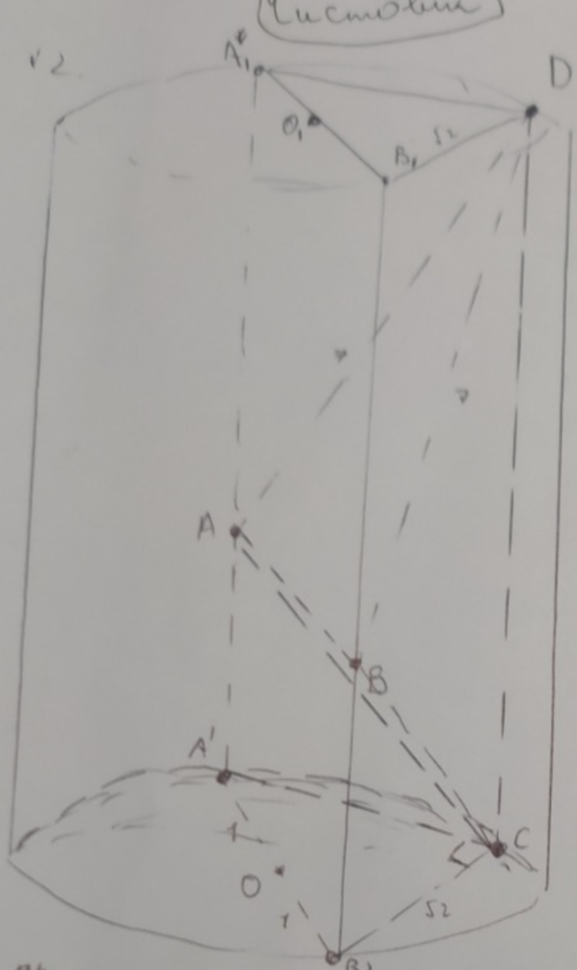
$-10 < -5-\sqrt{23} < a_1 < -5+23 < 0 \Rightarrow -10 < a_1 < 0$

6. $\begin{cases} -10 < a_1 < 0 \\ a_1 \neq -5 \\ a_1 \in Z \end{cases}$ $a_1 = -9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1.$

Ответ: $-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1.$

Чистовик

№2



Дано: $DC \parallel$ оси цилиндра OO_1, ABCD тетраэдр вписан в цилиндр. при min R (радиус основания) найти $CD = ?$

1. $AD = BD = 7$
$AC = BC = 6$
$BC \parallel OO_1$ $\Big| \Rightarrow$ $AB \parallel$ основанию цилиндра ~~[illegible]~~

A' и B' — проекции на нижн. основание точек A и B
$\Rightarrow A'B' \parallel AB \Rightarrow A'B' = AB = 2$

2. Рассм. $\triangle A'B'C$
по теореме синусов

$$\frac{A'B'}{\sin\angle A'CB'} = 2R$$

$$\frac{2}{\sin\angle A'CB'} = 2R;\ R = \frac{1}{\sin\angle A'CB'}$$

3. т.к. нас интересует min возможный радиус, а ~~$\sin\angle A$~~ синус по модулю всегда не больше 1, то $\sin\angle A'CB'$ должен быть равен $90°$, чтобы знаменатель дроби был максимальным (отриц. значения синуса не подход по смыслу задачи) $\Rightarrow$ $A'B'$ — диаметр нижн. основания, $R = 1 = OA' = OB'$

4. Заметим, что $\triangle ACB$ — р/б ($AC = BC = 6$ по у.)
$\triangle A'CB' = $ р/б (A'CB') $\Big| \Rightarrow \triangle A'CB'$ — р/б
$\Rightarrow A'C = B'C$

5. Знач. $\triangle A'CB'$ — р/б и прям.
$B'C = x = A'C$
По т. Пифагора $A'B'^2 = B'C^2 + A'C^2$; $4 = 2x^2 \Rightarrow x = \sqrt{2}$
значит $B'C = A'C = \sqrt{2}$

$x = -\sqrt{2}$ — не подход по смыслу задачи.

3

Чистовик

6. Знач. $\triangle BCB'$ - прям. (т.к. $BB' \perp$ ниж. основанию)

$BC = 6$ по т. Пифагора $BC^2 = B'C^2 + B'B^2$

$B'C = \sqrt{2}$

$36 = 2 + B'B^2 \Rightarrow BB' = \sqrt{34}$

~~аналогично т.к~~

аналогично $AA' = \sqrt{34}$

7. Продлим $B'B$ и $A'A$ до пересеч. с верх. основанием. пусть они пересекают в точках B_1 и A_1 соответственно

$\triangle A'B'C = \triangle A_1B_1D$

очевидно ~~$B_1A_1 = BA = 2$, B_1A_1 - диаметр верх. осно~~ ~~вания~~, $BB_1 \perp$ верх. осн. и $AA_1 \perp$ верх. осн.

8. ~~анало~~ аналогично рассматривая $\triangle B_1BD$ и A_1AD (прям. т.к. BB_1 и $AA_1 \perp$ верх. осн.) применяем т. Пифагора:

$AD^2 = AA_1^2 + A_1D^2$ $49 = AA_1^2 + 2$ $AA_1 = \sqrt{47}$

аналогично $BB_1 = \sqrt{47}$

9. т.к. $DC \parallel OO_1 \Rightarrow DC \perp$ осн. цилиндра

10. $DC \perp$ осн. цил.

$B'B_1 \perp$ осн. цилиндра т.к. $\Rightarrow B'B_1 \parallel DC$; $B'B_1 = DC$

11. $B'B_1 = B'B + BB_1 = \sqrt{34} + \sqrt{47} = DC$

Ответ: $\sqrt{34} + \sqrt{47}$.

Черновик

$S_{14} = \frac{2a_1 + 13d}{2} \cdot 14 = 7(2a_1 + 13d)$

$(a_1 + 8d)(a_1 + 16d) > 14a_1 + 7 \cdot 13d + 12$

$(a_1 + 10d)(a_1 + 14d) < 14a_1 + 7 \cdot 13d + 47$

$b = a_1^2 + 24d \cdot a_1 + 128d^2 > 14a_1 + \ldots$

$c = a_1^2 + 24d \cdot a_1 + 140d^2$

$b - 12 > \cancel{14a_1} S$

$c - 47 < S$

$b - 12 > c - 47$

$b > c - 35$

$128d^2 > 140d^2 - 35$

$35 > 12d^2$

$\cancel{2d^2}$

$d^2 < \frac{35}{12}$

$0 < d < \sqrt{\frac{35}{12}}$

$a_1^2 + 24a_1 + 128 > 14a_1 + 7 \cdot 13$

$a_1^2 + 10a_1$

$13 \cdot 7 = 91$

$91 + 12 = 103$

$128 - 103 = 25$

$91 + 47 = 138$

$12 \cdot 9 = 108$

$35 : 12 = 2{,}91$

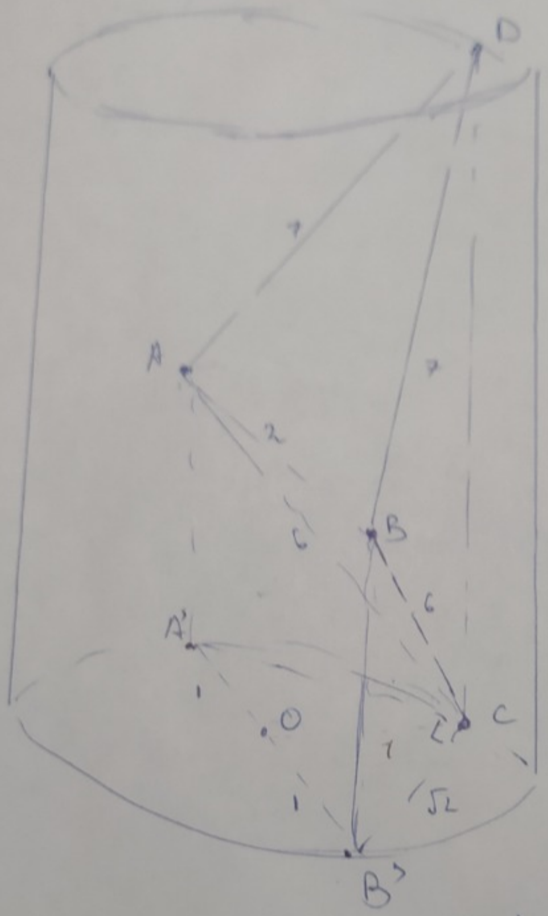
$2{,}89 = 1{,}7^2$

$-25 < \ldots < -2$

$(a_1 + 5)^2 > 0$

$\frac{D}{4} = 25 - 2 = 23$

21100546 (U848275 M1298055)



$14 + 2 = 16$

$S_{ABD} = \sqrt{8 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 6}$

$36 = 2 + 34$

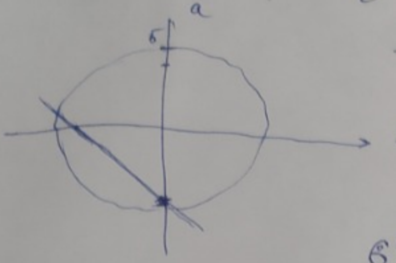
$BB' = \sqrt{34}$

$49 = 2 + 47$

$\sqrt{34} + \sqrt{47}$

21100546 (U848275 M1298055)

$$\begin{cases} a^2+b^2 \le 25 \\ -8a-6b \ge 25 \end{cases}$$



~~$-8a \ge 25+6b$~~

$-8a \ge 25+6b$

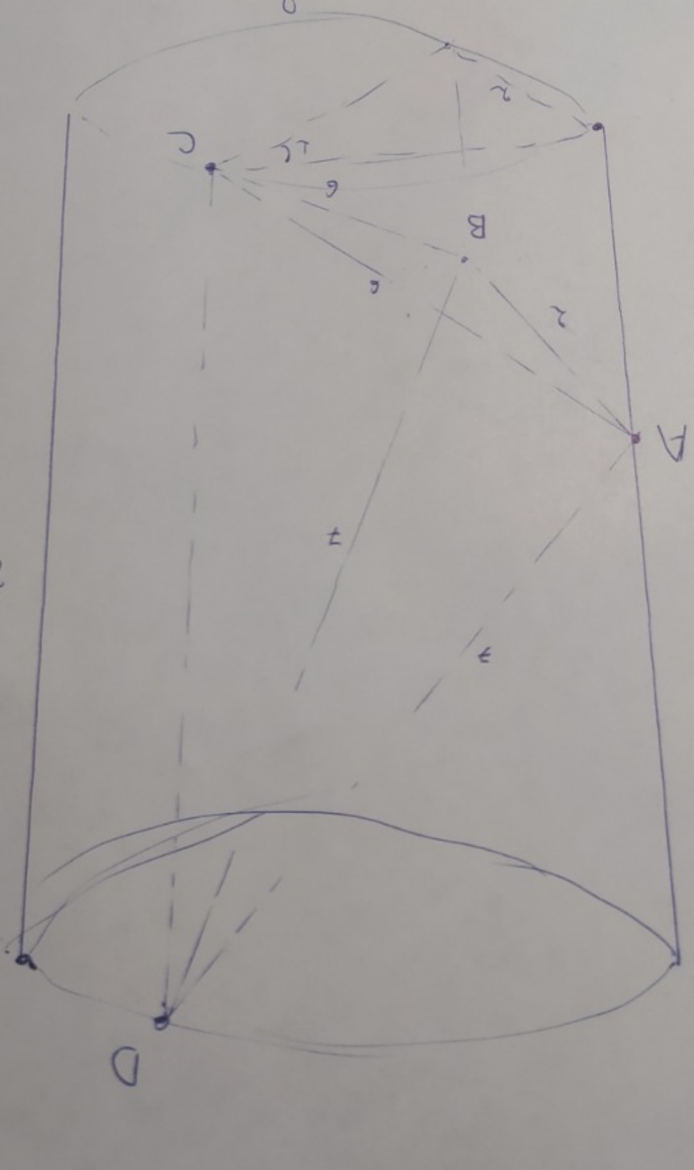
$a \le -\frac{3}{4}b - \frac{25}{8}$

$6b = \cancel{\ \ } - 25$

$\frac{3}{4}b = -\frac{25}{8}$

$b = -\frac{25}{6}$ $\quad -4\frac{1}{8}$

$b = -\frac{25}{6} = -4\frac{1}{6}$



$CD \parallel OO_1$

при $\min R$

$CD = ?$

$2R = \frac{2}{\sin\alpha}$

$R = \frac{1}{\sin\alpha}$

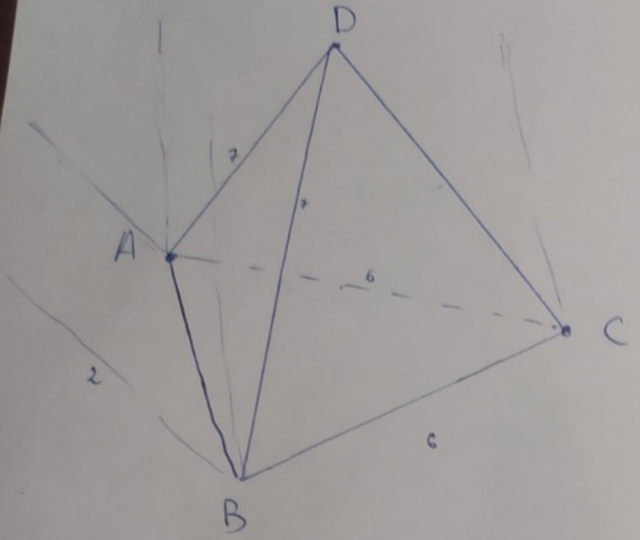
$-1 \le \sin\alpha \le 1$

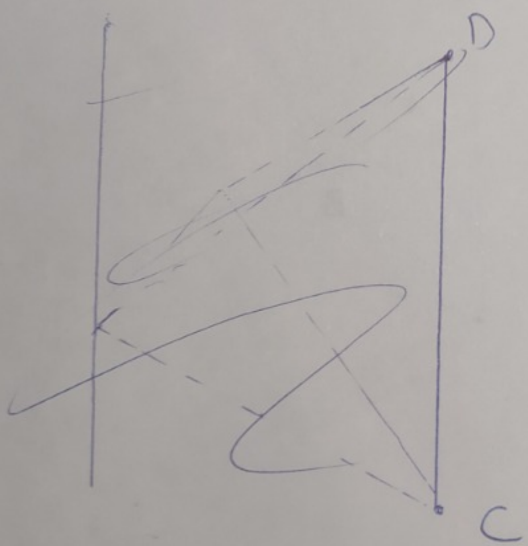
$\sin\alpha \to 1$

$\alpha \to \frac{\sqrt{2}}{2}$

21100546 (U848275 M1298055)

Черновик





21100546 (U848275 M1298055)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100546**

ID профиля: **848275**

Вариант 19

Чистовик

№4. $НОД(a;b;c) = 21 = 3 \cdot 7$

$НОК(a;b;c) = 3^{17} \cdot 7^{15}$ | $a = 3^{\alpha_1} \cdot 7^{\beta_1}$, $b = 3^{\alpha_2} \cdot 7^{\beta_2}$, $c = 3^{\alpha_3} \cdot 7^{\beta_3}$ | причём $1 \le \alpha_i \le 17$, $1 \le \beta_i \le 15$ ~~[illegible] НОД~~ ~~[illegible] НОК~~

1. Чтобы $НОД(\cdot) = 21$
хоть одна α какого-то числа $= 1$ и β какого-то числа $= 1$

2. Чтобы $НОК() = 3^{17} \cdot 7^{15}$, α какого-то числа $= 17$, а β какого-то числа $= 15$

~~3. пусть одно из чисел = 21, а другое = $3^{17} \cdot 7^{15}$~~

3. ~~тогда~~ кол-во способов выбрать, какая из степеней $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ будет равна 1, а какая 17 $= 3$
аналогично для $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ кол-во способов $= 3$

4. т.к. они не зависимы, то всего способов $3 \cdot 3 = 9$

5. когда мы выбрали эти 4 степени, то для ост. 2х остаётся ~~17 · 15 вар.~~ 17 · 15 вар.
~~15 · 15 вар.~~

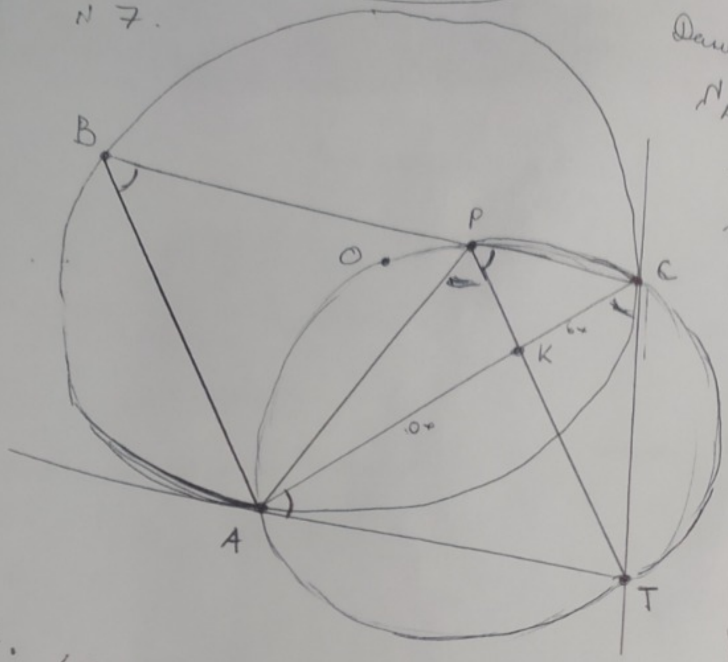
7. ~~[illegible]~~ $1 \le \alpha_i \le 17$ ~~(чтобы не было повторений)~~
$1 \le \beta_i \le 15$

Итог: $9 \cdot 17 \cdot 15 = 2295$

Ответ: 2295.

Чистовик

№ 7.



Дано: $\triangle ABC$ вписан в окр. $(O; R)$

$S_{APK} = 10$, $S_{CPK} = 6$

Найти: S_{ABC}

Найти AC, если $\angle ABC = \operatorname{arctg} 2$

Р-ие: 1. т.к. $OC \perp CT$ (радиус, ~~перпенд~~ провед. в точку кас-ия (касания))

и $OA \perp AT$ (–11–),

то $AOCT$ – вписанный четырёхугольник, причём (OT – диаметр опис окр) (т.к. $\angle OCT = \angle OAT = 90°$)

2. $\angle CAT = \angle ABC$ (AT – кас. AC – хорда $\Rightarrow$ угол между хордой и кас = половине дуги, высек. хордой)

3. $\angle CAT = \angle TPC$ (впис. 2-ы, опир на одну дугу.

4. $\angle ABC = \angle TPC \Rightarrow AB \parallel TP$ (т.к. соотв 2-ы равны)

5. $\dfrac{AK}{KC} = \dfrac{S_{APK}}{S_{KPC}} = \dfrac{10}{6}$ (т.к. у $\triangle APK$ и $\triangle KPC$ общая высота из точки P)

~~рисунок~~ 6. Рассм. $\triangle ABC$ и $\triangle KPC$

$\left.\begin{array}{l}\angle ABC = \angle KPC \\ \angle C - \text{общ}\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle KPC \Rightarrow$ (по 2м углам) $\dfrac{S_{KPC}}{S_{ABC}} = k^2 = \left(\dfrac{KC}{CA}\right)^2$

~~$\dfrac{6}{S_{ABC}} = \left(\dfrac{6}{10}\right)^2$~~

~~7. Найдём AC~~

7. Заметим, что $AK : KC = 10 : 6$, тогда $AC : KC = 16 : 6$

тогда $\dfrac{6}{S_{ABC}} = \left(\dfrac{6}{16}\right)^2 = \dfrac{9}{64}$; $S_{ABC} = \dfrac{64 \cdot 6}{9} =$

$= \dfrac{128}{3}$

21100546 (U848275 M1298056)

Если $\alpha_1 = 1$, то либо $\beta_2 = 1$, либо $\beta_3 = 1$ (2 способа)
тогда для α_2 - 2 способа и для α_3 - 2 способа
Кол-во способов выбрать такие 2 числа $= 6$

Тогда, выбрать степени ост. чисел существует тоже
$17^2 \cdot 15^2 - 6$ способов (-6 т.к. ~~пару~~ тройку 21; 21; 21 посчитали 6 раз)

Подытожим

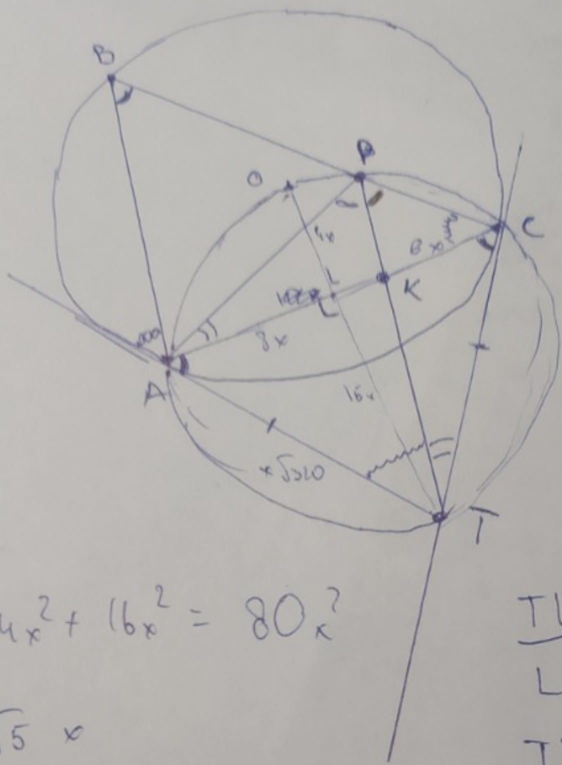
Черновик

$\frac{6}{16} = \frac{h}{}$

$256x^2 + 64x^2 = 320x^2$

$S_{APC} = 16 = \frac{1}{2} \cdot h \cdot AC$

$\cancel{S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{16}{6} h \cdot AC}$



$r = 10x$

$\left(\frac{6}{16}\right)^2 = \left(\frac{3}{8}\right)^2 \cdot \frac{9}{64}$

16.5

$\frac{128}{3}$

$R^2 = 64x^2 + 16x^2 = 80x^2$

$R = 4\sqrt{5}\,x$

$\frac{TL}{LC} = 2$

$TL = 2LC = 2 \cdot 8x$

$TL = 16x$

$1 + tg^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$

$1 + 4 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$

$\cos^2 \alpha = \frac{1}{5}$

$\cancel{\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}}$

$\sin^2 \alpha = \frac{4}{5}$ $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$TL \cdot LO = (8x)^2$

$LO = \frac{64x^2}{16x} = 4x$

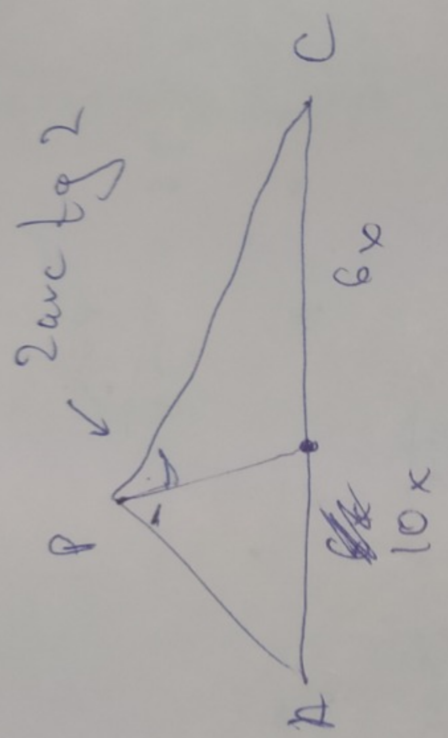
$\cancel{tg\alpha =}$ $\cancel{tg 2\alpha = 2}$

$\cancel{tg 2\alpha = 2}$

$\frac{AC}{\sin \alpha} = 2R$

$\cancel{AC} =$

$16x = \cancel{AC} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot 2 \cdot 4\sqrt{5}\,x$


B
A
C
2arc tg 2
6x
10x

~~(Чистовик)~~

№ 4.

$НОД(a;b;c) = 21 = 3 \cdot 7$

$НОК(a;b;c) = 3^{17} \cdot 7^{15}$

$\Rightarrow a = 3^{\alpha_1} \cdot 7^{\beta_1}$, $b = 3^{\alpha_2} \cdot 7^{\beta_2}$, $c = 3^{\alpha_3} \cdot 7^{\beta_3}$

причем: $1 \le \alpha_i \le 17$, $1 \le \beta_i \le 15$, где $i = 1$ или 2 или 3

~~тогда для α_i существует 17 способов значений, а для β_i – 15~~
~~тогда a можно выбрать $17 \cdot 15$ способами, b – $17 \cdot 15$ способ. и c – $17 \cdot 15$ способами~~
~~давайте выбирать числа a и b,~~
~~для α_1 существ 17 вариантов, тогда для α_2 – 16, а для~~
~~значение α_1, кол-во вар. α_2, кол-во вар. α_3: если $\alpha_1 = 1$, тогда для α_2 – 17 способ вариантов, для α_3 – 17 вариантов.~~
~~1 17 17~~
~~2~~

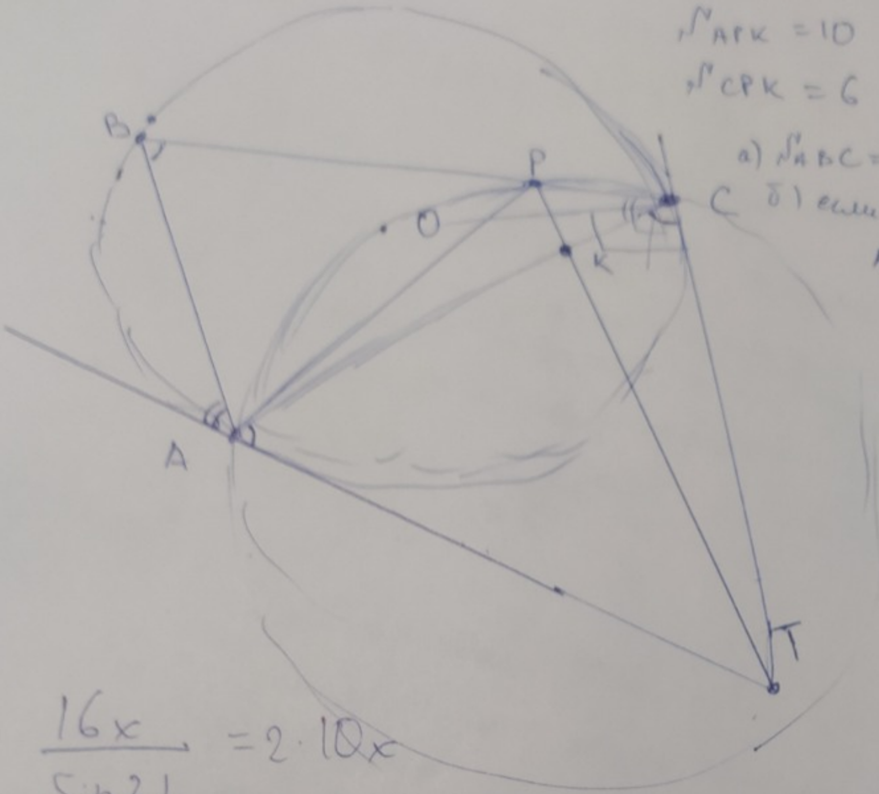
1. Для того, чтобы $НОД(a;b;c) = 21$
Какое-то число должно иметь 3 в степени 1, и какое-то число должно иметь 7 в степени 1.

2. Кол-во способов выбрать в каких ~~(...)~~ числах $\alpha_i = 1$ и $\beta_i = 1$ (возможно и в одном) = 9
т.к. либо $a = 21$, либо $\alpha_1 = 1$, либо $\beta_1 = 1$
аналогично с др. числами.

3. Когда выбраны данные (ое) числа (о), то для остальных (ого) существует $17^2 \cdot 15^2$ способ.
т.к. ① какое-то число $= 21$, тогда др. степени ост могут быть любые из диапазона ($1 \le \alpha_i \le 17$; $1 \le \beta_i \le 15$)
кол-во способов
$3 \cdot 17^2 \cdot 15^2 - 3$ (−3 т.к. пару 21;21;21 мы посчитали 3 раза)

② какое-то число имеет 3 в 1 степ., а другое имеет 7 в 1 степ
~~На 3 способов выбра ...~~

Черновик



$S_{APK} = 10$

$S_{CPK} = 6$

а) $S_{ABC} = ?$

б) если $\angle ABC = \arcctg 2$

$AC = ?$

$$\frac{16x}{\sin 2\alpha} = 2 \cdot 10x$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cdot \frac{1}{5} - 1$$

$$\cos^2 2\alpha = \frac{9}{25} \Rightarrow \sin^2 2\alpha = \frac{16}{25}$$

$$-\frac{3}{5}$$

$$\sin 2\alpha = \frac{4}{5}$$