Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100474**

ID профиля: **76970**

Вариант 19

№1

Пусть d – это разность прогрессии.

$$S=a_1+a_2+\dots+a_{14}=\frac{a_1+a_{14}}{2}\cdot 14=\frac{a_1+a_1+13d}{2}\cdot 14=7\cdot(2a_1+13d)$$

$$a_9\cdot a_{17}>S+12$$
$$(a_1+8d)(a_1+16d)>14a_1+91d+12$$
$$a_1^2+16a_1d+8a_1d+128d^2>14a_1+91d+12$$
$$a_1^2+24a_1d+128d^2>14a_1+91d+12$$
$$a_1^2+24a_1d>14a_1+91d+12-128d^2$$

$$a_{11}\cdot a_{15}<S+47$$
$$(a_1+10d)(a_1+14d)<S+47.$$
$$a_1^2+24a_1d+140d^2<14a_1+91d+47$$
$$a_1^2+24a_1d<14a_1+91d+47-140d^2$$

т.е $14a_1+91d+47-140d^2>a_1^2+24a_1d>14a_1+91d+12-128d^2$

$$\cancel{14a_1}+\cancel{91d}+47-140d^2>\cancel{14a_1}+\cancel{91d}+12-128d^2$$

$35>12d^2 \Rightarrow d^2\le 1$. т.к прогрессия возр.

$\Rightarrow d>0 \Rightarrow d=1$

и т.е $a_1^2+24a_1+128>14a_1+91+12$

$$a_1^2+10a_1+25>0$$
$$(a_1+5)^2>0 \checkmark$$
$$a_1\neq -5$$

и $a_1^2+24a_1+140<14a_1+91+47.$

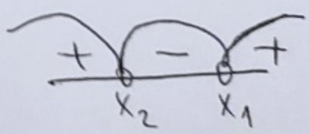
$$a_1^2+10a_1+2<0.$$

Рассмотрим ур-е $x^2+10x+2=0$

$D=100-8=92$

$x_1=\frac{-10+\sqrt{92}}{2}$

$x_2=\frac{-10-\sqrt{92}}{2}$



т.е $\frac{-10-\sqrt{92}}{2}<a_1<\frac{-10+\sqrt{92}}{2}$

$$\left.\begin{array}{l}-1<\frac{-10+\sqrt{92}}{2}<0\\ -10<\frac{-10-\sqrt{92}}{2}<-9\end{array}\right\}\Rightarrow -9\le a_1\le -1$$

Ответ: $a_1\in\{-9,-8,\dots,-1\}$, $a_1\neq -5$

№2

$AB=2 \quad AC=CB=6 \quad AD=DB=7.$

и CD-паралельна оси цилиндра

то есть понятно $\Delta ACD = \Delta BCD \Rightarrow$ если AE-перпендикуляр из A на CD то BE-тоже перпендикулярна CD т.е плоскость

плоскость ABE будет перпендикулярна CD

используя что CD-паралельна оси цилиндра $\Rightarrow$ CD-перпенд основанию цилиндра $\Rightarrow$ плоскость ABE паралельна основанию цил

$\Rightarrow$ опис. окр ΔABE = окр. основ. цилиндра. $\Rightarrow$ если R-рад. цилин

то $2R \geq AB \Rightarrow R \geq 1 \Rightarrow R=1$ т.к нужен min R и т.е

$AB=2R$ - диаметр. $\Rightarrow$ т.е $AE=BE$ и $\angle AEB=90^\circ \Rightarrow AE=BE=\sqrt{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow CE=\sqrt{36-4}=\sqrt{32} \quad DE=\sqrt{49-4}=\sqrt{45} \Rightarrow CD=4\sqrt{2}+3\sqrt{5}$

№3

$$(x-a)^2+(y-b)^2\le 25$$

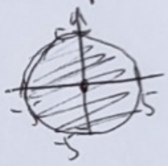
$$a^2+b^2\le \min(-8a-6b;25) \Rightarrow \begin{cases} a^2+b^2\le 25 \\ a^2+b^2\le -8a-6b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2+b^2\le 25 \\ (a+4)^2+(b+3)^2\le 25 \end{cases}$$

$$\underbrace{a^2+8a+16}_{(a+4)^2}+\underbrace{b^2+6b+9}_{(b+3)^2}\le 25$$

и т.е у нас получаются н-ва:

$$\begin{cases} 1)\ (x-a)^2+(y-b)^2\le 25 \\ 2)\ a^2+b^2\le 25 \\ 3)\ (a+4)^2+(b+3)^2\le 25. \end{cases}$$

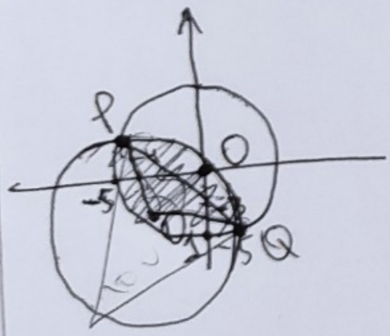
2) $a^2+b^2\le 25$ если $A(a,b) \Rightarrow$ точка A внутри окр. с центром в $(0;0)$ и радиусом 5



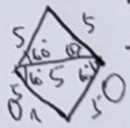
3) $(a+4)^2+(b+3)^2\le 25 \Rightarrow$ если $A(a,b) \Rightarrow$ точка A внутри окр. с центром в $(-4,-3)$ и рад. 5

1) $(x-a)^2+(y-b)^2\le 25 \Rightarrow$ ~~...~~ если $A(a,b)$ $B(x,y)$

т.е $|AB|\le 5$



найдём S закр. части т.е расстояние между центрами $5 \Rightarrow$



$\Rightarrow \angle PO_1Q=120^\circ$

$\angle POQ=120^\circ$

и т.е S $P\frown Q$ относ 1-ой окр $=$

$= S$ $P\smile Q$ относ. 2-ой окр.

$PQ=\frac{10\cdot\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{3}$

т.е S PO_1Q $=\frac{\pi R^2}{3}=\frac{25\pi}{3}$

и $S_{\triangle O_1PQ}=\frac{R^2\cdot\sin 120}{2}=\frac{25\cdot\sqrt{3}}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~...~~ $S_{\text{закр. части}}=\frac{25\pi}{3}-\frac{25\sqrt{3}}{4}=$

$=\frac{25(4\pi-3\sqrt{3})}{12}$

21100474 (U76970 M1301525)

Согласие законного представителя (родителя)
на обработку перс[illegible]овершеннолетнего

и т.к для каждой пары (a,b) – строится ~~...~~ круг рад 5

т.е $S_{фигуры}\ M = \left(\frac{S_{закр}\cdot 8}{8\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{S^2_{закр}}{3} = 25$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100474**

ID профиля: **76970**

Вариант 19

Согласие законного представителя (родителя)
Согласие законного представителя несовершеннолетнего

№4 Черновик

$$\begin{cases} \text{НОД}(a;b;c)=21 \\ \text{НОК}(a;b;c)=3^{17}\cdot 7^{15} \end{cases}$$

т.е $3^{17}\cdot 7^{15} \,\vdots\, a, b, c \Rightarrow a=3^{\alpha_1}\cdot 7^{\alpha_2}$ $\quad c=3^{\gamma_1}\cdot 7^{\gamma_2}$ где $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1\le 17$ и

$b=3^{\beta_1}\cdot 7^{\beta_2}$ $\quad \alpha_2,\beta_2,\gamma_2\le 15$

и т.е $\text{НОД}(a,b,c)=21 \Rightarrow \min(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)=1$

$\min(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)=1$

всего 3 случая

и т.е $\min(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)=1$ ① α_1-min $\Rightarrow 17^2$ - вар. для выбора $\beta_1,\gamma_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ всего $3\cdot 17^2$ - вар. для $\begin{cases}\min(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)=1\\ \alpha_1,\beta_1,\gamma_1\le 17\end{cases}$

и т.е $\min(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)=1 \Rightarrow$ всего 3 случая

① α_2-min $\Rightarrow 15^2$ - вар. для выбора $\beta_2,\gamma_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ всего $3\cdot 15^2$ - вар. для $\begin{cases}\min(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)=1\\ \alpha_2,\beta_2,\gamma_2\le 15\end{cases}$

и т.е ~~кол-во~~ всего троек (a,b,c) $= 9\cdot 17^2\cdot 15^2 = \boxed{585225}$ - случ.

17×15: 85, 17, 255; $255\times 3 = 765$

765×765: 3825, 4590, 5355, 585225

α_1	β_1	γ_1
1	1	17
1	17	1
17	1	1
17	17	1
1	1	

6

Согласие законного представителя (родителя)

несовершеннолетнего

№5.

$\log_{(\frac{x}{2}-1)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right), \log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right), \log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2$ Черновик

$\frac{x}{2}-1=a$ $\quad \log_{a^2} b \quad \log_{\sqrt{c}} a \quad \log_b c^2$

$\frac{x}{2}-\frac{1}{4}=b$ $\quad$ (1) $\log_{a^2} b=\alpha=\log_{\sqrt{c}} a$

$x-\frac{11}{4}=c.$

$\alpha=\log_{\sqrt{c}} a \,|\cdot 2\alpha.$

$\log_{\sqrt{c}} a=2\cdot\log_c a$

$c=b^t$ $\quad a=c^{\alpha}$ $\quad c^{\alpha}=b^{\beta}$ $\quad a=b^{\beta}$ $\quad c=b^{\frac{\beta}{\alpha}}$ $\quad t=$ $\quad t\cdot\alpha=$

$2\alpha^2=2\alpha\cdot\log_{\sqrt{c}} a=\log_{\sqrt{c}} a^{2\alpha}=\log_{\sqrt{c}} b=2\log_c b$

$\alpha^2=\log_c b \Rightarrow \frac{1}{2}\alpha^2=\log_{c^2} b \Rightarrow$

$\frac{1}{2}\log_a b \quad 2\log_c a \quad 2\log_b c$

$\Rightarrow \log_b c^2=\frac{2}{\alpha^2} \Rightarrow \alpha+1=\frac{2}{\alpha^2}$

$\log_b c=\frac{\log_b a}{\log_c a}=\frac{1}{\log_a b\cdot\log_c a}$

$\alpha^3+\alpha^2=2.$

$\alpha^3-1+\alpha^2-1=0.$

$(\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+1)+(\alpha-1)(\alpha+1)=0.$

$\frac{x}{2}-1$

$(\alpha-1)(\alpha^2+2\alpha+2)=0$

т.к. $\alpha^2+2\alpha+2=(\alpha+1)^2+1\geq 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha=1.$

21100474 (U76970 M1301526)

REDMI NOTE 9 PRO
AI QUAD CAMERA

Согласие законного представителя (родителя)
на обработку персо[redacted]ных данных несовершеннолетнего

№4

Чистовик

$$\begin{cases} \text{НОД}(a,b,c)=21 \\ \text{НОК}(a,b,c)=3^{17}\cdot 7^{15} \end{cases}$$

т.е $3^{17}\cdot 7^{15} \vdots a,b,c \Rightarrow$ $a=3^{\alpha_1}\cdot 7^{\alpha_2}$ $b=3^{\beta_1}\cdot 7^{\beta_2}$ $c=3^{\gamma_1}\cdot 7^{\gamma_2}$ где $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1\le 17$; $\alpha_2,\beta_2,\gamma_2\le 15$

и т.е $\text{НОД}(a,b,c)=21=3\cdot 7 \Rightarrow$ $\min(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)=1$; $\min(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)=1$

и $\text{НОК}(a,b,c)=3^{17}\cdot 7^{15} \Rightarrow$ $\max(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)=17$; $\max(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)=15$

и т.е кол-во способов для $\begin{cases} 1\le\alpha_1,\beta_1,\gamma_1\le 17 \\ \min(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)=1 \\ \max(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)=17 \end{cases}$

т.е выбираем 2 из них для max и min

всего ~~[illegible]~~

и 3-е будет ≥ 1 и $\le 17 \Rightarrow 2\cdot C_3^2\cdot 17$

и „-6" т.к случаи 1, 1, 17 / 1, 17, 17 считаем дважды $\Rightarrow$ всего $6\cdot 17-6=96$ — случай

по аналоге для $\begin{cases} \min(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)=1 \\ \max(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)=15 \end{cases}$

всего $(2\cdot C_3^2\cdot 15-6)=6\cdot 15-6=84$ — случай.

и т.е $96\cdot 84=\boxed{8064}$ — троек.

$$\begin{array}{r} 96 \\ \times\ 84 \\ \hline 384 \\ +\ 768 \\ \hline 8064 \end{array}$$

представителя (родителя)

№5 Чистовик

$$\log_{\left(\frac{x}{2}-1\right)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right),\quad \log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right),\quad \log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2$$

$\frac{x}{2}-1=a$

$\frac{x}{2}-\frac{1}{4}=b$

$x-\frac{11}{4}=c$

$\boxed{x>\frac{11}{4}}$

$\log_{\sqrt{c}} a = 2\log_c a$

$\underbrace{\log_{a^2} b}_{\text{I}}$ $\underbrace{\log_{\sqrt{c}} a}_{\text{II}}$ $\underbrace{\log_b c^2}_{\text{III}}$

$\frac{1}{2}\log_a b$ $2\log_c a$ $2\log_b c$

т.е. $\log_b c = \frac{\log_b a}{\log_c a} = \frac{1}{\log_a b \cdot \log_c a} \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_b c \cdot \log_a b \cdot \log_c a = 1$. и т.е.

$\frac{1}{2}\log_a b \cdot 2\cdot\log_c a \cdot 2\log_b c = 2$

и т.е. если два из них $\alpha \Rightarrow$ другая $\frac{2}{\alpha^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ т.к. $\frac{2}{\alpha^2}=\alpha+1 \Rightarrow 2=\alpha^3+\alpha^2 \Rightarrow \alpha^3-1+\alpha^2-1=0$

$(\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+1)+(\alpha-1)(\alpha+1) \Rightarrow (\alpha-1)(\alpha^2+2\alpha+2)=0$

т.к. $\alpha^2+2\alpha+2=(\alpha+1)^2+1\geq 1 \Rightarrow \alpha=1$.

① $\text{I}=\text{II} \Rightarrow b=a^2=c \Rightarrow \frac{x}{2}-\frac{1}{4}=x-\frac{11}{4}$

$\frac{5}{2}=\frac{x}{2} \Rightarrow x=5 > \frac{11}{4}$.

$a^2=\left(\frac{5}{2}-1\right)^2=\frac{9}{4}=\frac{5}{2}-\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$ ✓

т.е. $\boxed{x=5}$

② $\text{I}=\text{III} \Rightarrow a=\sqrt{b}=c \Rightarrow \frac{x}{2}-1=x-\frac{11}{4}$

$\frac{x}{2}=\frac{7}{4} \Rightarrow x=\frac{7}{2}$

$\left(\frac{7}{4}-1\right)^2=a^2=b=\frac{7}{4}-\frac{1}{4}=\frac{3}{2}$

$\frac{9}{16}=\frac{3}{2}$ $\varnothing$.

③ $\text{II}=\text{III} \Rightarrow a^2=c$ и $b=c^2$

$\frac{x^2}{4}-x+1=x-\frac{11}{4}$

$x^2-8x+15=0$.

$D=64-60=4$

$x_{1,2}=\frac{8\pm2}{2}$ $x_1=5$ $x_2=3$.

$x^2-\frac{11}{2}x+\frac{121}{16}=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}$

$x^2-6x+\frac{125}{16}=0$

№5 Чистовик

т.е (1) $a^2 = c$ $\qquad$ $b = c^2$

$\Downarrow$ $\qquad$ $\Downarrow$

$x_1 = 5$ $\qquad$ $x^2 - 6x = -\frac{125}{6}$

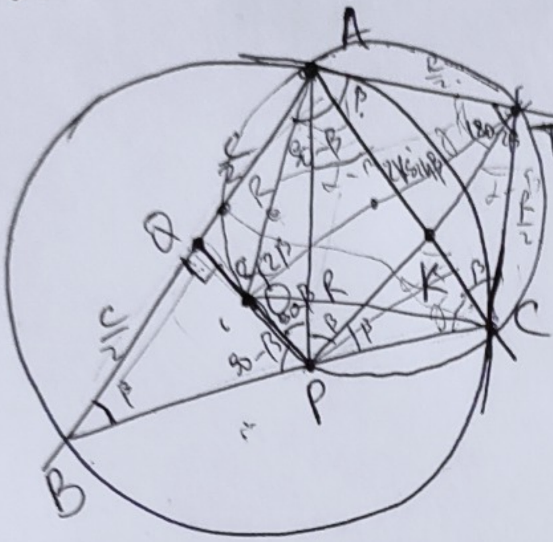
$x_2 = 3$

из (1) $\Rightarrow x^2 - 6x \in \mathbb{Z}$ и т.е $-\frac{125}{6} \notin \mathbb{Z}$ $\varnothing$.

ответ: $x = 5$

№6

Чистовик



$S_{APK}=10$

$S_{CPK}=6$.

а) S_{ABC} ??

б) $\angle ABC = \operatorname{arctg} 2$ $AC = ?$

а) т.е если $\angle B=\beta \Rightarrow \angle AOC=2\beta$ и $\angle TAC=\angle TCA=\beta \Rightarrow \angle ATC=180-2\beta \Rightarrow$

$\Rightarrow O, A, T, C$ – cyclic $\Rightarrow \angle TPC=\angle TAC=\beta \Rightarrow KP \parallel AP \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{CP}{CB}=\frac{CK}{CA}$ т.е $\frac{S_{CPK}}{C_{APK}}=\frac{CK}{KA}=\frac{6}{10} \Rightarrow \frac{CK}{CA}=\frac{6}{16}$

и т.е $\frac{S_{ABC}}{S_{APC}}=\frac{CB}{CP}=\frac{16}{6} \Rightarrow S_{ABC}=\frac{16^2}{6}=\frac{8\cdot16}{3}=\frac{128}{3}$

б) Пусть Q – середина $AB \Rightarrow$ т.к $PA=PB$ и $OB=OA \Rightarrow PO$ – серединный перпендикуляр AB и $\angle QPB=90-\beta \Rightarrow QP=BQ\cdot \operatorname{tg}\beta=2BQ$

т.е если $AB=c \Rightarrow PQ=c \Rightarrow S_{ABP}=\frac{c^2}{2}=S_{ABC}-S_{APC}=\frac{128}{3}-16=$

$=\frac{80}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow c^2=\frac{160}{3} \Rightarrow c=4\sqrt{\frac{10}{3}}$ и т.е $BP^2=c^2+\frac{c^2}{4}=c^2\cdot\frac{5}{4} \Rightarrow$

$BP\cdot\sin\beta=QP \Rightarrow \sin\beta=\frac{c}{c\cdot\frac{\sqrt5}{4}}=\frac{2}{\sqrt5}$ $\frac{1}{\sqrt5}$ $\Rightarrow BP=\cancel{4}_2\cdot\sqrt{\frac{10}{3}}\cdot\frac{\sqrt5}{\cancel{2}1}=10\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}$

$\cos\beta=\frac{1}{\sqrt5}$

и т.е т.к PT – биссектр $\Rightarrow \frac{AP}{PC}=\frac{AK}{KC}=\frac{10}{6}$ и т.е $AP=BP \Rightarrow$

$\Rightarrow PC=\frac{3\cdot AP}{5}=\frac{3\cdot BP}{5}=6\cdot\sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow BC=16\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}$

т.е $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos\beta=\frac{160}{3}+\frac{256\cdot2}{3}-$

$-2\cdot4\cdot\sqrt{\frac{10}{3}}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot16\cdot\frac{1}{\sqrt5}=\frac{160+512}{3}-8\cdot16\cdot\sqrt{\frac{10\cdot2}{3^2\cdot5}}=$

$=\frac{672}{3}-128\cdot\frac{2}{3}=\frac{672-256}{3}=\frac{416}{3} \Rightarrow AC=\sqrt{\frac{416}{3}}$