Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100406**

ID профиля: **325033**

Вариант 19

Чистовик

Вариант 19

ЧАСТЬ 1

1)

$S_{14} = \frac{2a_1 + 13d}{2} \cdot 14$

$(a_1+8d)(a_1+16d) > \frac{2a_1+13d}{2} \cdot 14 + 12$

$(a_1+10d)(a_1+14d) < \frac{2a_1+13d}{2} \cdot 14 + 47$

$a_1^2 + 24a_1d + 128d^2 > 14a_1 + 91d + 12$

$+\begin{cases} a_1^2 + 24a_1d + 140d^2 < \cancel{\frac{2a_1+13d}{2}} \cdot 14a_1 + 91d + 47 \\ -a_1^2 - 24a_1d - 128d^2 < -14a_1 - 91d - 12 \end{cases}$

$12d^2 < +35$

$d^2 < \frac{35}{12}$

$-\sqrt{\frac{35}{12}} < d < \sqrt{\frac{35}{12}}$

т.к. d - целое, то оно может быть равно $-1; 0; 1$

но т.к. прогрессия возрастающая, то подходит только 1

$a_1^2 + 24a_1 + 140 < 14a_1 + 91 + 47$

$a_1^2 + 24a_1 + 128 > 14a_1 + 91 + 12$

$a_1^2 + 10a_1 + 2 < 0$

$a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0$

$\frac{D_1}{4} = 25 - \cancel{2} = 23$

$a_1 \in (\cancel{-5-\sqrt{23}}\ -5-\sqrt{23}; -5+\sqrt{23})$

$\frac{D_2}{4} = (a_1+5)^2 > 0$

$\Downarrow$

$a \in R \setminus \{-5\}$

$\Downarrow$

т.к. a_1 - целое: $a_1 \in \{-9; -8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1\}$

$\Downarrow$

Ответ: $a_1 \in \{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1\}$

~~Ответ:~~ a

1 из 5

21100406 (U325033 M1300159)

Чистовик

вариант 19
ЧАСТЬ 1

3)

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 25\\ a^2+b^2\le \min(-8a-6b;25)\end{cases}$$

рассмотрим 2 случая

$-8a-6b\geq 25$

$8a\le \frac{-6b-25}{8}$

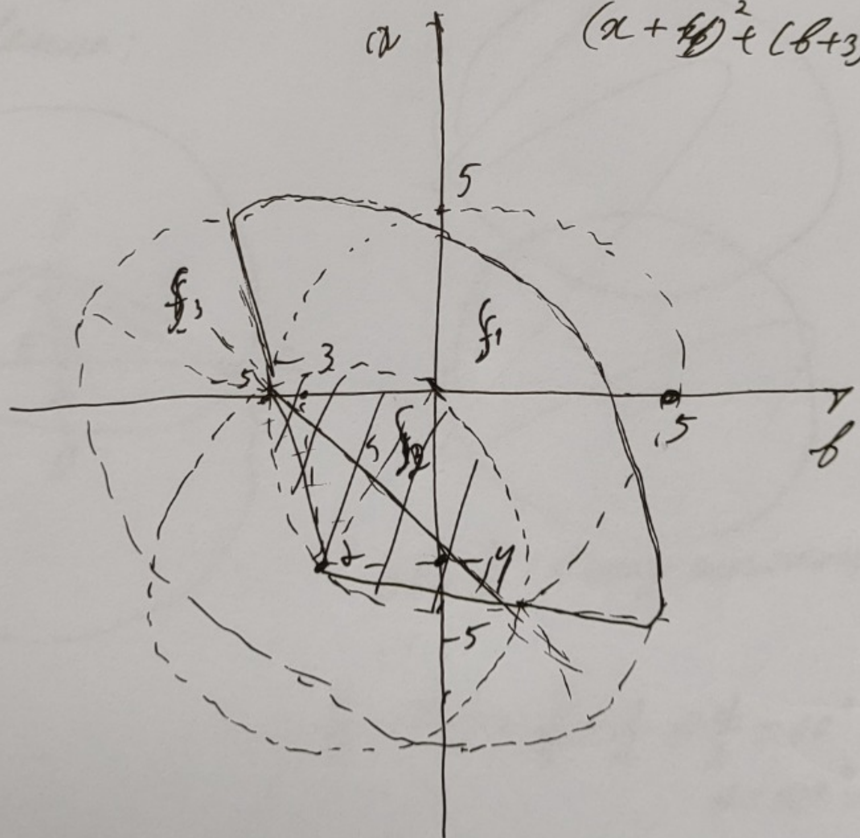
$a^2+b^2\le 25$

$-8a-6b\le 25$

$a\geq \frac{-6b-25}{8}$

$a^2+b^2\le -8a-6b$

$(a+4)^2+(b+3)^2\le 5^2$



~~рас~~
Найдём пересечение $a^2+b^2=25$ и

$\cancel{a^2+b^2}$

$\cancel{(a+4)^2}$ $a^2+b^2\le -8a-6b$

$25=-8a-6b$

$\Downarrow$

2 из 5

21100406 (U325033 M1300159)

Чистовик Вариант 19

ЧАСТЬ 1

пересечения окружностей лежат на одной прямой, а что и пересечения на a и b

⇓

3 (продолжение)

Заштрихованная область графика является всеми возможными a и b

⇓

в этой области на графике будет лежать ~~находиться~~ центр окружности

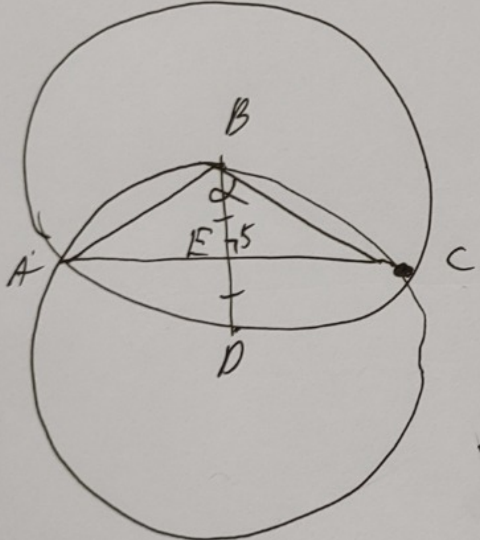
$(x-a)^2+(y-b)^2\le 25$

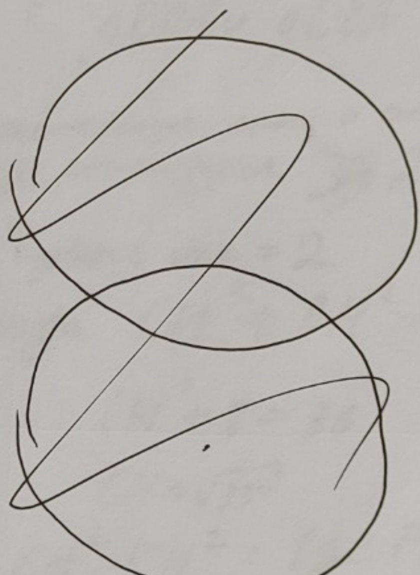
Площадь фигуры $M=2(S_1+S_2+S_3)$

$S_1=$

Найдём $\angle\alpha$

Лемма:





$BE=\frac{5}{2}$ (в силу симметрии)

⇓

$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{\frac{5}{2}}{5}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{\alpha}{2}=60^\circ$

$\alpha=120^\circ=\frac{2\pi}{3}$

$S_1=\frac{2\pi}{3}\cdot10^2-\frac{2\pi}{3}\cdot5^2=\frac{2\pi}{3}=50\pi$

$S_2=\frac{2\pi}{3}\cdot5^2-\frac{5^2}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=5^2\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

3 из 5

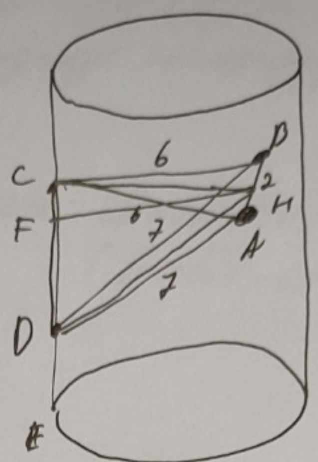
$S_3=\frac{\pi}{3}\cdot5^2=\frac{25\pi}{3}$

Ответ: $M=2\left(50\pi+\frac{25\pi}{3}+\frac{50\pi}{3}-\frac{25\sqrt{3}}{4}\right)=2\left(75\pi-\frac{25\sqrt{3}}{4}\right)$

Чистовик

вариант 19
часть 1

2) $AB=2$
$AC=CB=6$
$AD=DB=7$
$CD - ?$



1) AB ~~как~~ || основанию цилиндра
т.к. $\triangle DBA$ и $\triangle CBA$ – р/б

2) !! диаметр оси в основании цилиндра $\cancel{7}\ 2$
Пусть он $=2$
Тогда $CH^2+BH^2=CB^2$
$CH^2+1=36$
$CH=\sqrt{35}$
$CF^2=CH^2-FH^2$; где $FH=1$ (радиус)
$CF^2=35-1$
$CF=\sqrt{34}$
$DH^2=DA^2-HA^2$
$DH=\sqrt{48}$
$FD^2=DH^2-FH^2$
$FD=\sqrt{47}$

!! $CD=\sqrt{34}+\sqrt{47}$ (если C и D по ~~одну~~ сторону от F) разные

~~Ответ: $CD=\sqrt{34}+\sqrt{47}$~~

4 из 5

2)
(продолжение)

Чистовик

вариант 29
часть 1

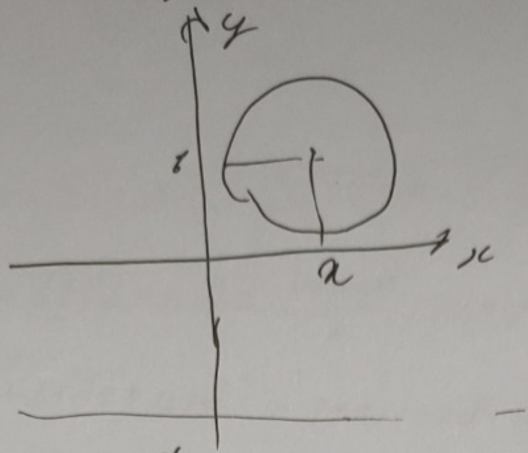
$CD=\sqrt{47}-\sqrt{34}$ (если C и D лежат по одну сторону от F)

!!

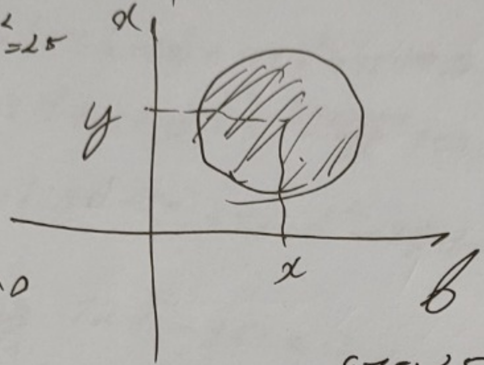
Ответ: $CD=\sqrt{47}+\sqrt{34}$
$CD=\sqrt{47}-\sqrt{34}$

21100406 (U325033 M1300159)

Черновик



$$\frac{36b^2+625+300b}{64}+b^2=25$$



$a^2+b^2+8a+6b\le 0$

$(a+4)^2+(b+3)^2\le 5^2$

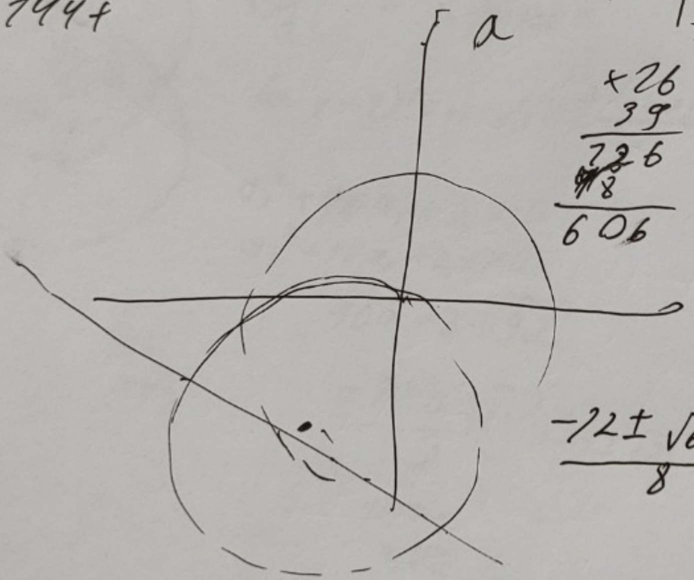
$100b^2+300b-975=0$

$4b^2+12b-39=0$

$144+$

$975 \mid 25$, 39

$\times 26$
39
226
78
606



$-8a-6b\le 25$

$\cancel{a=-6b}$

$\cancel{-6b\le 25+8a}$

$-8a-25\le 6b$

$$\frac{-12\pm\sqrt{606}}{8}$$

$$b\ge\frac{-8a-25}{6}$$

$25=-8a-6b$ $\quad a=\frac{-25-6b}{4}$

Черновик

$a_9 \cdot a_{17} = \frac{a_1 + a_{14}}{2} \cdot 14 + 72$

$(a_1+8d)(a_1+16d) > \frac{2a_1+13d}{2} \cdot 14 + 72$ $\left(\frac{-6b-25}{8}\right)^2 + b^2 = 25^2$

$(a_1+10d)(a_1+14d) \le \frac{2a_1+13d}{2} \cdot 14 + 47$ $36b^2 + 300b + 625 + 64b^2 = 1600$

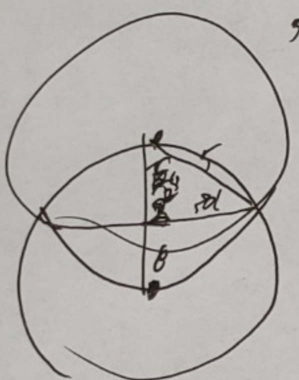
$a_1^2 + 24da_1 + 128d^2 > 14a_1 + 91d + 72$ $100b^2 + 300b - 975 = 0$

$a_1^2 + a_1(24d - 14) + 128d^2 - 91d - 72 > 0$ $4b^2 + 12b - 39 = 0$

$a_1^2 + 24da_1 + 140d^2 < 14a_1 + 91d + 47$ $-6 \pm \sqrt{792}$

$a_1^2 + a_1(24d - 14) + 140d^2 - 91d - 47 < 0$

$39 \cdot 4 = 156$, $156 + 36 = 192$



5^2

$26 \frac{25}{1}$ $12d^2 - 35 < 0$

$3 \cdot \frac{25}{1}$ $d^2 < \frac{35}{12} \approx 3$

$(a_1+8)(a_1+16) > \frac{2a_1+13}{2} \cdot 14 + 22$

$a_1^2 + 10a_1 + 2 < 0$

$a_1^2 + 10a_1 + 23 > 0$

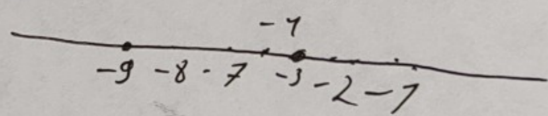
$\frac{5}{2}\sqrt{3}$

$5\sqrt{3}$

$100 - 8 = \sqrt{92}$

$\frac{-10 \pm \sqrt{92}}{2} = -5 \pm \sqrt{23}$

-6 -5 -4



~~170~~

~~251~~ -5

$-5 \pm \sqrt{2}$

$\frac{3}{2} 14 = 21$

$7 - 70 + 25 > 0$

$1 - 10 + 2$

$311 > 33$

21100406 (U325033 M1300159)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100406**

ID профиля: **325033**

Вариант 19

Чистовик вариант 19

Часть 2

7)

$$\log_{\left(\frac{x}{2}-1\right)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)\cdot\log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right)\cdot\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\ln\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)}{\ln\left(\frac{x}{2}-1\right)}\cdot 2\frac{\ln\left(\frac{x}{2}-1\right)}{\ln\left(x-\frac{11}{4}\right)}\cdot 2\frac{\ln\left(x-\frac{11}{4}\right)}{\ln\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)}=$$

$=2$

~~т.к~~ Пусть одно из чисел t, тогда другие t и $t+1$

$\Downarrow$

$t^2(t+1)=2$

$t^3+t^2-2=0$

$(t-1)(t^2+2t+2)=0$

$D<0$

$\Downarrow$

$t=1$; $t+1=2$

Пусть число $\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2=2$

$\left(x-\frac{11}{4}\right)^2=\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)^2$

$\left|x-\frac{11}{4}\right|=\left|\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right|$

$x-\frac{11}{4}=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}$

$\frac{x}{2}=\frac{5}{2}$ ~~Тот~~

$x=5$

Подставим в два других числа

$\log_{\left(\frac{3}{2}\right)^2}\frac{9}{4}=1$ $\qquad$ $\log_{\sqrt{\frac{9}{4}}}\frac{3}{2}=1$ $\qquad$ 1 из 7

$1=1$ $\quad\Downarrow\quad$ $1=1$

$x=5$ – подходит

Ограничения на x

$\frac{x}{2}-\frac{1}{4}>0$; $x>\frac{1}{2}$

$\frac{x}{2}-1>0$ $x>2$

$x-\frac{11}{4}>0$; $x>\frac{11}{4}$

$\frac{x}{2}-1\neq 1$

$x\neq 4$

$x-\frac{11}{4}\neq 1$

$x\neq\frac{15}{4}$

$\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\neq 1$

$x\neq\frac{5}{2}$

21100406 (U325033 M1300160)

Чистовик

вариант 19
Часть 2

6
(продолжение)

Пусть $\log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right)=2$

$x-\frac{11}{4}=\frac{x}{2}-1$

$\frac{x}{2}=\frac{7}{4}$

$x=\frac{7}{2}$

Подставим в другие числа

$\log_{\left(\frac{7}{4}-1\right)^2}\left(\frac{7}{4}-\frac{1}{4}\right)=1$ $\quad$ $\log_{\frac{7}{4}-\frac{1}{4}}\left(\frac{7}{2}-\frac{11}{4}\right)^2$

$\log_{\frac{9}{16}}\frac{3}{2}\neq 1$ $\quad$ $\log_{\frac{3}{2}}\frac{3}{4}\neq 1$

$x=\frac{7}{2}$ - не подходит

Пусть $\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2=2$

$\frac{x}{2}-\frac{1}{4}=x-\frac{11}{4}$

$\frac{x}{2}=\frac{5}{2}$

Пусть $\log_{\left(\frac{x}{2}-1\right)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)=2$

$\frac{x}{2}-\frac{1}{4}=\left(\frac{x}{2}-1\right)^4$ Тогда

~~$2x$~~

$8x-4=(x-2)^4$

$\Downarrow$

$\left[\cancel{x=2}\right.$

$\begin{cases}\log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right)=1\\ \log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2=1\end{cases}$

$\begin{cases}\frac{x^2}{4}-x+1=x-\frac{11}{4}\\ x^2-\frac{11}{2}x+\frac{121}{16}=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\end{cases}$

2 из 7

Чистовик

вариант 19

часть 2

5 (продолжение)

$$\begin{cases} x^2 - 8x + 15 = 0 \\ x^2 - 6x + \frac{125}{16} = 0 \end{cases}$$

$$D = 36 - \frac{125}{4} = \frac{19}{4}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 5 \\ x = 3 \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} x = \frac{6 \pm \sqrt{\frac{19}{4}}}{2} \\ x = \frac{6 - \sqrt{\frac{19}{4}}}{2} \end{array} \right. \end{cases}$$

2,1

такие x не подходят

Ответ: $x = 5$

Чистовик

вариант 19
ЧАСТЬ 2

4)

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=21 \\ НОК(a;b;c)=3^{17}\cdot 7^{15} \end{cases}$$

т.к. $НОД=21=$ ~~тогда~~ $7\cdot 3$ то

$a=7\cdot 3\cdot x$

$b=7\cdot 3\cdot y$ ~~x, y, z — не имеют в разложении один~~

$c=7\cdot 3\cdot z$ где $НОД(x;y;z)=1$

Пусть в числе x есть множитель 3, тогда его нет в y и z, тогда в разложении x есть 3^{16}, ~~если в разложен~~ аналогично с числом 7

(1)

~~Тогда получаемые~~

одно из чисел a, b и c содержит 3^{17}, а одно $7^{15}=7$ необходимо дважды выбрать одно число из трёх

(1)

$N=$ ~~$2C_3^1 \cdot C_2^1$~~ $3\cdot 3$ $(C_3^1)^2=9$

Ответ: 9 троек.

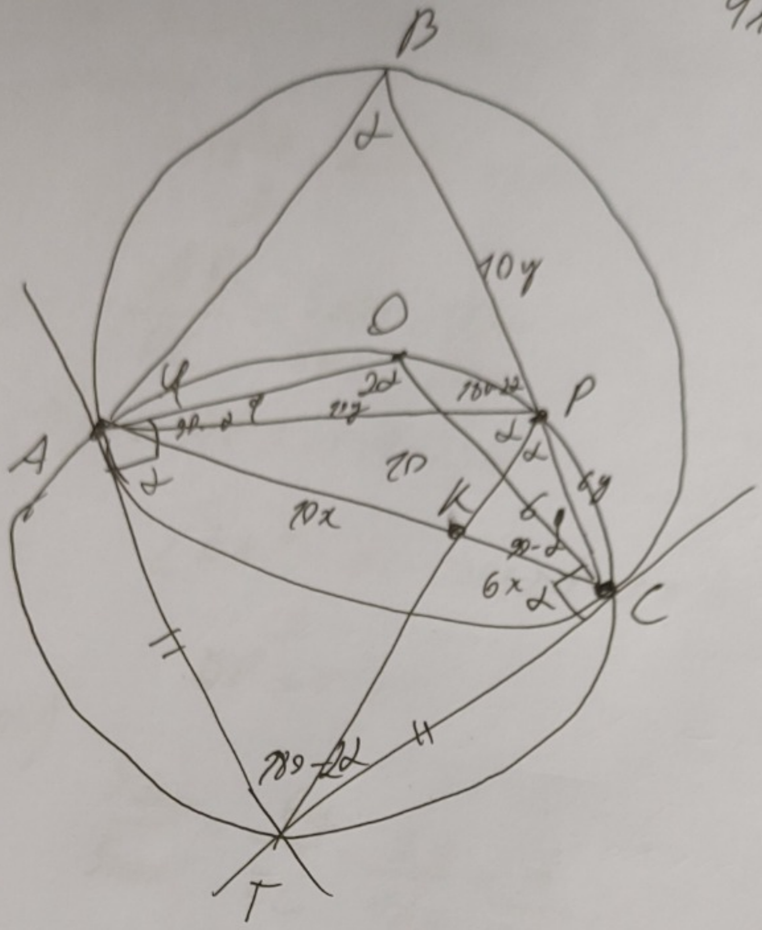
4 из 7

б)

Чистовик

Вариант 19
ЧАСТЬ 2

$S_{APK}=10$
$S_{CPK}=6$
S_{ABC} с)



1) $\frac{S_{APK}}{S_{CBK}} = \frac{AK}{KC} = \frac{10}{6}$

2) т.к. $\angle OAT = \angle OCT = 90°$ (касательные)
⇓
$OATC$ – вписанный
⇓
T лежит на окружности

3) Пусть $\angle ABC = \alpha$
⇓
$\angle AOB = 2\alpha$ (центральный)
⇓

5 из 7

Чистовик Вариант 29
ЧАСТЬ 2

б (продолжение)

$\Downarrow$

$\angle ABC = 2\alpha$

т.к. $AT = TC$ (отрезки касательных)

$\angle APK = \angle KPC = \alpha$

$\Downarrow$

$$\frac{AP}{PC} = \frac{S_{APK}}{S_{PKC}} = \frac{\cancel{10y}}{\cancel{6y}}$$

4) $\angle APB = 180 - 2\alpha$

$\Downarrow$

$\angle BAP = 180 - 180 + 2\alpha - \alpha = \alpha$

$\Downarrow$

$BP = 10y$

5)

$$\frac{S_{APC}}{S_{ABC}} = \frac{6y}{BC} = \frac{6y}{16y} = \frac{6}{16}$$

$$S_{ABC} = \cancel{16}\ \frac{16 \cdot 2}{6} = \frac{128}{3}$$

б) $\angle ABC = \arctg 2$

$AC - ?$

$$\frac{S_{APC}}{S_{AOC}} = \sqrt{\frac{6y^2}{z^2}}$$

$$\frac{AB}{BP} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha}$$

6 из 7

$$\frac{AB}{BP} = 2\cos\alpha \Rightarrow AB = BP\,2\cos\alpha$$

CA

$AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2\,BA\,BC \cdot \cos\alpha$

21100406 (U325033 M1300160)

Чистовик

$$\cancel{AC^2 = PC^2 + AP^2 - 2PC\cdot AP\cdot \cos 2\alpha}$$

$$76 = 60y^2 \cdot \sin 2\alpha$$

$$tg\alpha = 2$$

$$\frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha} = 2$$

$$\sin^2\alpha = 2 - 2\sin^2\alpha$$

$$3\sin^2\alpha = 2$$

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}} \qquad \cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$\cos 2\alpha = \frac{2}{3} - 1$$
$$-\frac{1}{3}$$

$$76 = 60y^2 \cdot 2\frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$8 = 20y^2\sqrt{2}$$

$$\cancel{\frac{2}{5\sqrt{2}}} \quad \frac{\sqrt{2}}{5} = y^2$$

$$y = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{5}}$$

$$AC = \sqrt{36y^2 + 100y^2 - 2\cdot 6y\cdot 10y\cdot \cos 2\alpha}$$

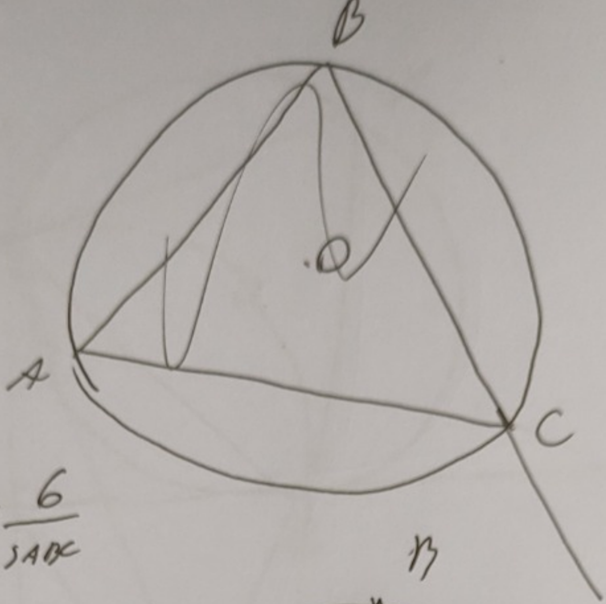
$$AC = \sqrt{36\frac{\sqrt{2}}{5} + 100\frac{\sqrt{2}}{5} - 120\frac{\sqrt{2}}{5}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)}$$

$$AC = \sqrt{176\frac{\sqrt{2}}{5}}$$

7 из 7

21100406 (U325033 M1300160)

Черновик



$$\frac{6x\cdot y}{16x(z+y)} = \frac{6}{S_{ABC}}$$

$r = \frac{7}{2}$

$R^2 \sin 2\alpha \, \frac{1}{2} = 16$

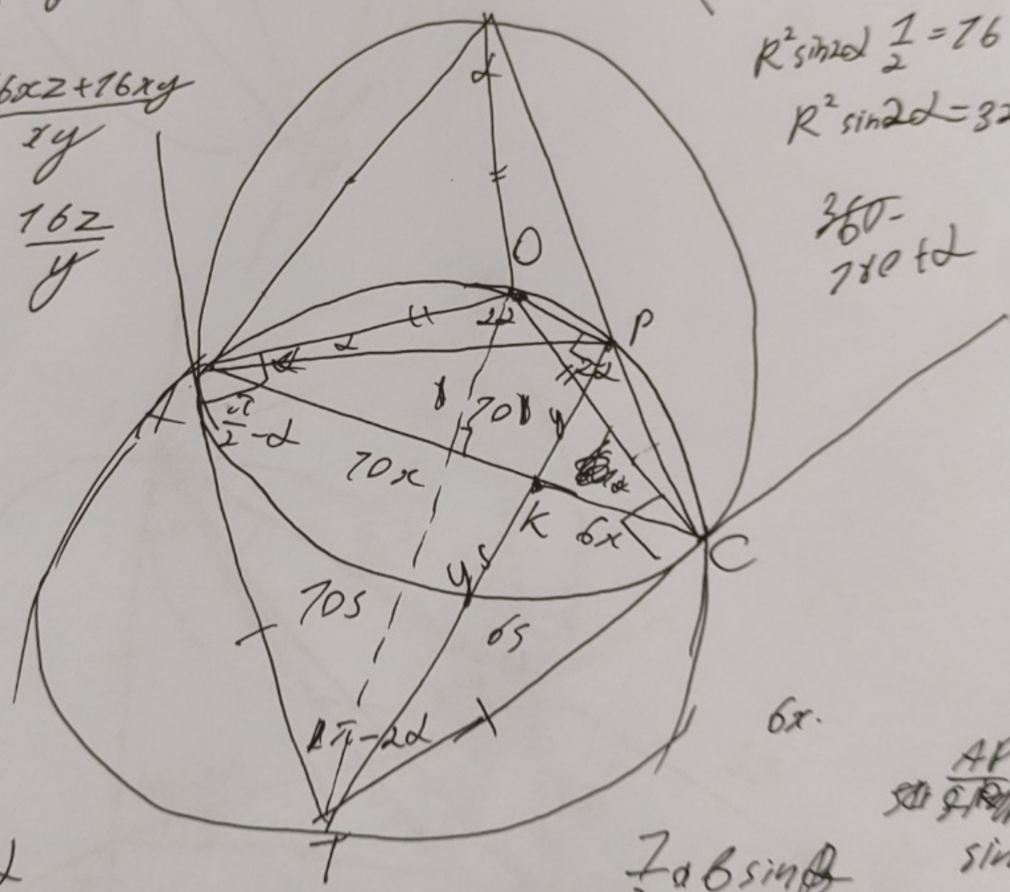
$R^2 \sin 2\alpha = 32$

$$S_{ABC} = \frac{16xz+16xy}{xy}$$

$$S_{ABC} = 16 + \frac{16z}{y}$$

$\cancel{360-}$

$180 + \alpha$



6x.

$\frac{AP}{\sin\beta} = 2R$

$\sin\beta = \frac{AP}{2R}$

$\varphi - \alpha$

$\frac{1}{2} ab \sin\beta$

$360 - 180 - 180 + 2\alpha$

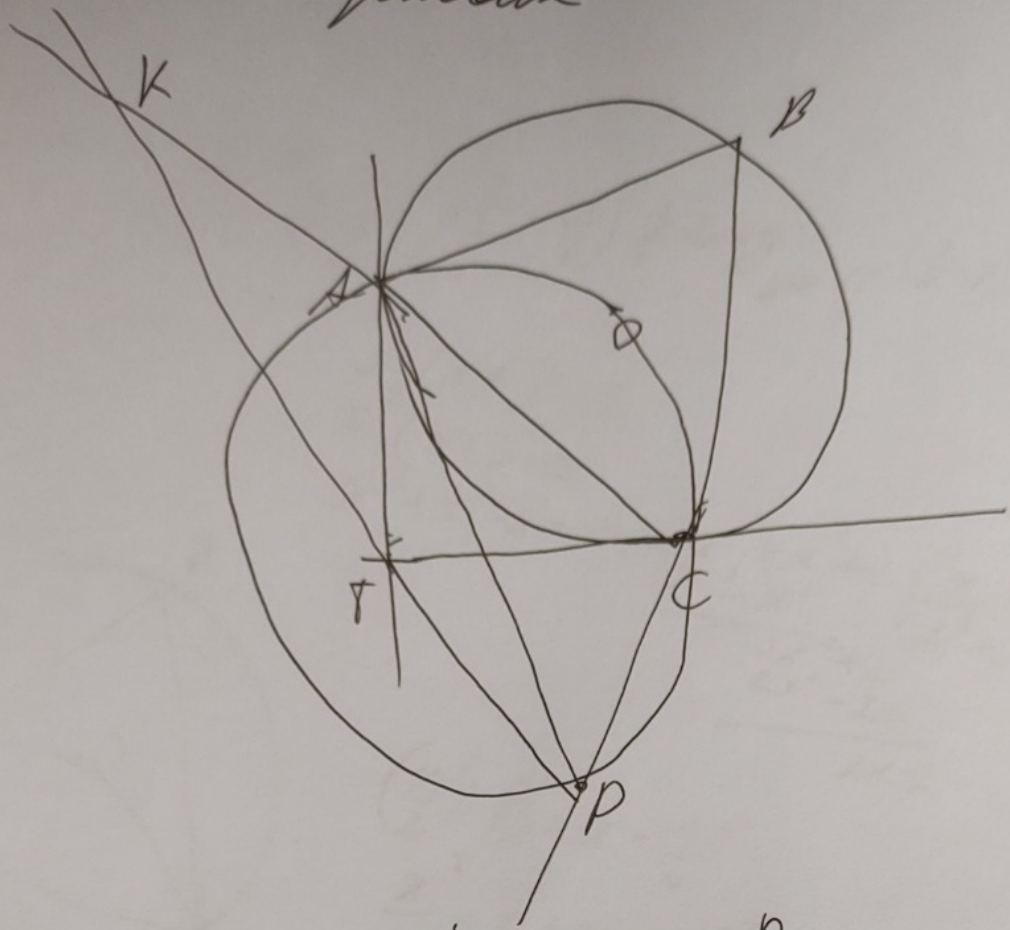
2α

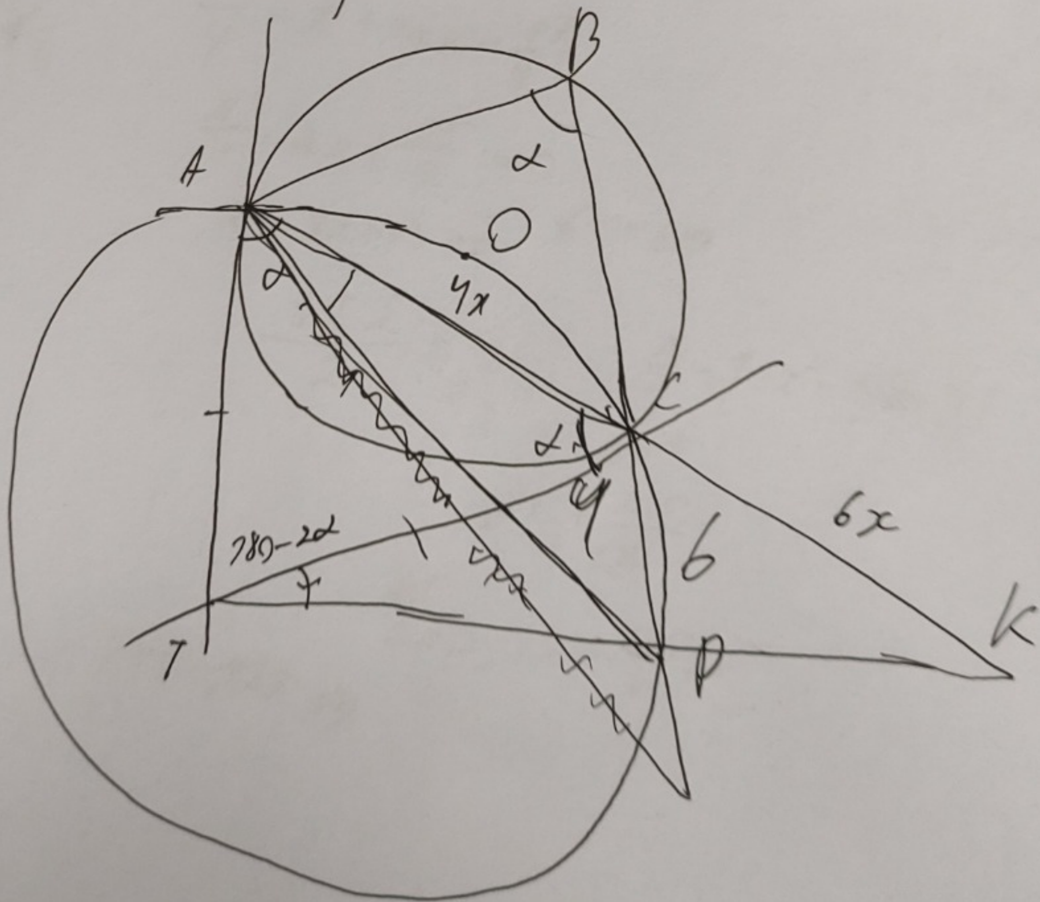
$10xy\,\frac{1}{2}\sin\alpha$

$ys\cdot 6x\cdot\frac{1}{2}\sin\alpha$

$\cancel{\frac{10}{6s}} = \frac{10}{6s}$

Черновик





Черновик 1

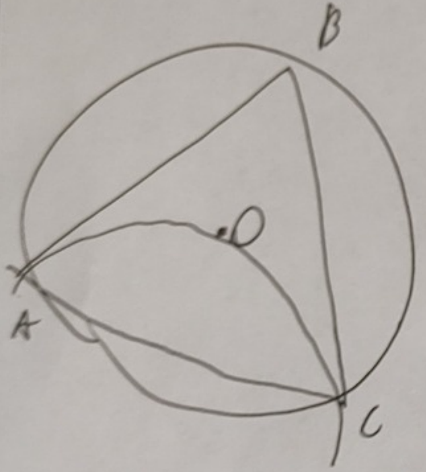
3.7.

$$2\frac{1}{2}\log_{\frac{x}{2}-1}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)\cdot 2\log_{x+\frac{11}{4}}\left(\frac{x}{2}-1\right)\cdot\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}} x-\frac{11}{4}$$

$x\cdot x(x+1)=2$

$x^2(x+1)=2$

$x^3+x^2-2=0$ — $x^3+x^2+2 \,|\, x-1$; x^3-x^2; x^2+2x+2; $2x^2+2$; $2x^2-2x$; $2x-2$



$\left(\frac{x}{2}-1\right)^2=x-\frac{11}{4}$

$\frac{x^2}{4}-x+1=x-\frac{11}{4}$

$\frac{x^2}{4}-2x+\frac{15}{4}=0$

$x^2-8x+15=0$ $64-60$

$\frac{8\pm2}{2}=5$, $=3$

$\frac{x}{2}-\frac{1}{4}=x^2-\frac{11}{2}x+\frac{121}{16}$

$\cancel{16x^2}$

$x^2-6x+\frac{125}{16}$

$\cancel{4x^2}$

$2x^2-12x+\frac{225}{8}=0$

$144-\cancel{225}$ 29

21100406 (U325033 M1300160)