Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100226**

ID профиля: **293783**

Вариант 19

Задача 1. Чистовик (1)

1) $S = \frac{2a_1 + 13d}{2} \cdot 14 = 7(2a_1 + 13d)$

2) $a_9 = a_1 + 8d$ 3) $a_{17} = a_1 + 16d$; 4) $a_{11} = a_1 + 10d$ 5) $a_{15} = a_1 + 14d$.

Тогда:

$$\begin{cases} (a_1 + 8d)(a_1 + 16d) > 7(2a_1 + 13d) + 12 \\ (a_1 + 10d)(a_1 + 14d) < 7(2a_1 + 13d) + 47. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + a_1 \cdot 24d + 8 \cdot 16d^2 > 14a_1 + 91d + 12 \\ a_1^2 + a_1 \cdot 24d + 14 \cdot 10d^2 < 14a_1 + 91d + 47 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + a_1 \cdot 24d + 8 \cdot 16d^2 > 14a_1 + 91d + 12 \\ 14a_1 + 91d + 47 > a_1^2 + a_1 \cdot 24d + 14 \cdot 10d^2 \end{cases} \Big| +$$ (т.к. правые части больше левых)

$a_1^2 + a_1 \cdot 24d + 8 \cdot 16d^2 + 14a_1 + 91d + 47 > a_1^2 + a_1 \cdot 24d + 140d^2 + 14a_1 + 91d + 12.$

$35 > 140d^2 - 8 \cdot 16d^2 \Rightarrow 35 > 12d^2$; $d^2 < \frac{35}{12}$.

т.к. последоват возраст, то $d > 0$, т.к. $d \in \mathbb{Z}$, то

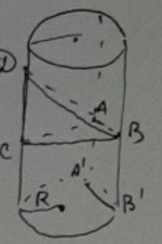
$$\begin{cases} d^2 < \frac{35}{12} \\ d > 0 \\ d \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \boxed{d = 1}$$ (при $d = 2$ $4 > \frac{35}{12}$) Подставим $d = 1$ в систему.

$$\begin{cases} (a_1 + 8)(a_1 + 16) > 14a_1 + 91 + 12 \\ (a_1 + 10)(a_1 + 14) < 14a_1 + 91 + 47 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0 \\ a_1^2 + 10a_1 + 2 < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (a_1 + 5)^2 > 0 \\ (a_1 + 5)^2 < 23 \\ a_1 \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 \neq -5 \\ \left[\begin{array}{l} a_1 = -9 \\ a_1 = -8 \\ a_1 = -7 \\ a_1 = -6 \\ a_1 = -5 \\ a_1 = -4 \\ a_1 = -3 \\ a_1 = -2 \\ a_1 = -1 \end{array} \right. \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a_1 = -1 \\ a_1 = -2 \\ a_1 = -3 \\ a_1 = -4 \\ a_1 = -6 \\ a_1 = -7 \\ a_1 = -8 \\ a_1 = -9 \end{array} \right.$$

Ответ: значения a_1 (все возм): $-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1$.

Задача 2. чистовик (2).

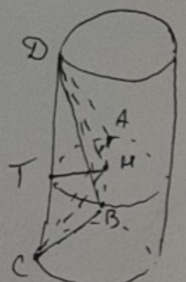


$AB = 2$; $AD = DB = 7$; $AC = CB = 6$; $R = \min$.

1) Заметим, что т.к. $\begin{cases} AD = DB \\ CB = AC \end{cases}$, то $AB \parallel A'B'$,

значит $AB = A'B'$.

Т.к. $A'B'$ является хордой, то $2R \geq A'B'$, чтобы получить $R_{\min}$ необходимо $2R = A'B'$. Значит $R = 1$; AB - диаметр. Изобразим чертёж.

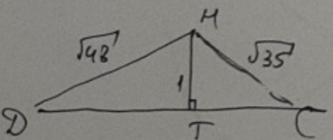


2) проведем высоты DH и CH в $\triangle BAD$ и $\triangle ABC$ (высоты попадут в середину AB (т.к $\triangle$ равнобедр.)

Тогда $DH = \sqrt{AD^2 - AH^2} = \sqrt{48}$.

$CH = \sqrt{CB^2 - BH^2} = \sqrt{35}$.

3) Рассмотрим $\triangle CHD$:



проведем высоту $HT = R = 1$.

Тогда по т. Пифо: $DT = \sqrt{47}$; $CT = \sqrt{34}$

$CD = CT + DT = \sqrt{47} + \sqrt{34}$

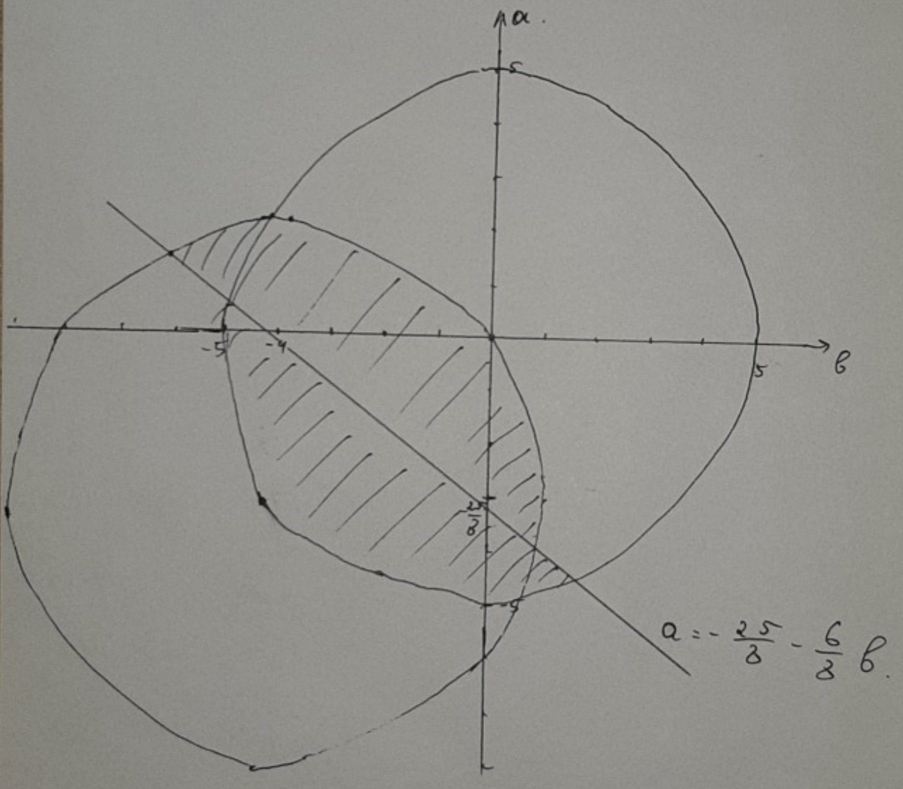
Ответ: $CD = \sqrt{47} + \sqrt{34}$.

Задача 3 чистовик (3)

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 25\\ a^2+b^2 \le \min(-8a-6b; 25)\end{cases}$$

Рассмотрив все возм. знач. a и b.

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-8a-6b>25\\ a^2+b^2 \le 25\end{cases}\\ \begin{cases}-8a-6b<25\\ a^2+b^2 \le -8a-6b\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a<-\frac{25}{8}-\frac{6}{8}b\\ a^2+b^2 \le 25\end{cases}\\ \begin{cases}a>-\frac{25}{8}-\frac{6}{8}b\\ (a+4)^2+(b+3)^2 \le 25\end{cases}\end{array}\right.$$



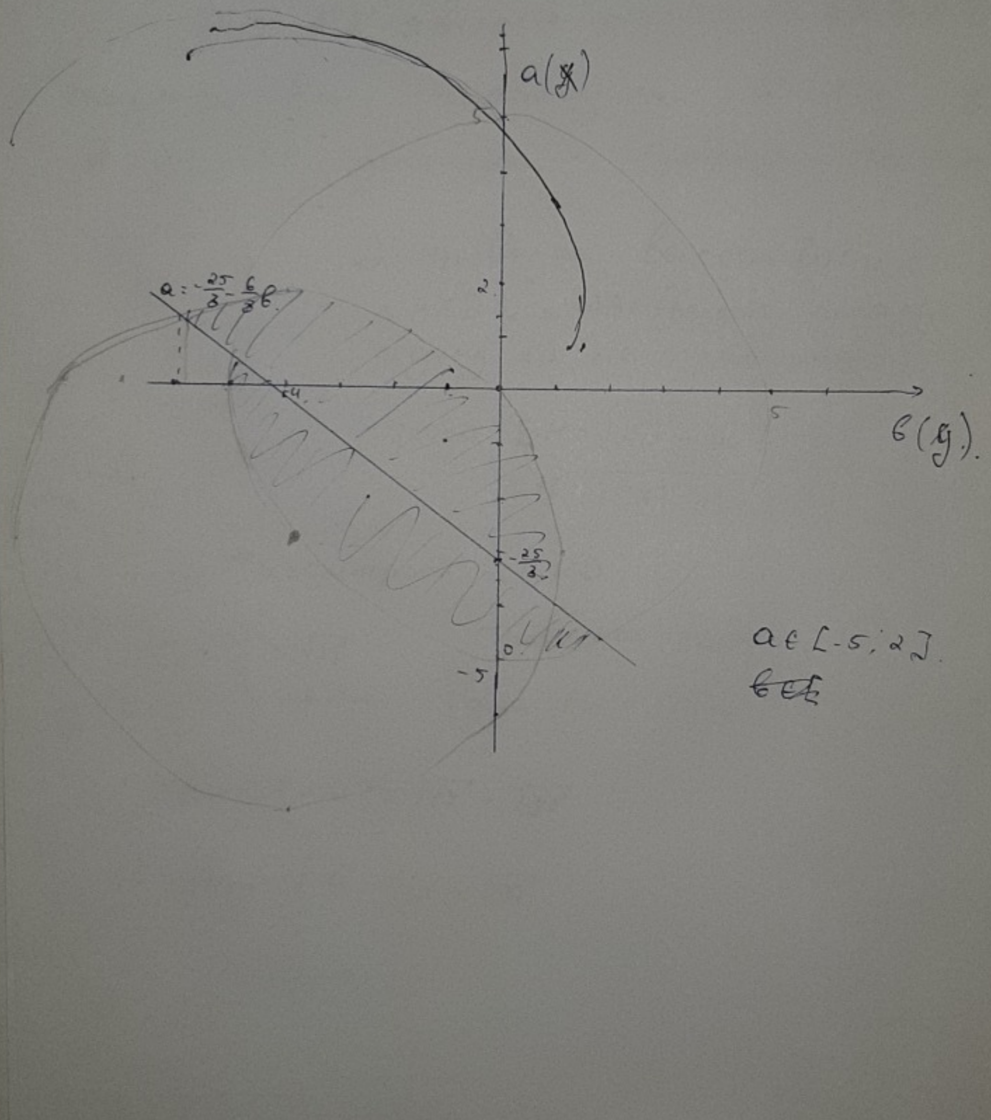
//// - все возм. значения a и b.

Задача 3 (продолжение) Чистовик (4).

Значит, если мы заменим систему координат aOb на XOY, то фигура M – совокупность окружностей с центрами в закрашенной области.

$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 25$.

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-8a-6b>25\\ a^2+b^2\le 25\end{cases}\\ \begin{cases}-8a-6b<25\\ a^2+b^2\le -8a-6b\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}-8a>25+6b\\ a^2+b^2\le 25\end{cases}\\ \begin{cases}-8a<25+6b\\ (a+4)^2+(b+3)^2\le 25\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a<-\frac{25}{8}-\frac{6}{8}b\\ a^2+b^2\le 25\end{cases}\\ \begin{cases}a>-\frac{25}{8}-\frac{6}{8}b\\ (a+4)^2+(b+3)^2\le 25\end{cases}\end{array}\right.$$



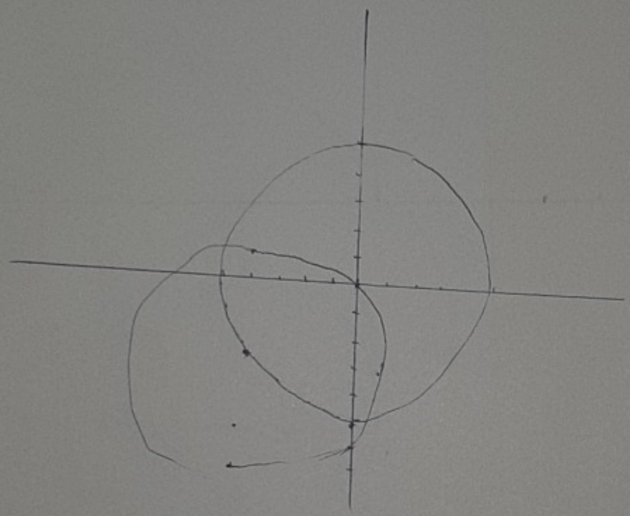
$a \in [-5; 2]$.

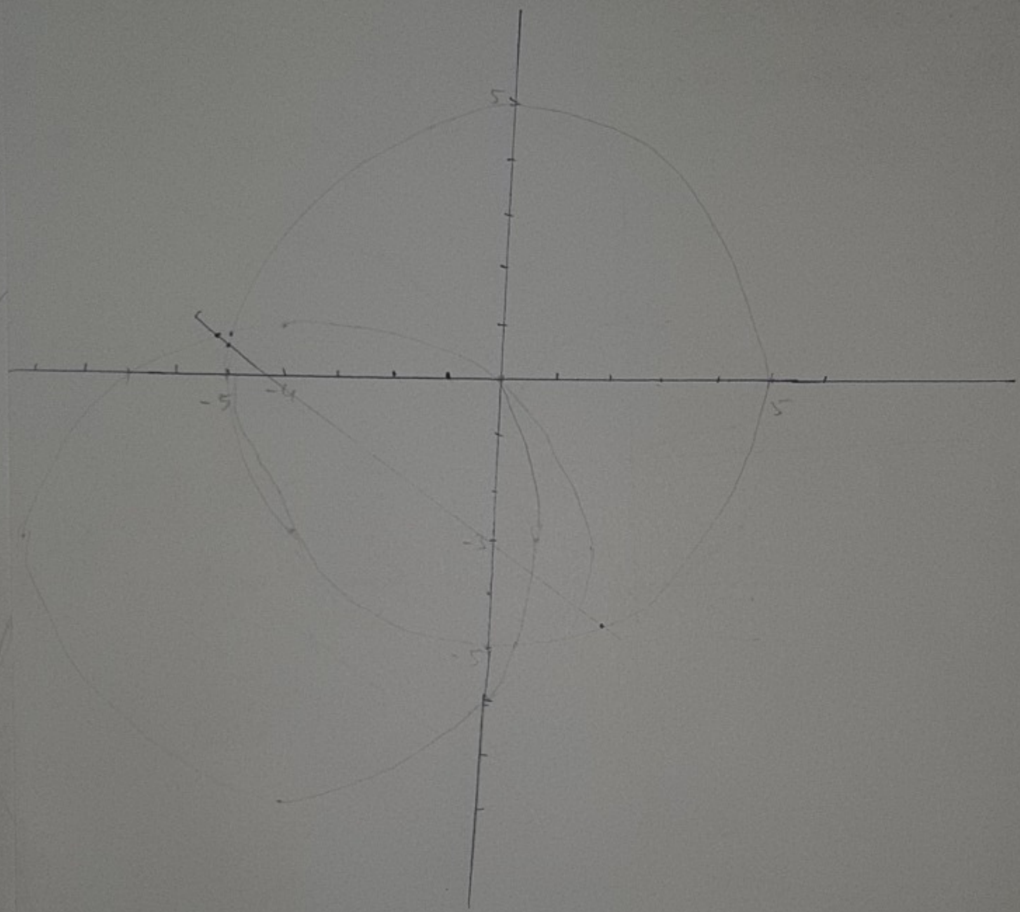
~~$b \in$~~

$a^2+b^2 \le -8a-6b$

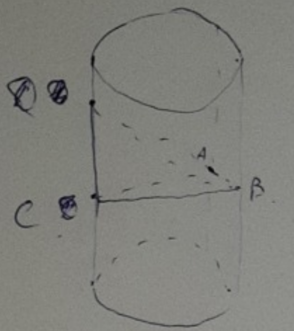
$a^2+8a+b^2+6b \le 0.$

$(a+4)^2-16+(b+3)^2-9 \le 0.$

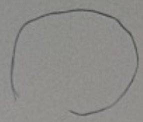



5
-5
-4
5
-3
-5

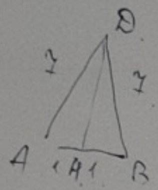
$AD = DB = 7;\ AC = CB = 6;\ AB = 2$



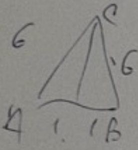
BT



$S = \pi R^2$



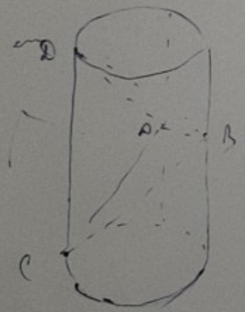
$DH = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$

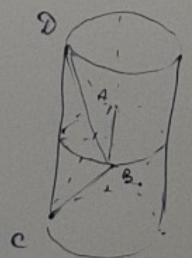


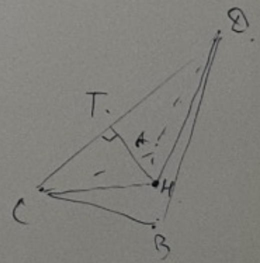
$CH = \sqrt{35}$

$CD^2 = \sqrt{35 + 48 - 2 \cdot 4\sqrt{3} \cdot \sqrt{35} \cdot \cos\alpha}$

Значит AB - диаметр.







$CH = \sqrt{35};\ HD = \sqrt{48}$

$HT = 1$

$CT = \sqrt{35 - 1} = \cancel{\sqrt{31}}\ \sqrt{34}$

$TD = \sqrt{48 - 1} = \cancel{\sqrt{48}}\ \sqrt{47}$

$\cancel{CD = \sqrt{31} + \sqrt{46}}$

$7^2 - 1 = x^2 + 1 \quad x^2 = 7^2 - 2;\ x = \sqrt{47}$

$6^2 - 1 = y^2 + 1 \quad y^2 = 6^2 - 2 \quad y = \sqrt{34}$

$-\frac{25}{8}+\frac{12}{8}=\frac{-13}{8}$; при $b=-4$.

$-\frac{25}{8}+\frac{24}{8}=-\frac{1}{8}$.

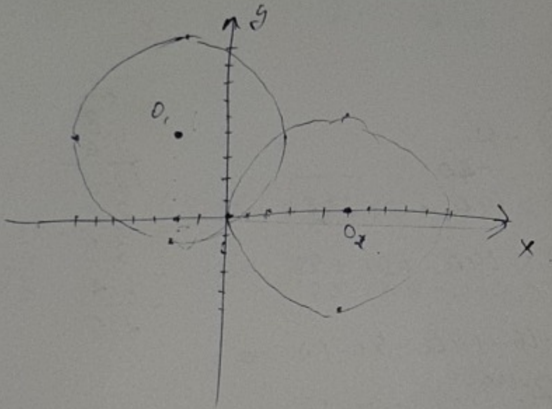
при $b=-6$.

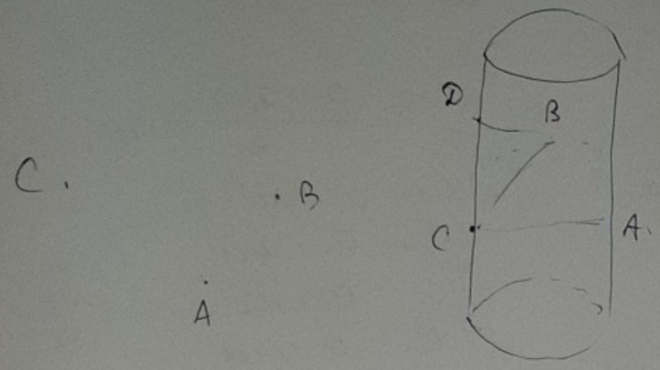
$a=-\frac{25}{8}+\frac{36}{8}=\frac{11}{8}$.

$a=2$ $b=-4$.

$a=-5$ $b=0$.

$26+$





1) $(x-a)^2+(y-b)^2 \le 25$.

2) $a^2+b^2 \le \min(-8a-6b, 25)$.

2) $0+0 \le \min(0, 25)$ $(0;0)$ $-8a-6b<25$

$8a+6b>-25$

$a>-\frac{25}{8}-\frac{6}{8}b$.

$0+0 \le 0$.

$1+1 \le (-\cancel{8}14, 25)$ $2 \le -14$.

$-1;-1$: $1+1 \le (14;25) \Rightarrow 2 \le 14$.

$a^2+b^2 \le -8a-6b$; $a^2+8a+b^2+6b \le 0$.

$$\left[\begin{array}{l}(a+4)^2+(b+3)^2 \le 25 \\ a^2+b^2 \le 25\end{array}\right.$$

1) если $a>-\frac{25}{8}-\frac{6}{8}\overset{\frac{3}{4}}{b}$, то

$(a+4)^2+(b+3)^2 \le 25$.

$\frac{25}{8}+\frac{6}{8}=\frac{31}{8}$.

2) если $a<-\frac{25}{8}-\frac{6}{8}b$, то

$a^2+b^2 \le 25$.

$a_1, a_2; a_3 \ldots \in \mathbb{Z}$ $\qquad a_1 = ?$

$S_{a_1 \ldots a_{14}} = S$

$$\begin{cases} a_9 \cdot a_{17} > S + 12 \\ a_{11} \cdot a_{15} < S + 47 \end{cases}$$

1) $S = \frac{a_1 + a_1 + 13d}{2} \cdot 14$

2) $a_9 = a_1 + 8d$

3) $a_{17} = a_1 + 16d$

4) $a_{11} = a_1 + 10d$

5) $a_{15} = a_1 + 14d$

$\begin{array}{r} \times 32 \\ 3 \\ \hline 106 \end{array}$

$(a_1 + 8d)(a_1 + 16d) > 7(2a_1 + 13d) + 12$

$(a_1 + 10d)(a_1 + 14d) < 7(2a_1 + 13d) + 47$

Пусть $a_1 + 12d = x$; $a_1 + d = y$

1) $a_1^2 + a_1 \cdot 24d + 8 \cdot 16d^2 > 14a_1 + 91d + 12$

1) $a_1^2 + a_1(24d - 14) + 8 \cdot 16d^2 - 7 \cdot 13d - 12 > 0$

2) $a_1^2 + 24a_1d + 14 \cdot 10d^2 < 14a_1 + 91d + 47$

$8 \cdot 12 \cdot 16 = 2^3 \cdot 2^2 \cdot 2^4 \cdot 3$

$\begin{array}{r} \times 8 \\ 16 \\ \hline 128 \end{array}$ $\begin{array}{r} \times 8 \\ 12 \\ \hline 96 \end{array}$ $2^9 \cdot 3 = 2^4 \cdot 6 \cdot 2^4$

$\begin{array}{r} \times 6 \\ 16 \\ \hline 96 \end{array}$ $2^5 \cdot 2^4 \cdot 3$

$32 \cdot 48$

$64 \cdot 24$

$16 \cdot 106$

$a \cdot b = 8 \cdot 12 \cdot 16$

$a + b = 91$

$91b - b^2 = 8 \cdot 12 \cdot 16$

$b^2 - 91b + 8 \cdot 12 \cdot 16$

$$\begin{cases} x + 8\cdot 16d^2 > y + 12 \\ y + 47 > x + 14\cdot 10d^2 \end{cases} \Big| +$$

$$\cancel{x+y} + 47 + 8\cdot 16d^2 > \cancel{x+y} + 12 + 14\cdot 10d^2$$

$$35 > \underset{7\cdot 2\cdot 2\cdot 5}{14\cdot 10d^2} - \underset{2\cdot 2\cdot 32}{8\cdot 16d^2}; \quad 35 > 2\cdot 2d^2(35-32)$$

$$35 > 12d^2; \quad d^2 < \frac{35}{12}$$

$$d > 0$$

$$\Rightarrow d = 1$$

$$S = 7(2a_1 + 13) + 12$$

$$\begin{cases} (a_1 + 8)(a_1 + 16) > 14a_1 + 91 + 12 \\ (a_1 + 10)(a_1 + 14) < 14a_1 + 91 + 47 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 + 24a + 8\cdot 16 - 14a - 91 - 12 > 0 \\ a^2 + 24a + 10\cdot 14 - 14a - 91 - 47 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 + 10a + 25 > 0 \\ a^2 + 10a + 2 < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (a+5)^2 > 0 \\ (a+5)^2 < 23 \\ a \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$a = \frac{-10 \pm \sqrt{96}}{2} \qquad \sqrt{96} = \sqrt{48\cdot 2} = 24\cdot 4 = 6\cdot 16$$

$$a = \frac{-10 \pm 4\sqrt{6}}{2} = -5 \pm 2\sqrt{6}$$

$$\sqrt{6} \approx 2{,}4$$

$$-5 - 4{,}8$$

$$a \in [-9{,}8;$$

$$\Rightarrow a_1 = 0, \quad a_1 = -1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8, -9.$$

$$\begin{array}{r} 48 \\ \times 16 \\ \hline 128 \\ -91 \\ \hline 37 \\ -12 \\ \hline 25 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 10 \\ \times 14 \\ \hline 140 \\ -91 \\ \hline 49 \\ -47 \\ \hline 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 24 \\ \times 24 \\ \hline 96 \\ +48 \\ \hline \end{array}$$

1) если $a=-6$, то $S=\frac{-6*-6+13}{2}\cdot 14=7$.

$\begin{cases} a_9=-6+8=2 \\ a_{17}=-6+16=10 \end{cases}$

$20>7+12$

$32<7+47$ (н).

$\begin{cases} a_{11}=-6+10=4 \\ a_{15}=-6+14=8 \end{cases}$

2) если $a=-1$, то $S=7(-2+13)=77$

$a_9=-1+8=7$

$a_{17}=-1+16=15$

$a_{11}=-1+10=9$

$a_{15}=-1+14=13$

$7\cdot 15>77+12$ ✓

$9\cdot 13<77+47$.

$77+47=124$

$29 \cdot 13 = 117$

$(a_1+10)(a_1+14)<14a_1+91+47$

$91+47=138$

$a^2+24a+140-14a-138<0$

$a^2+10a+2<0$; $(a_1+5)^2-23<0$

36-60

21-90

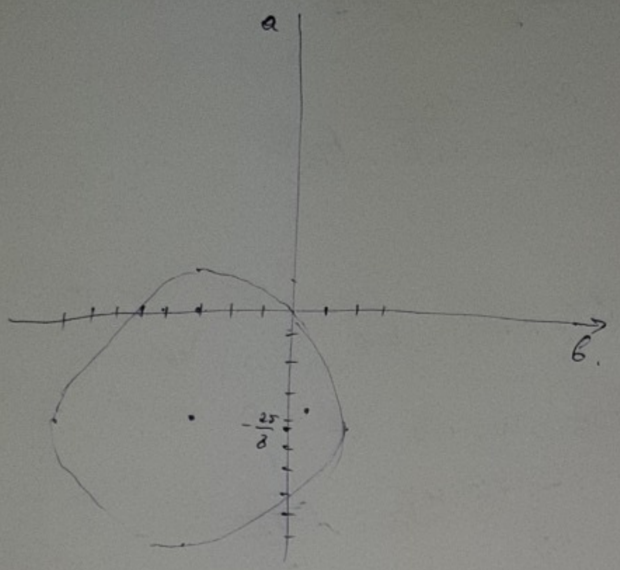
$(a+10)(a+14)<14a_1+138$

$29 \cdot 13 = 117$

-1:) $9\cdot 13<124$

21100226 (U293783 M1296643)

$a_1, a_2; a_3 \ldots \in Z$ $\quad a_1 = ?$



Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100226**

ID профиля: **293783**

Вариант 19

Вариант 19. Чистовик (1)
часть 2

Задача 4.

$$\begin{cases} НОД(a, в, c) = 21 \\ НОК(a, в, c) = 3^{17} \cdot 7^{15} \end{cases}$$

Заметим, что числа a, в, c имеют вид: $3^p \cdot 7^q$, тогда, чтобы $НОД(a, в, c) = 21$ необходимо, чтобы хотябы 1 число ~~имело~~ равнялось 21.

т.к. $НОК(a, в, c) = 3^{17} \cdot 7^{15}$, значит хотя бы одно число должно иметь множитель 3^{17} и хотябы 1 число должно иметь множитель 7^{15}.

Тогда можем разбить числа на 2 случая:

1) $3^{17} \cdot 7^x$; $7^{15} \cdot 3^y$; 21.

2) $3^{17} \cdot 7^{15}$; $3^y \cdot 7^x$; 21, где $\begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq 1 \\ x \leq 15 \\ y \leq 17 \end{cases}$

а) Найдем все возможные тройки чисел в 1 случае и умножим на кол-во перестановок (т.е. 3!):

$15 \cdot 17 \cdot 6$ (всего 15 для x и 17 для y) но случай $3^{17} \cdot 7^{15}$; $3^{17} \cdot 7^{15}$; 21 имеет не 6, а 3 перестановки, значит всего: $15 \cdot 17 \cdot 6 - 3$.

Задача 4 (продолжение) Чистовик (2)

б) найдем все возможные тройки чисел во 2 случае (исключая случай $3^{17}\cdot 7^{15};\ 3^{17}\cdot 7^{15};\ 21$) и умножим на кол-во перестановок $(3!)$:

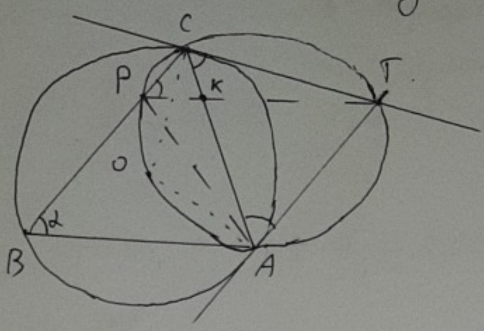
$(15\cdot 17-1)\cdot 6.$

Значит всего таких чисел:

$15\cdot 17\cdot 6-3+(15\cdot 17-1)\cdot 6=3051$

Ответ: 3051.

Задача 6 Чистовик (3)



Дано: $\triangle ABC$; CT; AT - касательные

$S_{\triangle APK}=10$ | $S_{\triangle CPK}=6$

Найти: а) $S_{\triangle ABC}$

б) AC (если $\angle ABC = \operatorname{arctg} 2$.

Решение:

1) Пусть $\angle ABC = \alpha$, тогда $\angle AOC = 2\alpha$ (центральный угол)

2) т.к. CT - касат, то $\angle ACT = \angle ABC$ (угол между касат и хордой)

3) т.к. $CT = AT$ (отрезки касательных), то $\triangle ACT$ - р/б $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle TCA = \angle TAC = \alpha$, значит $\angle CTA = 180^\circ - 2\alpha$ (в $\triangle CTA$)

4) $\angle CTA = 180^\circ - 2\alpha$, $\angle COA = 2\alpha$ | $\Rightarrow$ т.T лежит на окружности, проход через т O, т C, т A.

Значит $OPCTA$ - вписанный.

5) $\angle KPC = \angle CAT = \alpha$ (на дугу CT опираются)

6) $S_{\triangle APK} = \frac{1}{2}\cdot h\cdot AK$, $S_{\triangle CPK} = \frac{1}{2}\cdot h \cdot CK$ | $\Rightarrow \frac{CK}{AK} = \frac{S_{\triangle APK}}{S_{\triangle CPK}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

Пусть $CK = 3x$, тогда $AK = 5x$; $AC = 8x$.

7) Рассмотрим $\triangle BCA$ и $\triangle PCK$:

1) $\angle CPK = \angle CBA = \alpha$ (п. 1 и п. 5)

2) $\angle BCA$ - общий | $\Rightarrow \triangle BCA \sim \triangle PCK$, $k = \frac{CA}{CK} = \frac{8}{3}$.

$\frac{S_{\triangle BCA}}{S_{\triangle PCK}} = k^2 = \frac{64}{9} \Rightarrow S_{\triangle BCA} = 6\cdot\frac{64}{9} = \frac{128}{3}$.

Ответ на пункт а: $S_{ABC} = \frac{128}{3}$

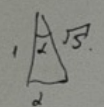
Задача 6 Чистовик (4).
(продолжение)

пункт б:

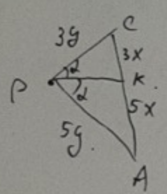
~~1) в $\triangle ABC$, по т. sin: $\frac{AC}{\sin\alpha} = 2R$ (где α = arctg 2).~~

~~2) По т. cos в $\triangle AOC$: $AC^2 = R^2 + R^2 - 2R$~~

1) $\alpha = \operatorname{arctg} 2$; $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$; $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$; $\cos 2\alpha = -\frac{3}{5}$; $\sin 2\alpha = \frac{4}{5}$.



2) Рассмотрим $\triangle APC$:



т.к. PK – бис-са, то $\frac{PC}{PA} = \frac{CK}{KA} \Rightarrow \begin{cases} PC = 3y \\ PA = 5y \end{cases}$

$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle BCK} + S_{\triangle APK} = 16$.

3) $S_{\triangle APC} = \frac{1}{2} \cdot 3y \cdot 5y \cdot \frac{4}{5} = 16 \Rightarrow 3y^2 = 8$; $y^2 = \frac{8}{3}$.

4) По т. cos: $AC^2 = 9y^2 + 25y^2 + 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot y^2 \cdot \frac{3}{5}$.

$AC^2 = 52y^2$; $AC = \sqrt{52 \cdot \frac{8}{3}}$; $AC = 2\sqrt{\frac{104}{3}}$

Ответ на пункт б: $AC = 2\sqrt{\frac{104}{3}}$.

Задача 5 Чистовик (5)

$\log_{\left(\frac{x}{2}-1\right)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)$; $\log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right)$; $\log_{\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2$

ОДЗ: $\begin{cases} \frac{x}{2}-1 \neq \pm 1 \\ \frac{x}{2}-\frac{1}{4} > 0 \\ x-\frac{4}{4} > 0 \\ x-\frac{11}{4} \neq 1 \\ \frac{x}{2}-\frac{1}{4} \neq 1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x > \frac{11}{4} \\ x \neq \frac{15}{4} \\ x \neq 4 \end{cases}$

Пусть $\frac{x}{2}-1=a$; $\frac{x}{2}-\frac{1}{4}=b$; $x-\frac{11}{4}=c$, тогда

$\frac{1}{2}\log_a b$; $2\log_c a$; $2\log_b c$

1) если $\begin{cases} 2\log_c a = \log_b c \\ \frac{1}{2}\log_a b - 2\log_b c = 1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} \frac{\log_2 c}{\log_2 a} = \frac{\log_2 b}{\log_2 c} \\ \log_a b - 4\log_b c - 2 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} \log_a b = (\log_c b)^2 \\ \log_a b - 4\log_b c - 2 = 0 \end{cases}$ $\quad$ пусть $\log_c b = t$, тогда

$t^2 - \frac{4}{t} - 2 = 0$; $t^3 - 2t - 4 = 0$.

$t = 2$.

	1	0	−2	−4
$t=2$	1	2	2	0

$t^2+2t+2=0$

$D<0 \Rightarrow t \notin R$

Значит $t=2 \Rightarrow \log_c b = 2 \Rightarrow c^2 = b$.

$\left(x-\frac{11}{4}\right)^2 = \frac{x}{2}-\frac{1}{4}$; $x^2 - \frac{11}{2}x + \frac{121}{16} = \frac{x}{2} - \frac{2}{16}$; $x^2 - 6x + \frac{123}{16} = 0$.

$D = 36 - \frac{123}{4} = \frac{21}{4}$.

$x = \frac{6 \pm \frac{\sqrt{21}}{2}}{2}$; $x = 3 \pm \frac{\sqrt{21}}{4}$, с учетом ОДЗ:

$x = 3 + \frac{\sqrt{21}}{4}$

Остальные случаи невозможны.

Ответ: $x = 3 + \frac{\sqrt{21}}{4}$

$3^{17}\cdot 7^{a}$; $7^{15}\cdot 3^{b}$; $7\cdot 3$.

$15\cdot 17\cdot 6$

$3^{17}\cdot 7^{15}$; $3^{x}\cdot 7^{y}$; $3\cdot 7$.

$(15\cdot 17-1)\cdot 6$.

$15\cdot 17\cdot 6+(15\cdot 17-1)\cdot 6=6\cdot(15\cdot 17+15\cdot 17-1)=$

$=6\cdot 509=3054$.

$$\begin{array}{r} \times\ 509 \\ 6 \\ \hline 3054 \end{array}$$

---

1) $3^{17}\cdot 7^{a}$; $7^{15}\cdot 3^{b}$; $7\cdot 3$.

$(17\cdot 15-1)\cdot 6+3$.

a a b
a b a
b a a

2) $3^{17}\cdot 7^{15}$; $3^{a}\cdot 7^{b}$; $3\cdot 7$.

$(15\cdot 17-1)\cdot 6$.

$(17\cdot 15-1)\cdot 6\cdot 2+3=254\cdot \cancel{8}\,12+3=\cancel{20}\ 3051$.

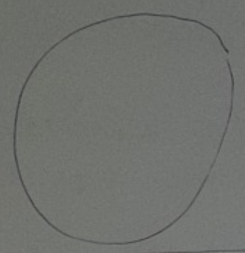
$$\begin{array}{r} \times\ 254 \\ 8 \\ \hline 2032 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times\ 254 \\ 12 \\ \hline +\ 508 \\ 254 \\ \hline 3048 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times\ 255 \\ 12 \\ \hline +\ 510 \\ 255 \\ \hline 3060 \end{array}$$

21100226 (U293783 M1296644)

Пусть $KC = 3x$; $AK = 5x$.

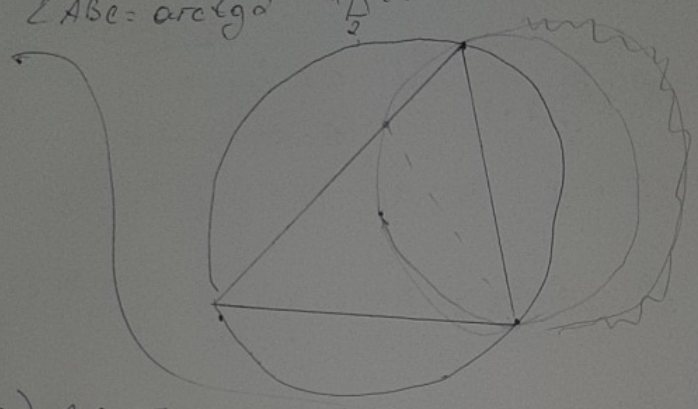


1) $\triangle PKC \sim \triangle BAC$.

$k = \frac{KC}{AC} = \frac{3}{8} = \frac{6}{16}$.

$\frac{S_{ABC}}{S_{PKC}} = \frac{9}{64}$, $S_{ABC} = \frac{64 \cdot 6}{9} = \frac{64 \cdot 2}{3} = \frac{128}{3}$

$\angle ABC = \operatorname{arctg} 2$ $\quad 1, 2, \sqrt{5}$.



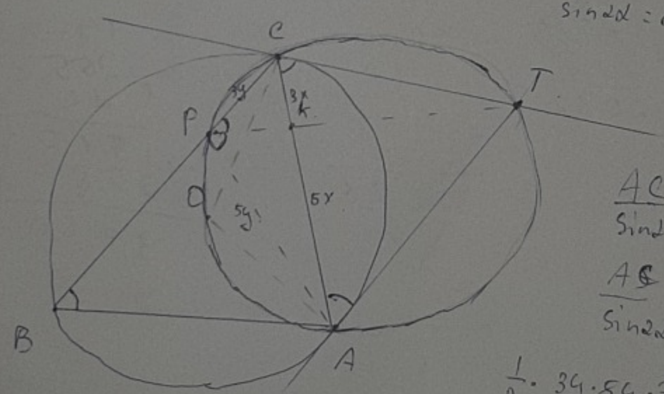
1) $\frac{AC}{\sin\alpha} = 2R$

$R^2 + R^2 - 2R^2 \cdot \cos 2\alpha = AC^2$

$\boxed{\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \cos 2\alpha = \frac{1}{5} - \frac{4}{5} = -\frac{3}{5}}$

2) $\frac{AC \cdot \sqrt{5}}{2} = 2R$

$\sin 2\alpha = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{4}{5}$



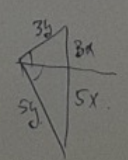
$\frac{AC}{\sin\alpha} = 2R_1$

$\frac{AC}{\sin 2\alpha} = 2R_2$

$\frac{1}{2} \cdot 3y \cdot 5y \cdot \frac{4}{5} = 16$

$3y^2 = 8$

$\cancel{3y \cdot 5}\ R_2 = \frac{3y \cdot 5y \cdot AC}{4 \cdot 16}$



НОД $(a,b,c)=21=3\cdot 7$.
НОК $(a,b,c)=3^{17}\cdot 7^{15}$.

$a\cdot b\cdot c=3^{13}\cdot 7^{16}$.

НОД $=3\cdot 7$ Значит каждое число делится на 3 и на 7.

НОК $=3^{17}\cdot 7^{15}$. – Значит одно из чисел имеет либо 7^{15} либо 3^{17} в разложении.

~~$3\cdot 7$ 3^2 7^2 3^{14} 7^{12}~~

$3^{17}\cdot 7^a$; $7^{15}\cdot 3^b$; $3^c\cdot 7^d$

$a\leq 15$; $b\leq 17$; $c\leq 17$; $d\leq 15$.
$a\geq 1$ $b\geq 1$ $c\geq 1$ $d\geq 1$

~~15 · 17 есть~~ При этом одно из чисел $21=7\cdot 3$

Значит числа имеют вид: $3^{17}\cdot 7^a$; $7^{15}\cdot 3^b$; $3\cdot 7$.

$a\leq 15$ $b\leq 17$
$a\geq 1$ $b\geq 1$

$15\cdot 17\cdot 6$

но если взять $3^{17}\cdot 7^{15}$; $3^x\cdot 7^y$; $3\cdot 7$
$15\cdot 17$

$(15\cdot 17-1)\cdot 6$

$$\begin{array}{r} 15 \\ \times 17 \\ \hline 105 \\ +15 \\ \hline 255 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 255 \\ \times 2 \\ \hline 510 \end{array}$$

~~$15\cdot 17+15\cdot 17-1=$~~ $=509$

~~Ответ: 255.~~ $6\cdot(15\cdot 17+15\cdot 17-1)=6\cdot 509=3054$

Ответ: ~~509~~ 3054.

21100226 (U293783 M1296644)

№5

$\log_{(\frac{x}{2}-1)^2}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)$; $\log_{\sqrt{x-\frac{11}{4}}}\left(\frac{x}{2}-1\right)$; $\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)^2$.

ОДЗ: $\begin{cases} \frac{x}{2}-1 \neq \pm 1 \\ \frac{x}{2}-\frac{1}{4} > 0 \\ x-\frac{11}{4} > 0 \\ x-\frac{11}{4} \neq 1 \\ \frac{x}{2}-\frac{1}{4} \neq 1 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{x}{2} \neq 0 \\ \frac{x}{2} \neq 2 \\ x > \frac{1}{2} \\ x > \frac{11}{4} \\ x \neq \frac{15}{4} \\ \frac{x}{2} = \frac{5}{4} \end{cases}$ $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 4 \\ x > \frac{11}{4} \\ x \neq \frac{15}{4} \end{cases}$

$x \neq 2{,}5$

$\frac{1}{2} \cdot \cancel{1}0$ пусть $\frac{x}{2}-1 = a$; $\frac{x}{2}-\frac{1}{4} = b$; $x-\frac{11}{4} = c$.

$\frac{1}{2}\log_a b$; $2\log_c a$; $2\log_b c$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{\log_2 b}{\log_2 a}$; $2 \frac{\log_2 a}{\log_2 c}$; $\frac{2\log_2 c}{\log_2 b}$

$\frac{\log_2 c}{\log_2 a} = \frac{\log_2 b}{\log_2 c}$

$\log_c a = \log_b c$.

$\frac{\log_2 a}{\log_2 c} = \frac{\log_2 c}{\log_2 b}$.

$\cancel{\log_a b \cdot \frac{\log_2 c}{\log_2 b} = \log}$

$\log_a b \cdot \log_2 \cancel{c} = \left(\frac{\log_2 b}{\log_2 c}\right)^2$

$\log_a b = (\log_c b)^2$.

$+\begin{array}{r} 36 \\ 4 \\ \hline 144 \\ -123 \\ \hline 21 \end{array}$

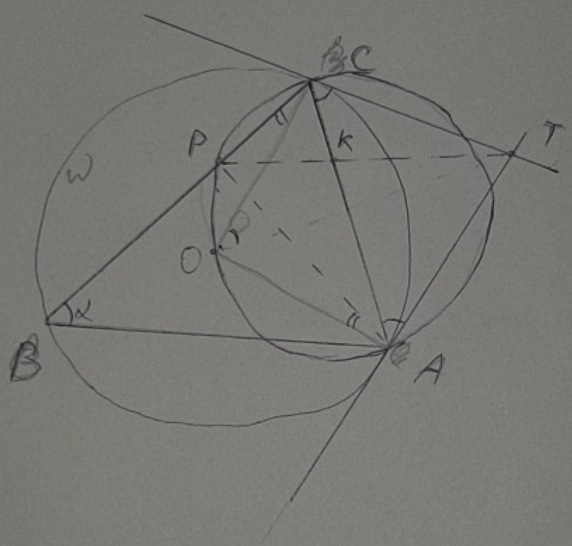
$D = 36 - \frac{123}{4} = \frac{21}{4}$.

1) $\begin{cases} \frac{1}{2}\log_a b = 2\log_c a \\ 2\log_b c - 2\log_c a = 1 \end{cases}$ $\frac{\log_2 b}{\log_2 a} = 4\cdot\frac{\log_2 a}{\log_2 c}$

$\log_2^2 a^4 = \log_2 b \cdot \log_2 c$

$S_\Delta APK = 10$; $S_\Delta CPK = 6$; $S_\Delta ABC = ?$

$AK = 5y$; $CK = 3y$



$\begin{array}{r} 34 \\ +\ 18 \\ \hline 52 \end{array}$

$\angle CPA = 2\alpha$; $\angle CTA = 180° - 2\alpha \Rightarrow AOPCT$ – вписанный

Значит T лежит на окр.

$3y^2 = 8$; $y^2 = \frac{8}{3}$

$AC^2 = 9y^2 + 25y^2 + 2\cdot 3y\cdot 5y\cdot\frac{3}{5}$

$AC^2 = 52y^2$

$AC^2 = 52\cdot\frac{8}{3}$

$\begin{array}{r} 9 \\ +\ 25 \end{array}$ $\begin{array}{r} 34 \\ +\ 18 \\ \hline 52 \end{array}$

$$\begin{cases} \dfrac{AC\cdot\sqrt5}{2} = 2R \\ 2R^2 + 2R^2\cdot\dfrac{3}{5} = AC^2 \end{cases}$$

$AC^2 = \dfrac{16R}{\cancel{5}}$

$2R^2 + 2R^2\cdot\dfrac{3}{5} = \dfrac{\overset{6}{\cancel{16}}R}{5}$

AC.

$\dfrac{\cancel{AC}\cdot\sqrt5}{2}\cdot\dfrac{AC\cdot\sqrt5}{4} + \dfrac{\cancel{AC\cdot\sqrt5}}{2}\cdot\dfrac{3}{5} = AC^{\cancel{2}}$

$\dfrac{AC\cdot5}{8} + \dfrac{3}{2\sqrt5} = AC;\quad AC\left(1-\dfrac{5}{8}\right) = \dfrac{3\sqrt5}{10}$

$AC\cdot\dfrac{3}{8} = \dfrac{3\sqrt5}{10};\quad AC = \dfrac{4\sqrt5}{5}$

$R = \dfrac{4\sqrt5\cdot\sqrt5}{5\cdot2} = 2R \Rightarrow R = 1$ ~~AC·√5~~

$R = \dfrac{abc}{4S}$

$\dfrac{1}{2}\cdot BC\cdot AB\cdot\dfrac{2}{\sqrt5} = \dfrac{128}{3}$

$BC\cdot AB = \dfrac{\sqrt5\cdot128}{3}$

$1 = \dfrac{\sqrt5\cdot\frac{\cancel{128}}{\cancel{3}}\cdot\frac{4\sqrt5}{5}}{4\cdot\frac{\cancel{128}}{\cancel{3}}}$

$S\ \dfrac{128}{3} = \dfrac{1}{\cancel{2}}\cdot a\,b\cdot\dfrac{\cancel{2}}{\sqrt5}$

$ab = \dfrac{128\sqrt5}{3}$

21100226 (U293783 M1296644)