Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21100013**

ID профиля: **333364**

Вариант 19

Чистовик ВАРИАНТ 19

ЧАСТЬ 1

№1

$$S=\frac{a_1+a_1+13b}{2}\cdot 14 \quad \left|\begin{array}{l} b\in N \\ a_1\in Z\end{array}\right.$$

$$\begin{cases}(a_1+8b)(a_1+16b) > 7(a_1+a_1+13b)+12 \\ (a_1+10b)(a_1+14b) < 7(a_1+a_1+13b)+47\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_1^2+8ba_1+16ba_1+128b^2 > 14a_1+91b+12 \quad (1) \\ a_1^2+10ba_1+14ba_1+140b^2 < 14a_1+91b+47 \quad (2)\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_1^2+24ba_1+128b^2 > 14a_1+91b+12 \quad \Big|\cdot(-1) \\ a_1^2+24ba_1+140b^2 < 14a_1+91b+47\end{cases}$$

$$\begin{cases}-a_1^2-24ba_1-128b^2 < -14a_1-91b-12 \\ a_1^2+24ba_1+140b^2 < 14a_1+91b+47\end{cases} \oplus$$

$$12b^2 < 35$$

$$\left.\begin{array}{l} b^2 < \frac{35}{12} \\ b\in N\end{array}\right| \Rightarrow b=1$$

(1): $a_1^2+24a_1+128 > 14a_1+91+12$

$a_1^2+24a_1+128 > 14a_1+103$

$a_1^2+10a_1+25 > 0$

$(a_1+5)^2 > 0 \Rightarrow a_1 \neq -5$

Чистовик

(2): $a_1^2 + 24a_1 + 140 < 14a_1 + 91 + 47$

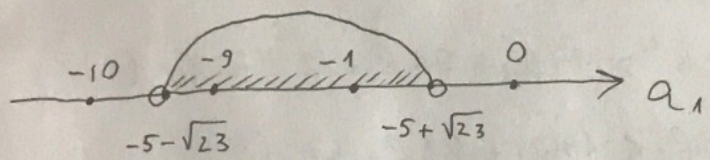
$a_1^2 + 10a_1 + 140 - 91 - 47 < 0$

$a_1^2 + 10a_1 + 140 - 138 < 0$

$a_1^2 + 10a_1 + 2 < 0$

$D = 100 - 8 = 92 = 4 \cdot 23$

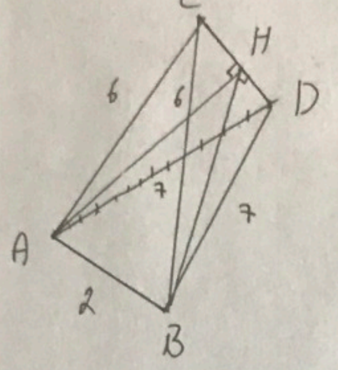
$a_1 = \frac{-10 \pm 2\sqrt{23}}{2} = -5 \pm \sqrt{23}$

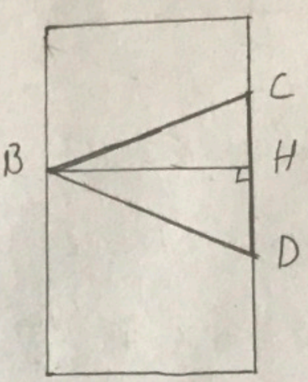


Ответ: $a_1 = -9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1$

Чистовик

№2





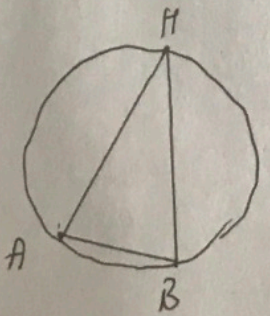
Пусть $H \in (CD)$; $\begin{cases} AH \perp CD \\ BH \perp CD \end{cases}$, такая точка H существует

в силу равенства $\triangle ACD = \triangle BCD$ по 3 сторонам.

Точка H принадлежит боковой пов-ти цилиндра,

причем $\left. \begin{matrix} AH \perp CD \\ BH \perp CD \end{matrix} \right| \Rightarrow (ABH) \perp CD$

Итак, $\triangle ABH$ лежит в плоскости, перпендикулярной образующим цилиндра; все его ~~...~~ вершины принадлежат бок. пов-ти цилиндра $\Rightarrow$ $\triangle ABH$ вписан в окр-ть, являющуюся поперечным сечением цилиндра.

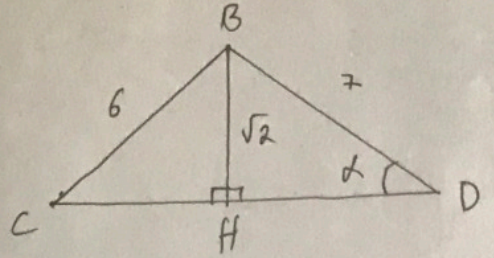


По т. синусов $2r = \dfrac{AB}{\sin\angle AHB} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ радиус минимален при $\angle AHB = 90^\circ$

$AH = HB$ (т.к. $\triangle ACD = \triangle BCD$) $= \dfrac{AB}{\sqrt{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

Чистовик



Пусть $\angle BDH = \alpha$

$$\sin\alpha = \frac{BH}{BD} = \frac{\sqrt{2}}{7} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{1-\frac{2}{49}} = \frac{\sqrt{47}}{7}$$

По т. косинусов для $\triangle CBD$: $CB^2 = CD^2 + BD^2 - 2\,CD\cdot BD\cdot\cos\alpha$

Пусть $CD = x$

$$36 = x^2 + 49 - 2\cdot x\cdot \cancel{7}\cdot\frac{\sqrt{47}}{\cancel{7}}$$

$$x^2 - 2x\sqrt{47} + 13 = 0$$

$$D = 4\cdot 47 - 13\cdot 4 = 188 - 52 = 136 = 4\cdot 34$$

$$x_{12} = \frac{2\sqrt{47} \pm 2\sqrt{34}}{2} = \sqrt{47} \pm \sqrt{34}$$

Ответ: $CD = \sqrt{47} \pm \sqrt{34}$

Чистовик

№3

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 25 & (1) \\ a^2+b^2 \le \min(-8a-6b\,;25) & (2) \end{cases}$$

Выясним, какие a и b удовлетворяют нер-ву (2)

1) $\min(-8a-6b, 25) = 25$; $a^2+b^2 \le 25$

$25 < -8a-6b$

$8a+6b < -25$

$b < \frac{-25-8a}{6}$

$b < -\frac{4}{3}a - \frac{25}{6}$

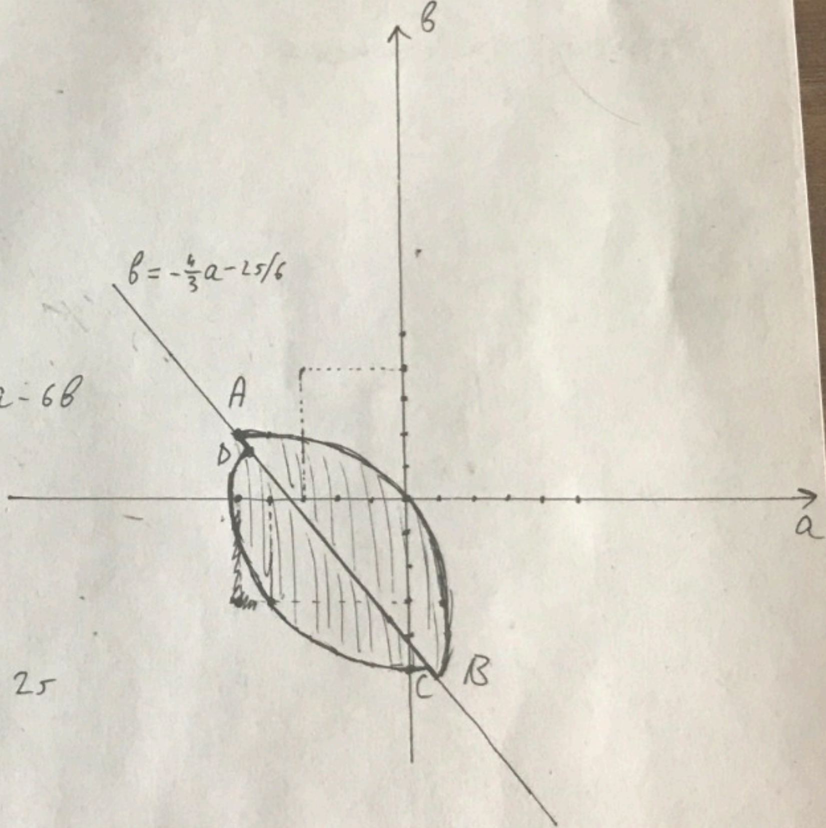
2) $\min(-8a-6b; 25) = -8a-6b$

$a^2+b^2 \le -8a-6b$

$a^2+8a+b^2+6b \le 0$

$a^2+8a+16+b^2+6b+9 \le 25$

$(a+4)^2+(b+3)^2 \le 25$



Теперь посмотрим на нер-во (1) каждая из полученных пар (a; b) соответствует координатам $(x_ц; y_ц)$ окружностей, которые получаются в уравн нер-ве 1

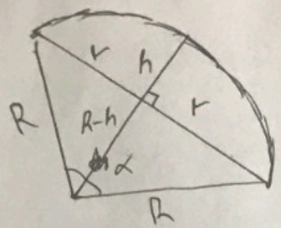
Фигура, полученная в результате решение системы будет аналогична фигуре, полученной нами выше, только

Страница 5

Чистовик

радиусы дуг окружностей будут на 5 больше чем у построенной фигуры, т.е равны 10. Площадь будет в 4 р. больше (т.к. $S \sim R^2$)

Выведем ф-лу площади сегмента круга



$$S = \pi R^2 \cdot \frac{\alpha}{360°} - \frac{1}{2}(R-h)\cdot 2r$$

~~$S_1 + S_2 = \pi R^2 \frac{\alpha_1+\alpha_2}{360°} = $~~

~~Найдем координаты точек~~

№3 Черновик

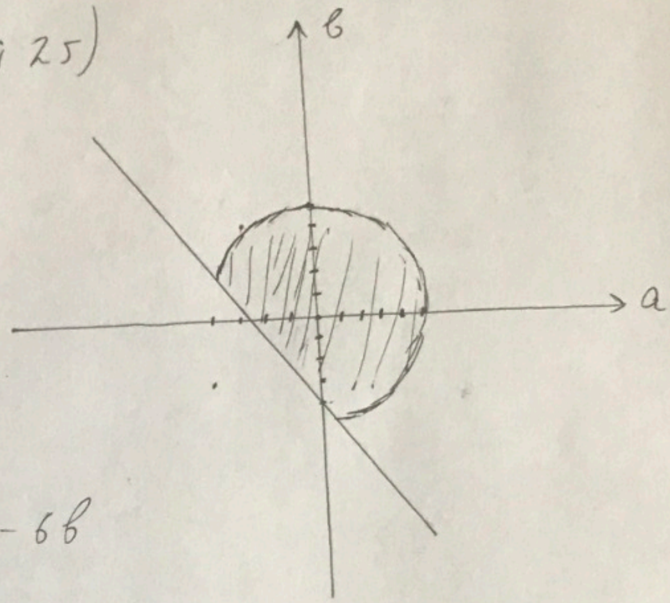
$a^2+b^2 \leq \min(-8a-6b; 25)$

1) $-8a-6b > 25$

$8a+6b < -25$

$b < \frac{-25-8a}{6}$

$b < -\frac{8}{6}a - \frac{25}{6}$



2) $a^2+b^2 \leq -8a-6b$

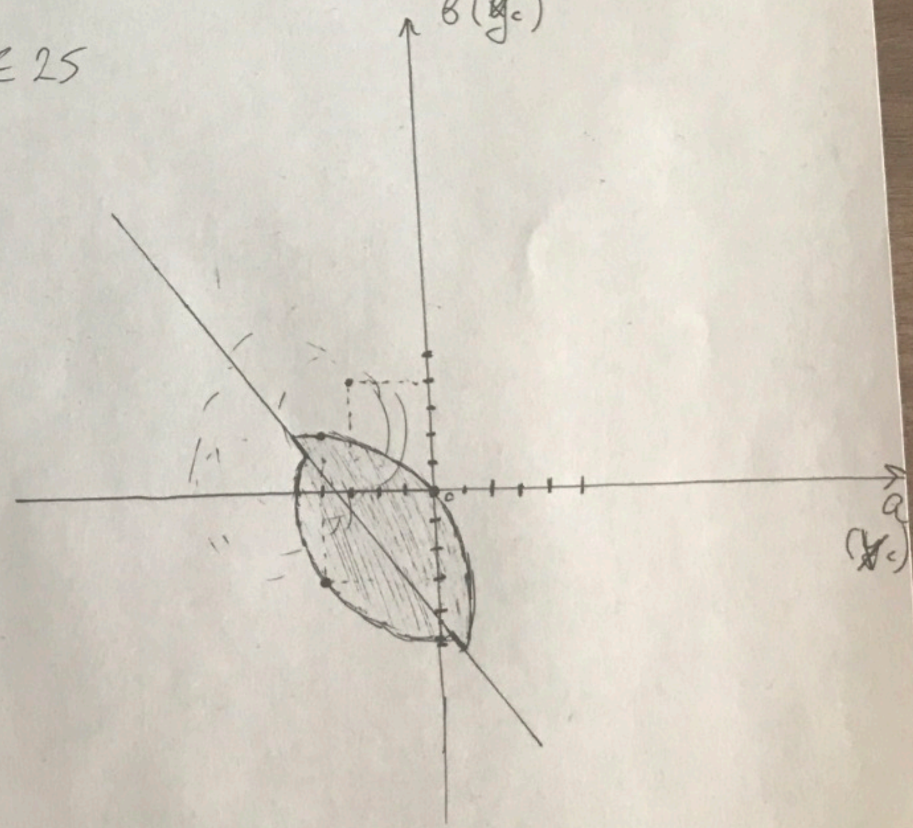
$a^2+8a+b^2+6b \leq 0$

$a^2+8a+16+b^2+6b+9 \leq 25$

$(a+4)^2+(b+3)^2 \leq 25$

$a = x_c$

$b = y_c$



21100013 (U333364 M1295991)

Черновик

$$S = \frac{a_1 + a_1 + 13b}{2} \cdot 14 \quad \left| \begin{array}{l} b > 0 \\ b \in N \\ a_1 \in Z \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} (a_1 + 8b)(a_1 + 16b) > 7(a_1 + a_1 + 13b) + 12 \\ (a_1 + 10b)(a_1 + 14b) < 7(2a_1 + 13b) + 47 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 8ba_1 + 16ba_1 + 128b^2 > 14a_1 + 91b + 12 \quad (1) \\ a_1^2 + 10ba_1 + 14ba_1 + 140b^2 < 14a_1 + 91b + 47 \quad (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 24ba_1 + 128b^2 > 14a_1 + 91b + 12 \quad | \cdot (-1) \\ a_1^2 + 24ba_1 + 140b^2 < 14a_1 + 91b + 47 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -a_1^2 - 24ba_1 - 128b^2 < -14a_1 - 91b - 12 \\ a_1^2 + 24ba_1 + 140b^2 < 14a_1 + 91b + 47 \end{cases} \Bigg) \oplus$$

$$12b^2 < 35$$

$$\left. \begin{array}{l} b^2 < \frac{35}{12} \\ b \in N \end{array} \right| \Rightarrow b = 1$$

$$(1): a_1^2 + 8a_1 + 16a_1 + 128 > 14a_1 + 91 + 12$$

$$a_1^2 + 24a_1 + 128 > 14a_1 + 103$$

$$a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0$$

$$(a_1 + 5)^2 > 0 \Rightarrow a_1 \neq -5$$

Черновик

(2): $a_1^2 + 24a_1 + 140 < 14a_1 + 91 + 47$

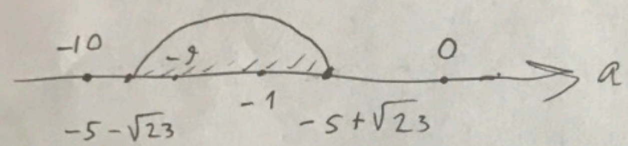
$a_1^2 + 10a_1 + 140 - 91 - 47 < 0$

$a_1^2 + 10a_1 + 140 - 138 < 0$

$a_1^2 + 10a_1 + 2 < 0$

$D = 100 - 8 = 92 = 4 \cdot 23$

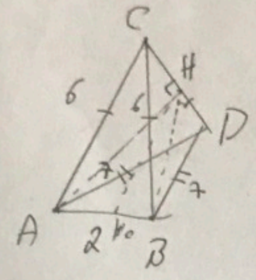
$a = \frac{-10 \pm 2\sqrt{23}}{2} = -5 \pm \sqrt{23}$

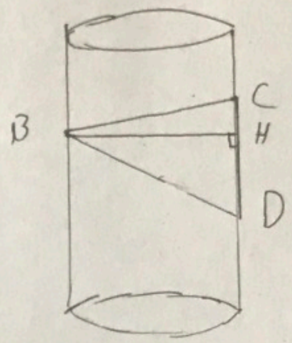


Ответ: $a_1 = -9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1$

Черновик

№2





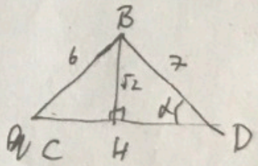
$AB = 2$

$AH = BH = x$

$$V = \frac{S_{AHB}}{AH + \frac{AB}{2}} = \frac{S(AHB)}{AH+1} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 2\cdot HH_0}{AH+1} = \frac{HH_0}{AH+1}$$

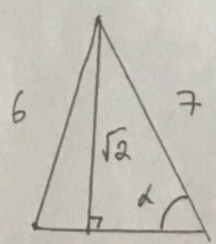
$$2r = \frac{AB}{\sin\angle AHB} \to \min \Rightarrow \angle AHB = 90^\circ$$

$136 \,|\, 47$ $\quad AH = BH = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ $\quad \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{7}$



$\cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \frac{2}{49}} = \frac{\sqrt{47}}{7}$

$47 \times 4 = 188$



$136 \,|\, 4$: $\ 12$, 16, 34

2

$47 \times 4 = 188$

$188 - 52 = 136$

$$36 = 49 + x^2 - \cancel{14}^{\,2} x \cdot \frac{\sqrt{47}}{\cancel{7}}$$

$$13 + x^2 - 2x\sqrt{47} = 0$$

$$x^2 - 2x\sqrt{47} + 13 = 0$$

$$D = 4\cdot 47 - 52 =$$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21100013**

ID профиля: **333364**

Вариант 19

Чистовик ВАРИАНТ 19

№4

$$\begin{cases} НОД(a; b; c) = 21 \\ НОК(a; b; c) = 3^{17} \cdot 7^{15} \end{cases}$$

Из этой системы следует, что:

1) все числа раскладываются на произведение троек и семерок, причем в каждом числе есть хоть одна 3 и хоть одна 7

2) макс. степень вхождения тройки – 17; семерки – 15, есть число в кот-ом только одна тройка и число, в кот-ом только одна семерка (могут совпасть)

Составим таблицу:

	кол-во 7	кол-во 3
a	15	17
b	1	1
c	≤ 15	≤ 17

Каждое число в этой таблице может „перемещаться" только по вертикали.

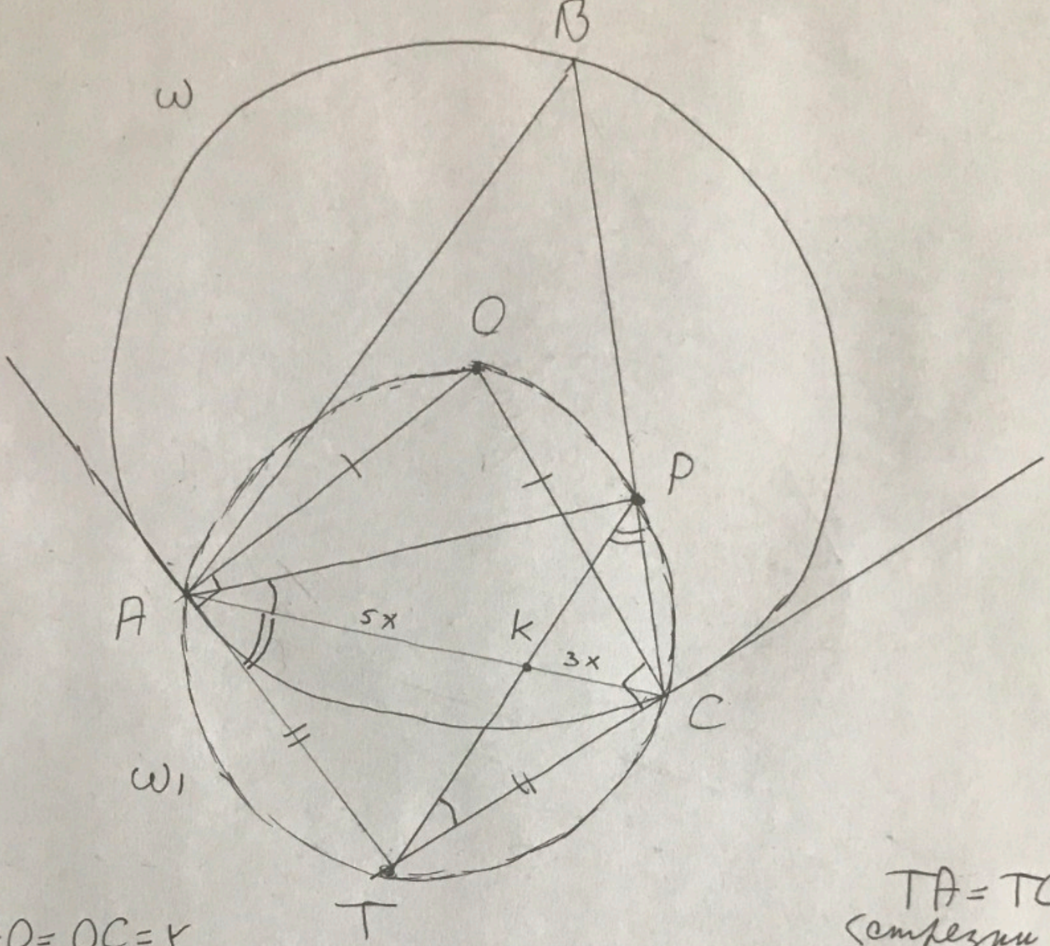
Кол-во вариантов:

$15 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 17 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 36 \cdot 15 \cdot 17 =$
$= 9180$

Ответ: 9180

Шестовик

№6



$AO = OC = r$

$TA = TC$
(отрезки кас-ых)

$AOCT$: $\angle TAO = \angle OCT = 90^\circ \Rightarrow AOCT$ - вписанный $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ т. $T \in \omega_1$

$$\frac{S_{CPK}}{S_{APK}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} = \frac{CK}{AK}$$

$$(AB) \parallel (TP) \Rightarrow \triangle KPC \sim \triangle ABC = \frac{S_{ABC}}{S_{KPC}} = \left(\frac{AC}{KC}\right)^2 = \frac{64}{9}$$

$$S_{ABC} = \frac{64}{9} \cdot 6 = \frac{64 \cdot 2}{3} = \frac{128}{3}$$

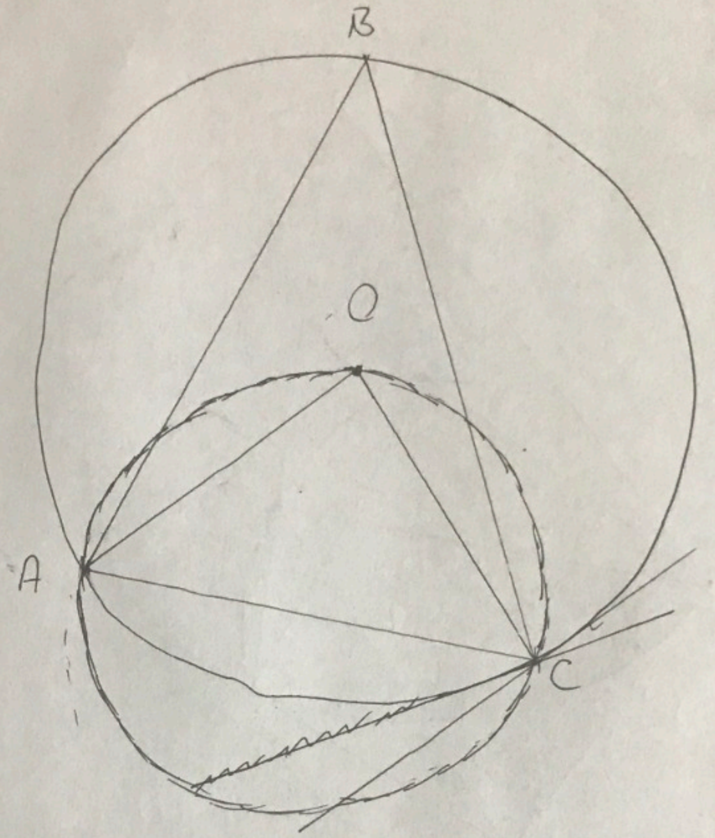
Ответ: $S_{ABC} = \frac{128}{3}$

Страница 2

21100013 (U333364 M1295992)

Черновик

№6



Черновик

a	b	c
3.7		
$3^2 \cdot 7$.		

$$\frac{PC}{BC} \cdot \frac{KC}{AC} = \frac{\cancel{8}6}{S}$$

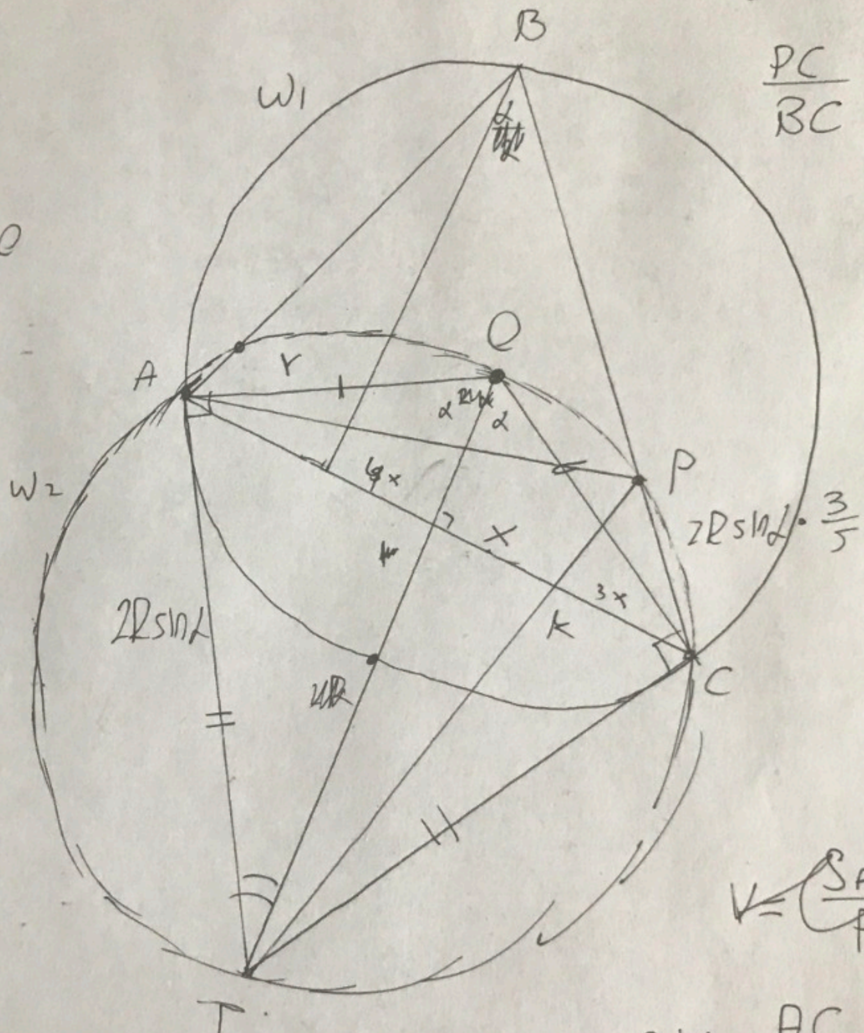
$\frac{3}{5}$

$$\frac{PC}{BC} = \frac{16}{\cancel{8}S}$$

$S_{APK} = 10$

$C_{CPK} = 6$

$R_1 = R_2$



$V = \frac{S_{ABC}}{p}$

$$2r_{\omega_1} = \frac{AC}{\sin\alpha}$$

$$2r_{\omega_2} = \frac{AC}{\sin 2\alpha}$$

$$2r = \frac{AC}{\sin 2\alpha}$$

$$2r = \frac{8x}{\sin\alpha} = P$$

$$\frac{r_{\omega_2}}{r_{\omega_1}} = \frac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{1}{2\cos\alpha} \Rightarrow r_{\omega_1} = 2r_{\omega_2}\cos\alpha$$

Чертович

a	b	c
$3\cdot7$		
$3\cdot7^2$		

$3\cdot7^3$

...

$3\cdot7^{15}$

~~$3^2\cdot7^{15}$~~

$3^2, 7$

$3^2\ldots$

...

$3^2\cdot7^{15}$

1) $\frac{1}{2}\log_{\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)^2 = 2\log_{x-\frac{11}{4}}\left(\frac{x}{2}-1\right)$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(\frac{x}{2}-1\right)}$

1) $3\cdot7$ $\Rightarrow$ в 2-х из 3-х есть ~~все~~ тройки, ~~частную~~ ~~простых~~

в 3-м +км

$\Rightarrow$ что угадов 2-х в 3-м больше много

$\downarrow$

в 2-х из 3х-х есть 7-ки

в эти 3-ки

Черновик

	7	3
a	15	17
в	1	1
б	≤15	≤17

1

17

15

$$\frac{1}{2}\log_{\left(\frac{x}{2}-1\right)}\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)$$

$$2\log_{x-\frac{11}{4}}\left(\frac{x}{2}-1\right)$$

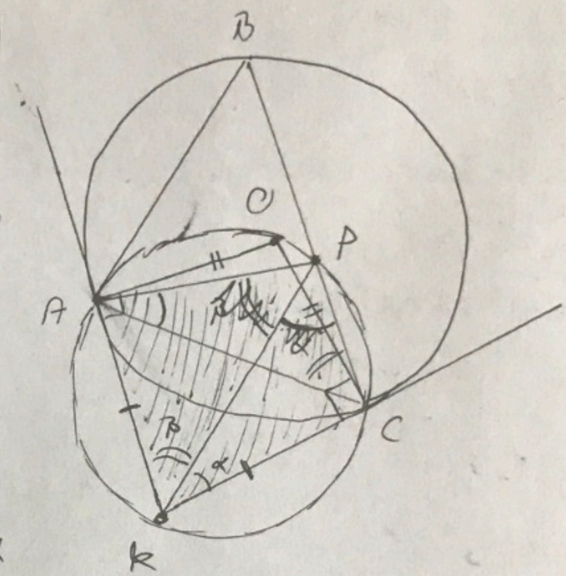
$$2\log_{\frac{x}{2}-\frac{1}{4}}\left(x-\frac{11}{4}\right)$$

15.

3777

$S_{APK}=10$

$S_{CPK}=6$



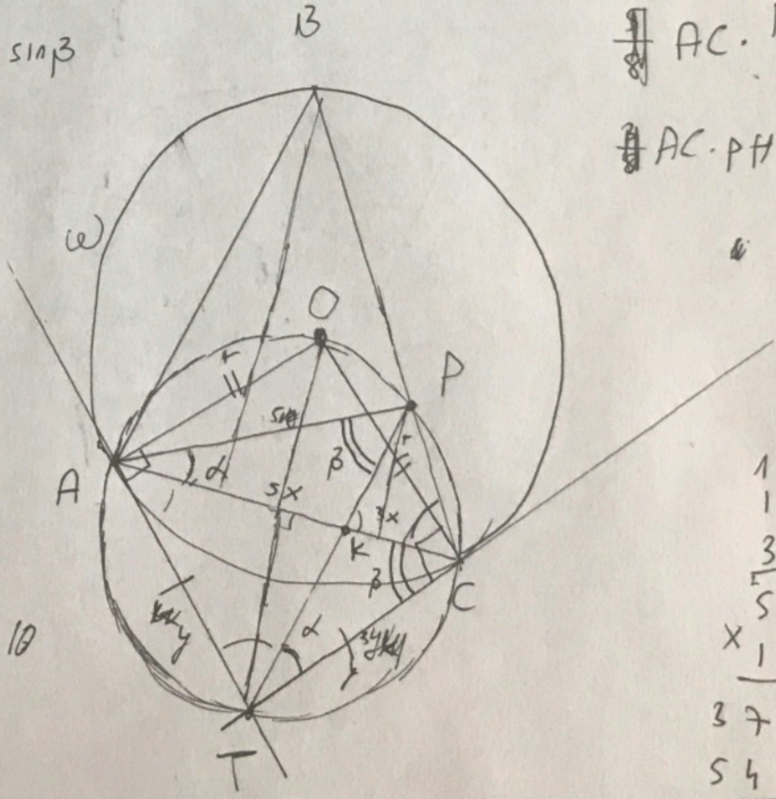
$(4x)^2=$

$S_{CPK}=\frac{1}{2}CK\cdot PK\cdot\sin\alpha$

$S_{APK}=\frac{1}{2}AK\cdot PK\cdot\sin\beta$

$\frac{1}{2}AC\cdot PH=10$

$\frac{1}{2}AC\cdot PH=16$



$S_{CPK}=\ldots S_{APC}$

$S_{APK}=\ldots S_{APC}$

$S_{CPK}=\frac{CK}{AC}S_{APC}=6$

$S_{APK}=\frac{AK}{AC}\cdot S_{APC}=10$

$\frac{CK}{AK}=\frac{3}{5}$

$$\begin{array}{r} 36 \\ \times\ 15 \\ \hline 180 \\ 36 \\ \hline 540 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 540 \\ \times\ 17 \\ \hline 378 \\ 54 \\ \hline 9180 \end{array}$$

Черновик

$$\begin{cases} \text{НОД}(a;b;c) = 21 \\ \text{НОК}(a;b;c) = 3^{17} \cdot 7^{15} \ (2) \end{cases}$$

(2): все числа вида $3^x 7^y$; $x, y \in N$

$\max(x_1; x_2; x_3) = 17$

$\max(y_1; y_2; y_3) = 15$

(1): 3·7 – единственные общие множители в разложении

$a = 3 \cdot 7 \cdot 3^{x-1} \cdot 7^{y-1}$ 37..

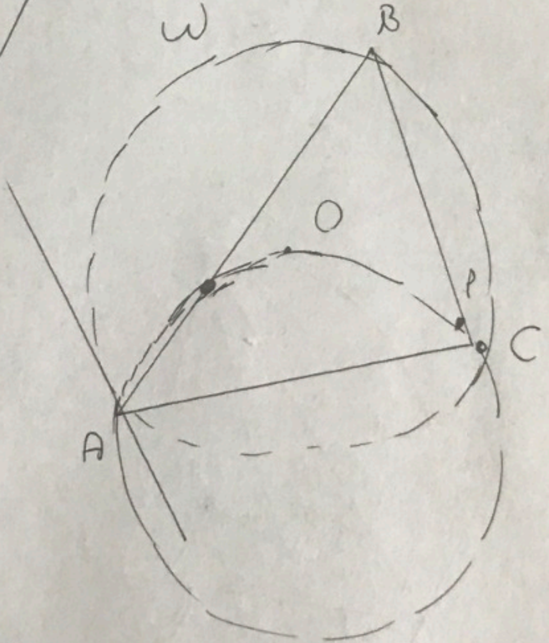
$b = 3 \cdot 7 \cdot 3^{x} \cdot 7^{y}$ 373..

$c = 3 \cdot 7$

3·7·33333

3·7 777773

3·7 7777



21100013 (U333364 M1295992)