Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21105031**

ID профиля: **276348**

Вариант 18

ЧИСТОВИК

№ 3

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 5\\ a^2+b^2\le \min(4a-2b,5)\end{cases}$$

ЗАМЕТИМ, ЧТО ВТОРОЕ УСЛОВИЕ ОГРАНИЧЕВАЕТ ТОЛЬКО a И b, Т.Е НЕ ЗАВИСИТ И НЕЗАДАЕТ ЗНАЧЕНИЙ x И y.

ЗАМЕТИМ, ЧТО ЕГО ТАКЖЕ МОЖНО ЗАПИСАТЬ КАК

$$\begin{cases}a^2+b^2\le 5\\ a^2+b^2\le 4a-2b\end{cases}$$, ТК ЕСЛИ $a^2+b^2\le\min(i;j)$, ТО $a^2+b^2\le i$ И $<j$

~~$a^2+b^2\le 5$ - КРУГ С ЦЕНТРОМ (0;0) В ПЛОСКОСТИ С ВЕКТОРАМИ a И b~~

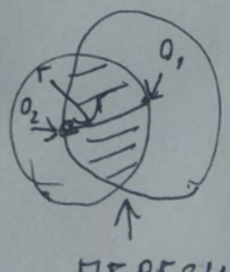
РАССМОТРИМ ГМТ ОБЛАСТЕЙ НА ПЛОСКОСТИ С КОРДИНАТАМИ, СООТВЕТСТВУЮЩИМИ ЗНАЧЕНИЯМ a И b СООТ.

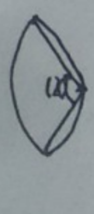
$a^2+b^2\le 5$ - КРУГ С ЦЕНТРОМ (0;0) И $r=\sqrt{5}$

$a^2+b^2\le 4a-2b \Leftrightarrow a^2-4a+b^2+2b\le 0 \Leftrightarrow a^2-4a+4+b^2+2b+1\le 5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a-2)^2+(b+1)^2\le 5$, $\Rightarrow$ ГМТ - КРУГ С ЦЕНТРОМ (2;-1) И

ЗАМЕТИМ, ЧТО НАС ИНТРЕСУЕТ ~~ОБЪЕДИНЕНИЕ~~ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ЭТИХ МНОЖЕСВ, ВЫПОЛНЯЮТСЯ ОБА НЕРАВЕНСТВА. ТАКЖЕ ЗАМЕТИМ, ЧТО КВАДРАТ РАССТО МЕЖДУ ЦЕНТРАМИ КРУГОВ - $(0-2)^2+(0-(-1))^2=5$, ЧТО РАВНО КВАДРАТУ РАДИУСОВ $\Rightarrow$ ПЕРЕСИЧЕНИЕ ВЫГЛЯДИТ ТАК:





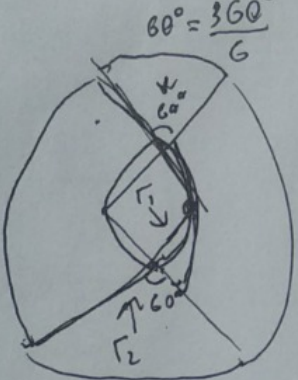
$\angle 120^\circ = \boxed{\frac{1}{3}\cdot 360^\circ}$

ЧИСТОВИК

ВЕРНЕМСЯ К ДРУГОМУ УСЛОВИЮ. СТР 2 ИЗ 5

$(x-a)^2+(y-b)^2\le 5.$

ЭТО ВЫГЛЯДИТ КАК ЗАДАЧА ПРО КОЗУ, КОТОРАЯ СЪЕДАЕТ ВСЮ ТРАВУ КОТОРУЮ МОЖЕТ И ПРИВЯЗАНА К ЖЕРДОЧКЕ ВЕРЕВКОЙ ДЛИНЫ r, ПРИ ЭТОМ САМА ЖЕРДОЧКА МОЖЕТ ПЕРЕМЕЩАТЬСЯ В ИЗВЕСТНОЙ ОБЛАСТИ. Т.Е. ЕСЛИ МЫ ВОТКНЕМ ЖЕРДОЧКИ С КОЗАМИ ВО ВСЕ ТОЧКИ, ГДЕ МОЖЕТ ОКАЗАТЬСЯ ИСХОДНАЯ ЖЕРДОЧКА, ТО ОНИ СЪЕДЯТ ТУ ЖЕ ОБЛАСТЬ.



r_1+r_2 $\quad$ 120 $\quad$ r_2 $\quad$ 60° $\quad$ S_2 $\quad$ r_1

$$S = 2\pi(r_1+r_2)^2\cdot\frac{1}{3} + 2\pi(r_2^2)\cdot\frac{1}{6} - S_2$$

$$S_2 = \frac{\sqrt{3}\,r_1^2}{4}\cdot 2 = \frac{\sqrt{3}\,r_1^2}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

$$S = 2\pi(2\sqrt{5})^2\cdot\frac{1}{3} + 2\pi(\sqrt{5})^2\cdot\frac{1}{6} - \frac{5\sqrt{3}}{2} =$$

$$= 2\pi\left(\frac{20}{3}+\frac{5}{6}\right) - \frac{5\sqrt{3}}{2} =$$

$$= \frac{45}{6}\cdot 2\pi - \frac{5\sqrt{3}}{2} = \frac{45\pi - 5\sqrt{3}}{2}$$

ОТВЕТ: $\dfrac{45\pi - 5\sqrt{3}}{2}$

21105031 (U276348 M1305156)

ЧИСТОВИК СТР3 ИЗ 5

№2

ABCD В ЦИЛИНДРЕ В СВЕРХУ

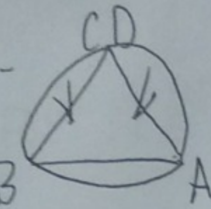


РИС1

← В ЭТОЙ ПРОЭКЦИИ ЗНАЧИТ ЧТО ПРОЭКЦИЯ AC = ПР.BC. ЭТО ТАК, ТК $\Delta ACD = \Delta BCD$, А $CD \parallel$ ОСИ ЦИЛИНДРА, ПРОЭКЦИИ РАВНЫ ВЫСОТАМ ЭТИХ Δ СООТ)

В ДВУХ БОКОВЫХ ПРОЭКЦИЯХ

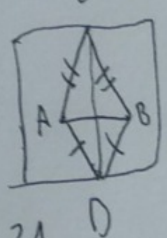


РИС 2А

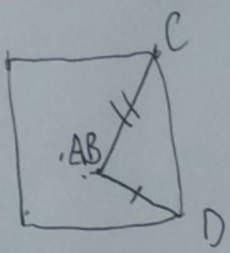


РИС2Б

ИЛИ

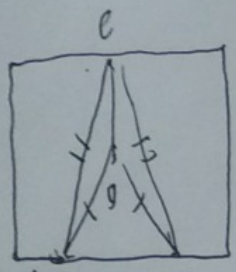


РИС3А

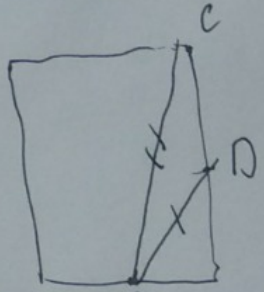
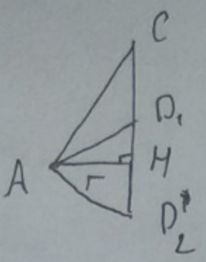


РИС3Б

ПО СКОЛЬКУ r - МИН, ТА AB - const, $r \geq \frac{AB}{2}$
(AB В ПЛОСКОСТИ СГ, ПО СООБРОЖЕНИЯМ АНОЛОГИЧНЫМ ТЕМ ПОЧЕМУ ПРОЭКЦИИ РАВНЫ, КОНКРЕТНЕЙ МОЖНО РАССМОТРЕ СЕЧЕНИЕ ЧЕРЕЗ AB И H, ГДЕ AH И BH - ВЫСОТЫ В ΔACD И ΔBCD)

21105031 (U276348 M1305156)

$\boxed{r = \frac{AB}{2}}$



D_2 - СИМЕТРИЧЕН D_1 ОТН HA

$CD = \sqrt{AC^2 - AH^2} \pm \sqrt{AD^2 - AH^2} =$

$= \sqrt{7^2 - 2^2} \pm \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{45} \pm \sqrt{21} =$

$= 3\sqrt{5} \pm \sqrt{21}$

ОТВЕТ: CD МОЖЕТ ИМЕТЬ ДЛИННУ $3\sqrt{5} + \sqrt{21}$ И $3\sqrt{5} - \sqrt{21}$

№1 ЧИСТОВИК СТР5 П35

$a = a_1$ - ПЕРВЫЙ ЭЛ. b - ШАГ $b>0$

$S = 7a_1 + \frac{7\cdot 6}{2} b$

$a_7 a_{12} = (a_1 + 6b)(a+11b) = a^2 + 17ab + 66b^2$

$a_9 a_{10} = (a+8b)(a+9b) = a^2 + 17ab + 72b^2 = a_7 a_{12} + 6b^2$

$a_9 a_{10} \leq S+44$

$a_7 a_{12} \leq S+20$

$\cancel{\leq}\ a_7 a_{12} < a_9 a_{10}$

21105031 (U276348 M1305156)

③

ЧЕРНОВИК

$a^2+b^2 \le 5$

$a^2+b^2 \le 4a-2b$

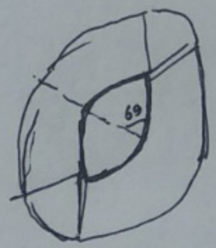
$\cancel{(b+1)^2-1 \le (a+2)^2-4}$

$\cancel{(b+1)^2}$

$(b+1)^2-1+(a-2)^2-4 \le 0$

$(b+1)^2+(a-2)^2 \le 5$

$\pi r_1^2 \cdot \frac{4}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} r_2^2 + \frac{2}{6} \pi r_2^2$

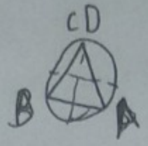


21105031 (U276348 M1305156)

②

ТЭТРАЭАР В ЦИЛИНДРЕ. В СВЕРХУ.

ЧЕРНОВИК



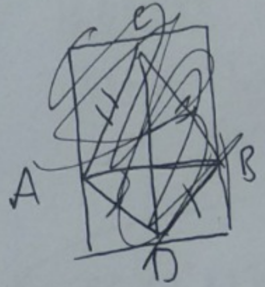
$AC=5,\quad AD=7$

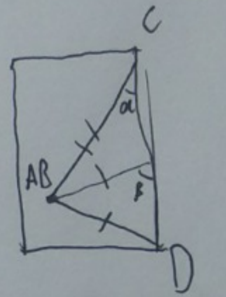
$CB=5\quad DB=7$

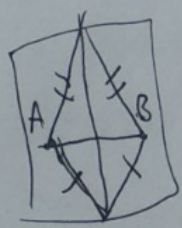
$AB=2$

ТЭТРАЭАРВИА С БОКУ В 2-УХ ПРОЭКЦИЯХ

$h=\sqrt{2}$







$7\sin\alpha=5\sin\beta=2$

$7\cos\alpha-5\cos\beta=CD$

$7\cos\alpha=\sqrt{7^2-2^2}=\sqrt{45}$

$5\cos\beta=\sqrt{5^2-2^2}=\sqrt{21}$

$3\sqrt{5}-\sqrt{21}=CD$

$CD^2=45+21-\cancel{3}\sqrt{105}=66-6\sqrt{105}$

21105031 (U276348 M1305156)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

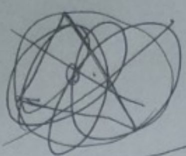
Шифр: **21105031**

ID профиля: **276348**

Вариант 18

N5

ЧЕРНОВИК



$$\begin{array}{r} \times\ 17 \\ 6 \\ \hline 102 \end{array}$$

$17 \cdot 7 \cdot 8 =$

$119 \cdot 8 =$

$= 952$

$$\begin{array}{r} \times\ 108 \\ 84 \\ \hline 432 \\ +\ 864 \\ \hline 9072 \end{array}$$

$84 \cdot 108$

12

11   10,5

п	$\frac{x}{3}+3$	$6x-14$	$x-1$
о	3	-14	-1
з	4	4	2
б	a^2	a^2	a^3

2

0,5   1

$\frac{x}{3}+3$ $6x-14$ $x-1$

a^2 a a

$$\begin{array}{r} \times\ 2{,}6 \\ 2{,}6 \\ \hline 156 \\ +\ 52 \\ \hline 6{,}76 \end{array}$$

$5x = 13$

$x = 2{,}6$

$2{,}6^2 =$

17   14   6   6

$17 \cdot 7$

$119 \cdot 72$

$$\begin{array}{r} \times\ 119 \\ 72 \\ \hline 238 \\ +\ 833\ \ \\ \hline 8568 \end{array}$$

21105031 (U276348 M1305157)

№5 $\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)$ $\log_{6x-14}(x-1)^2$ $\log_{x-1}(\frac{x}{3}+3)$

ЧЕРНОВИК

$2\log_{(\frac{x}{3}+3)}(6x-14)$ $2\log_{(6x-14)}(x-1)$ $\log_{x-1}(\frac{x}{3}+3)$

$x+9=18x-42=3x+3$ $12=17x-39=2x$

$\frac{x}{3}+3=6x-14=x-1$?! $x=6$

I $\ln(0)$ $\ln(0)$ $\log_a \frac{1}{a}$ $\frac{y^3-y^2}{4}=1$

~~log~~ 1 1 1 $y^3-y^2-4=0$ $y^3-y^2=4$

$(y+0,5)^2-0,25+2$ $(y-2)(y^2+y+2)$ $y^2(y-1)=4$

$(y+0,5)=-$ $y^2+y+2=0$ $y=2$

$\log_a b$ $\log_b c$ $\log_c a$ $y=2$

1 1 1

$\frac{y}{2}$ $\frac{y}{2}$ $y-1$ $-1+$ $(y^3-\frac{1}{3})^3=y^3-y^2+\frac{y}{3}-\frac{1}{27}-1$

$a^y=b$ $b^y=c$ $c^{y-1}=a$ $(y-\frac{1}{3})^3-1+\frac{1}{27}-\frac{y}{3}=0$

$(3y-1)^3=\frac{2B}{27}+9y$

$y<2$

$a^{y^3-y^2}=a$ $a\neq 1$

$a^{2+k}=b$

$y^3-y^2=1$

$a^{(2+k)c}=b^{2+k}=c$

$y^3-y^2-1=0$

$a^{(2+k)^2(1+k)}=a$

$\frac{y}{2}\cdot\frac{y-1}{2}\cdot y=1$

1 0,5 2

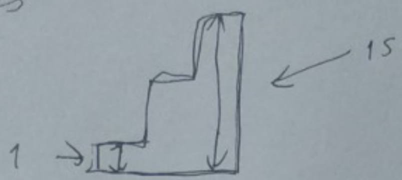
21105031 (U276348 M1305157)

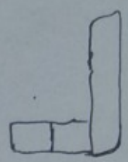
№4

ЧЕРНОВИК

~~f(a; b) g(a; b) = ab~~

~~f(f(a; b); c) g(g(a; b); c) = f(a; b) g(a; b)~~





$15 \cdot 18 \cdot 6^2$

$15 \cdot 6 - 3 - 3$

21105031 (U276348 M1305157)

ЧИСТОВИК СТР 1 ИЗ 3

№1 ЗАМЕТИМ, ЧТО ИЗ ЧИСЕЛ a b c КАЖДОЕ $\vdots 3^1 \cdot 5^1$ И СУЩЕСТВУЕТ ЧИСЛА КРАТНЫЕ 3^{15} И 5^{18} (ВОЗМОЖНО ОДНО И ТОЖЕ ЧИСЛО. ЗАМЕТИМ, ЧТО СУЩЕСТВУЕТ ЧИСЛА НЕ $\vdots 3^2$ И НЕ $\vdots 5^2$ (АНОЛОГИЧНО ЭТО MOЖET БЫТЬ ОДНО ЧИСЛО), ТК ИНАЧЕ НОД БЫЛ БЫ ~~ТАК~~ БОЛЬШЕ. ТАКЖЕ НЕТ ЧИСЛА КРАТНОГО $P \neq 3, 5$, ТК ИНАЧЕ НОК ИМЕЛ ДЕЛИТЕЛЬ P.

ЗАПИШЕМ ВОЗМОЖНЫЕ НАБОРЫ ВХОДИМОСТИ 3 И 5 В ЧИСЛО, ОТДЕЛЬНО ДЛЯ 3 И ДЛЯ 5

ДЛЯ 3 1 1 15, 1 2 15, ... 1 15 15

ДЛЯ 5 1 1 18, 1 2 18, ... 1 18 18

ЗАМЕТИМ ЧТО ЭЛЕМЕНТЫ В НАБОРЕ ВСТРЕЧАЮТСЯ В ПРОИЗВОЛЬНОМ ПОРЯДКЕ ($n_1 n_2 n_3$ МОЖЕТ БЫТЬ И $n_2 n_3 n_1$)

ТАК ЧТО ДЛЯ 3 СУЩЕСТВУЕТ $15 \cdot 6 - 6 = 84$ ВАРИАНТА ПЕРЕСТАНОВКИ 1, 1, 15 И 1, 15, 15 ПОСЧИТАНЫ ЛИШНИЙ РАЗ

А ДЛЯ 5 $18 \cdot 6 - 6 = \cancel{108}$ 102 АНАЛОГИЧНО 1 1 18 И 1 18 18

И ТАК КАК СТЕПЕНИ 3 И 5 НЕЗАВИСИМЫ

КОЛ-ВО ТРОЕК a b c $= 84 \cdot \cancel{108}$ 102 $= \cancel{9072}$ ~~8568~~ 8568

ОТВЕТ 8568

21105031 (U276348 M1305157)

ЧИСТОВИК

№5

$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)$; $\log_{6x-14}(x-1)^2$; $\log_{x-1}(\frac{x}{3}+3)$

$$\Updownarrow$$

$2\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)$; $2\log_{6x-14}(x-1)$; $\log_{x-1}(\frac{x}{3}+3)$

ПУСТЬ ЧИСЛОВЫЕ ЗНАЧЕНИЯ -

I y y $y-1$

II y $y-1$ y

III $y-1$ y y

ТАКЖЕ ЗАМЕНИМ $\frac{x}{3}+3$; $6x-14$; $x-1$ НА a b c

I $a^{\frac{y}{2}}=b$ $b^{\frac{y}{2}}=c$ $c^{y-1}=a$

$$((a^{\frac{y}{2}})^{\frac{y}{2}})^{y-1}=a^1$$

$1=\frac{y^3-y^2}{4}$ $y^3-y^2-4=0$

$(y-2)(y^2+y+2)=0$

$y^2+y+2=(y+0,5)^2+1,75>0 \Rightarrow y=2$ – ЕД. КОРЕНЬ

$a^{\frac{2}{2}}=b^1=b^{\frac{2}{2}}=c^1=c^{2-1}=a^1$

$a=b=c$

~~ЗАМ~~ ПУСТЬ $b=c$. ТОГДА $x=2,6$, НО $\frac{2,6}{3}+3\neq 2,6-1$

ЧИСТОВИК

II

$a^{y} = b \quad b^{\frac{y-1}{2}} = c \quad c^{y} = a$

$a^{\frac{y^2 \cdot (y-1)}{4}} = a^1$

$\boxed{y = 2}$

$a = b \quad b = c^2 \quad c^2 = a$

$a = b \Rightarrow \frac{x}{3} + 3 = 6x - 14$

$5x + \frac{2}{3}x = 17$

$x = 3$

$a = \frac{3}{3} + 3 = 4$

$b = a = 4$

$c = 3 - 1 = 2$

$c^2 = 2^2 = 4 = a$

III

$a^{\frac{1}{2}} = b \quad b^1 = c \quad c^2 = a$

$b = c$

$6x - 14 = x - 1$

$5x = 13$

$x = 2,6$

$2,6^2 = 6,76$

$a = \frac{2,6}{3} + 3 < 4 < 6,76.$

ОТВЕТ: ПРИ $x = 3$

21105031 (U276348 M1305157)