Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104998**

ID профиля: **281968**

Вариант 18

Чистовик 1

№1 Пусть d — разность возр. ариф. прогр. из целых чисел $\Rightarrow \begin{cases} d>0 \\ d\in\mathbb{Z} \end{cases}$

Тогда $a_i = a_1+(i-1)d$

$a_7 = a_1+6d$

$a_{12} = a_1+11d$

$a_9 = a_1+8d$

$a_{10} = a_1+9d$

$S = \frac{a_1+a_7}{2}\cdot 7 = (a_1+3d)7 = 7a_1+21d$

Тогда запишем наши нер-ва в терминах a_1 и d

$$\begin{cases} (a_1+6d)(a_1+11d) > 7a_1+21d+20 \\ (a_1+8d)(a_1+9d) < 7a_1+21d+44 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2+a_1(17d-7)+66d^2-21d-20>0 \ (1) \\ a_1^2+a_1(17d-7)+72d^2-21d-44<0 \ (2) \\ a_1\in\mathbb{Z} \\ d>0 \\ d\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

Прибавим к (1) $6d^2-24$: $\underbrace{a_1^2+a_1(17d-7)+66d^2-21d-20+6d^2-24}_{<0} > 6d^2-24$

Левая часть <0 из (2)

$0 > a_1^2+a_1(17d-7)+72d^2-21d-44 > 6d^2-24 \Rightarrow 6d^2-24<0 \quad d^2<4, \ |d|<2 \overset{d>0}{\Rightarrow} d<2$

Итого $\begin{cases} d<2 \\ d>0 \\ d\in\mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow d=1$ подставим в (1) и (2) нер-ва

$$\begin{cases} a_1^2+10a_1+25>0 \\ a_1^2+10a_1+7<0 \\ a_1\in\mathbb{Z} \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} D_1=25-7=18 \\ a_1=-5\pm3\sqrt{2} \end{array} \right| \qquad \begin{cases} a_1\neq-5 \\ a_1\in(-5-3\sqrt{2};\,3\sqrt{2}-5) \\ a_1\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

$-5-3\sqrt{2} \vee -10$, $-5-3\sqrt{2}>-10$. $\quad -5-3\sqrt{2}\vee-9$

$5\vee3\sqrt{2} \qquad 4\vee3\sqrt{2}$

$25>18 \qquad -5-3\sqrt{2}<-9$

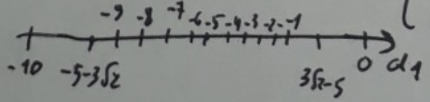
Помним $-10<-5-3\sqrt{2}<-9$

$3\sqrt{2}-5\vee0 \quad 3\sqrt{2}-5\vee-1,\ 3\sqrt{2}\vee4 \quad 3\sqrt{2}-5>-1$

$3\sqrt{2}-5<0 \quad \cancel{4\vee3\sqrt{2}} \quad 3\sqrt{2}>4$

$-1<3\sqrt{2}-5<0$

$$\begin{cases} a_1\neq-5 \\ a_1\in(-5-3\sqrt{2};\,3\sqrt{2}-5) \\ a_1\in\mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1\in[-9;-1] \\ a_1\neq-5 \\ a_1\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

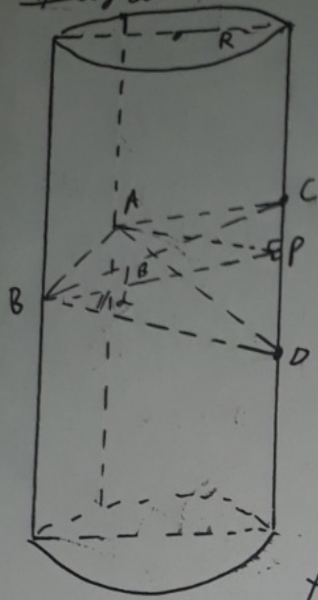


Ответ: $a_1\in\{-9;-8;-7;-6;-4;-3;-2;-1\}$

Чистовик (2) №2

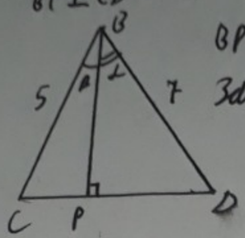
$AB=2$ $AC=BC=5$ $AD=DB=7$

1) ~~Случай~~



чтоб CD было $\parallel$ оси цилиндра она и при этом лежать на бок пов-и $\Rightarrow$ она должна лежать на образующей

Проведем $AP \perp CD$, т.к $\triangle ADC = \triangle BCD$ по 3 сторонам, то $BP \perp CD \Rightarrow CD \perp (ABP)$. Пусть $\angle DBP = \alpha$, $\angle CBP = \beta$

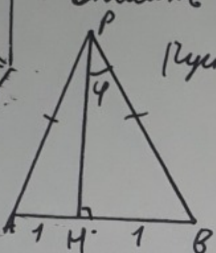


$BP = AP = \cos\alpha \cdot 7 = \cos\beta \cdot 5$. $CD = CP + PD$

Замечание: это случай когда P упала на CD

Пусть R — радиус цилиндра

Рассмотрим $\triangle ABP$ ~~в него можно~~ около него можно описать окр-сть радиуса R т.к $(ABP) \perp CD$ и A, B, P — лежат на бок пов-и



Пусть $\varphi = \angle HPB$

тогда $\sin\varphi = \frac{1}{PB}$, $\cos\varphi = \frac{\sqrt{PB^2-1}}{PB} \Rightarrow \sin 2\varphi = \frac{2\sqrt{PB^2-1}}{PB^2}$

По теор синусов $2R = \frac{AB}{\sin 2\varphi} \Rightarrow R = \frac{1}{\sin 2\varphi}$

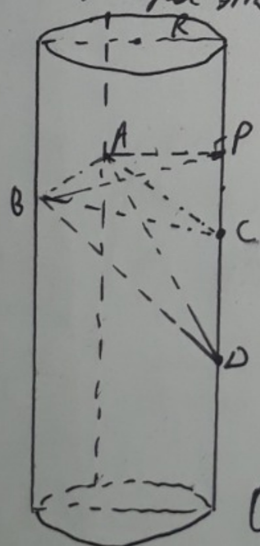
$R \geq 1$ т.к $R = \frac{1}{\sin 2\varphi}$, $\sin 2\varphi \in [-1;1] \Rightarrow$ что R — был наименьшим $\sin 2\varphi = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\varphi = 90° \Rightarrow PB = AP = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \Rightarrow \cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{5}, \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{7} \Rightarrow \sin\beta = \frac{\sqrt{23}}{5}, \sin\alpha = \frac{\sqrt{47}}{7}$

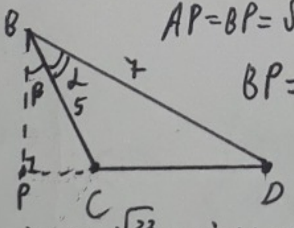
т.к $\angle\beta$ — острые т.к в прямоуг треуг.

$CD = CP + PD = \sin\beta \cdot 5 + \sin\alpha \cdot 7 = \underline{\sqrt{23} + \sqrt{47}}$ — это если P упала на CD

Теперь пусть P — упала за $CD \Rightarrow$ какой-то угол $\triangle BDC$ — тупой. т.к $BD = 7 > BC$ то тупой угол это $\angle BCD$



все аналогично только теперь пусть $\angle CBP = \beta$, $\angle CBD = \alpha$



$AP = BP = \sqrt{2}$ (аналогично 1 случаю)

$BP = AP = \cos(\alpha+\beta) \cdot 7 = \cos(\beta) \cdot 5$

$\cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{5}$, $\cos(\alpha+\beta) = \frac{\sqrt{2}}{7}$, β и $\alpha+\beta$ — острые т.к углы прямоуг треуг

$\sin\beta = \frac{\sqrt{23}}{5}$; $\sin(\alpha+\beta) = \frac{\sqrt{47}}{7} \Rightarrow CD = 7 \cdot \sin(\alpha+\beta) - \sin\beta \cdot 5 =$

$= \underline{\sqrt{47} - \sqrt{23}}$

Ответ: $CD = \left[\begin{array}{l} \sqrt{47}+\sqrt{23} \\ \sqrt{47}-\sqrt{23} \end{array}\right.$ $CD = \sqrt{47} \pm \sqrt{23}$

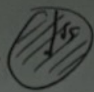
Чистовик (2) №2

Чистовик (3)

№3

Площадь M -?

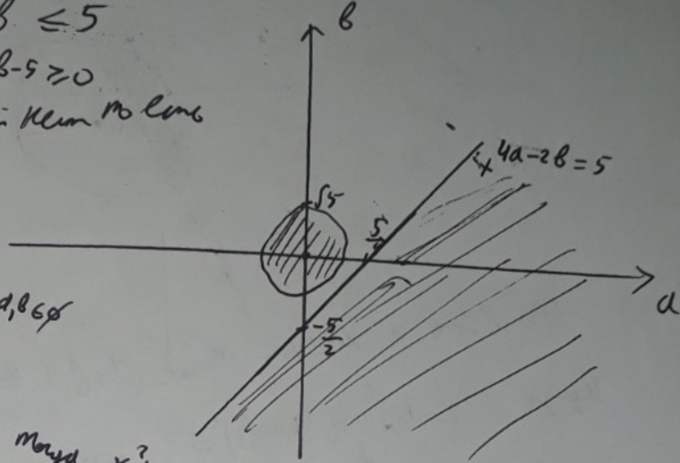
$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 5 \text{ — круг с центром } (a;b) \text{ и радиусом } \sqrt{5}\\ a^2+b^2\le \min(4a-2b;5)\end{cases}$$



Рассмотрим случаи

1) $4a-2b\ge 5$ тогда $\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 5\\ a^2+b^2\le 5\\ 4a-2b-5\ge 0\end{cases}$

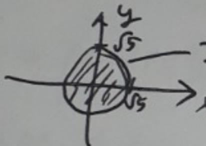
$4a-2b-5\ge 0$



В этом случае пересечений нет то есть не найдутся a, b такие

2) $4a-2b<0 \Rightarrow a^2+b^2\le 4a-2b \Rightarrow a,b\in\emptyset$
≥ 0

3) $4a-2b=0 \Rightarrow a^2+b^2\le 0 \Rightarrow a,b=0$ тогда $x^2+y^2\le 5$ — это точки подходящие нам

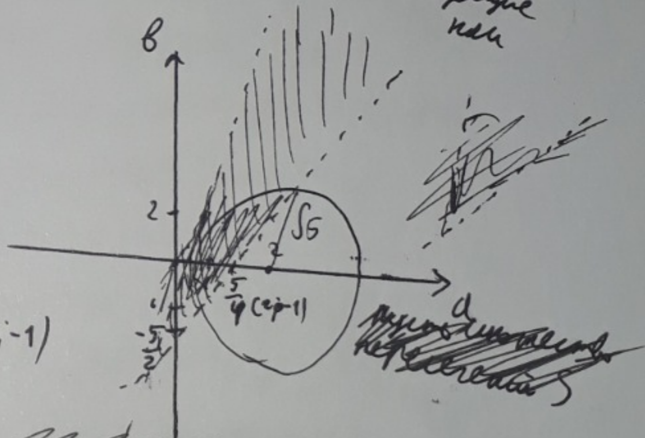


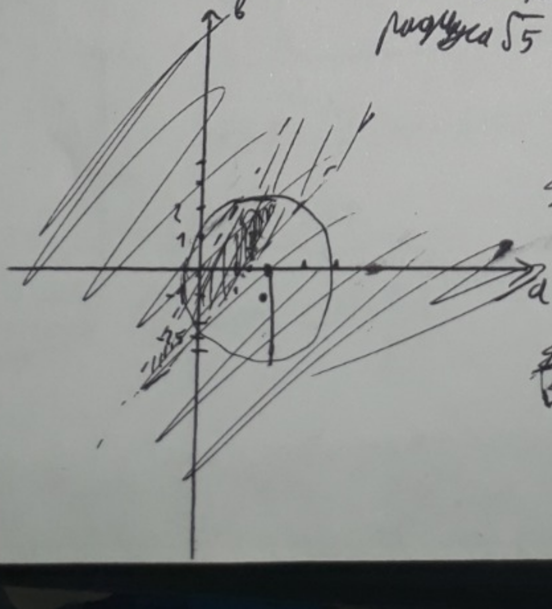
4) $0<4a-2b<5$ в этом случае

$a^2+b^2\le 4a-2b$

$a^2-4a+4+b^2+2b+1\le 5$

$(a-2)^2+(b+1)^2\le 5$ — круг с центром $(2;-1)$ радиуса $\sqrt{5}$





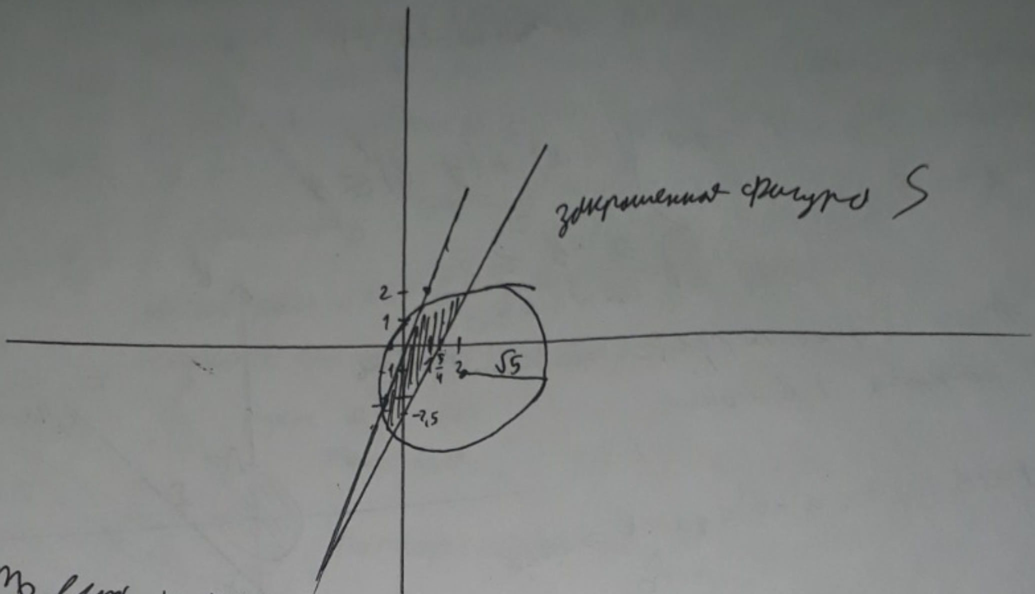
~~То есть у нас удовлетворяет часть круга из которой точки $(a_1;b_1)$ - есть круг $(x-a_1)^2+(y-b_1)^2\le 5$ который входит в фигуру M центром~~

Ч...товик (7) №2

Чистовик (4) №3 продолжение

3) случай $0 < 4a - 2b < 5$

B



то есть и каждой точке $(a_1; b_1)$ есть в фигуре S есть круг $(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 \leq 5$ который входит в M

Черновик (4)

$d_i \in \mathbb{Z}$

$s = y$

S_7 $d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, d_7$

$S_7 = S$

$S = \frac{d_1+d_7}{2}$

d_7

$(d_1+$

d

$(d_1+$

d

Черновик (1)

$S = \frac{d_1+d_7}{2} \cdot 7$ $d_7 = d_1 + 6d$ $S = \frac{2d_1+6d}{2} \cdot 7 = 7d_1 + 21d$

$\begin{cases} d_7 = d_1 + 6d \\ d_{12} = d_1 + 11d \end{cases}$

$(d_1+6d)(d_1+11d) = d_1^2 + 17dd_1 + 66d^2 > 7d_1 + 21d + 20$

$d_9 = d_1 + 8d$

$d_{10} = d_1 + 9d$

$d_9 \cdot d_{10} = d_1^2 + 17dd_1 + 72d^2 < 7d_1 + 21d + 44$

$\begin{cases} d_1^2 + d_1(17d-7) + 66d^2 - 21d - 20 > 0 \quad (1) \\ d_1^2 + d_1(17d-7) + 72d^2 - 21d - 44 < 0 \\ d \in \mathbb{Z} \\ d_1 \in \mathbb{Z} \\ d > 0 \end{cases}$

$0 > d_1^2 + d_1(17d-7) + 66d^2 - 21d - 20 + 6d^2 - 24 > 6d^2 - 24$

$6d^2 - 24 < 0$

$d^2 < 4$ $|d| < 2 \overset{d>0}{\Leftrightarrow} d < 2$

$d = 1$

$\begin{cases} d_1^2 + 10d_1 + 25 > 0 \\ d_1^2 + 10d_1 + 7 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d_1 \neq -5 \\ d_1 \in (-5-3\sqrt{2}; 3\sqrt{2}-5) \\ d_1 \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$D_1 = 25 - 7 = 18 = (3\sqrt{2})^2$

$d_1 = -5 \pm 3\sqrt{2}$

$-10 < -5-3\sqrt{2} < -9$

$-10 \vee -5-3\sqrt{2}$ ($<$)

$3\sqrt{2} \vee 5$ ($<$)

$-10 \quad -5-3\sqrt{2} \quad -9$

$-5-3\sqrt{2} \vee -9$ ($<$)

$4 \vee 3\sqrt{2}$ ($<$)

$-1 \vee 3\sqrt{2}-5$ ($<$)

$4 \vee 3\sqrt{2}$ ($<$)

$-1 \quad 3\sqrt{2}-5 \quad 0$

$0 \vee 3\sqrt{2}-5$

$5 \vee 3\sqrt{2}$ ($>$)

$\begin{cases} d_1 \in [-9; -1] \\ d_1 \neq -5 \end{cases}$

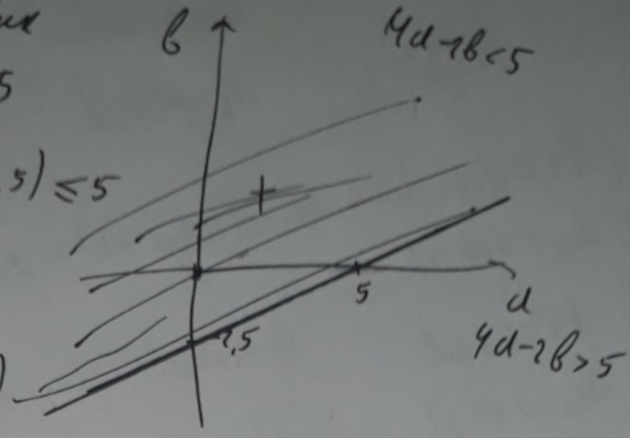
$\begin{cases} d_1^2 - \\ d_1^2 + \end{cases}$

$D_1 =$

d_1

Церковник

2) $\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 5\\ a^2+b^2\le \min(4a-2b,5)\le 5\end{cases}$

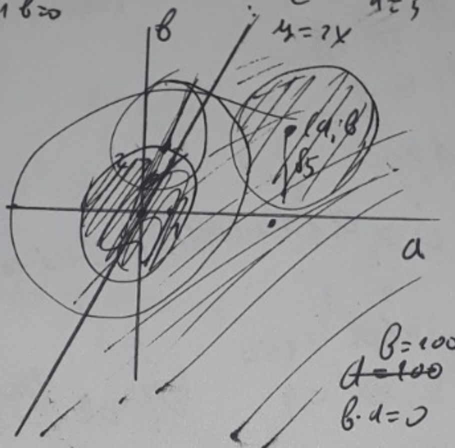


$a^2+b^2\le \min(4a-2b,5)$

$4a-2b<5$ $\quad$ $4a=2b+5$

$4a-2b\ge 0$ $\quad$ $2a-b\ge0$ $\quad$ $b=2a-\frac{5}{2}$ $\quad$ $2a=\frac{5}{2}$

$2a\ge b$ $\quad$ $a=1\ b=0$ $\quad$ $a=5$



$a^2+b^2\le$

$a_1 b_1$

$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2\le(\sqrt5)^2$

$a_1^2+b_1^2\le \min(5,(4a_1-2b_1))$

1) $\cancel{4a_1-2b_1>5}$ $\quad$ $a_1^2+b_1^2\le 5$

2) $4a_1-2b_1<0$ $\quad$ $x,y\in\varnothing$

3) $4a_1-2b_1\ge 0$

$4a_1-2b_1<5$

$\sqrt{4a_1-2b_1}$

$5\vee 2\sqrt5$

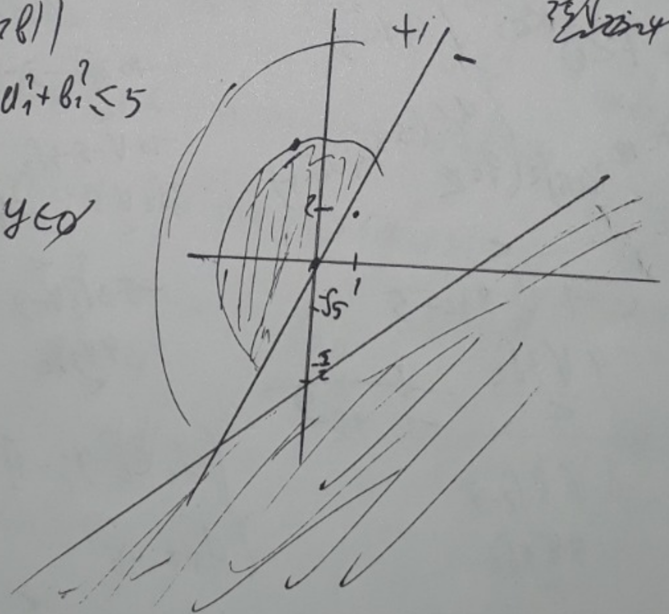
$25>10$

$b=100$

$\cancel{a=100}$

$b\cdot a=0$

$\frac{5}{2}\vee\sqrt5$

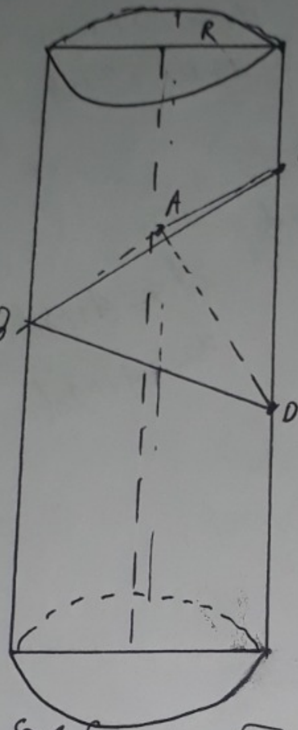


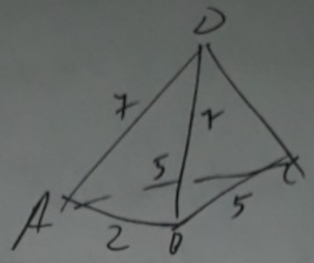
Чистов

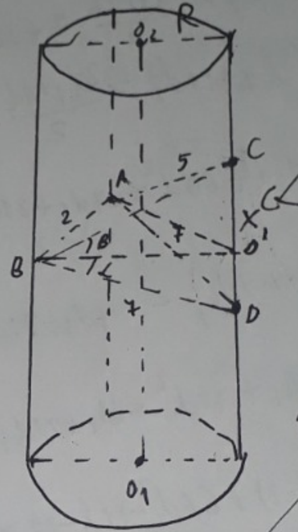
3) C

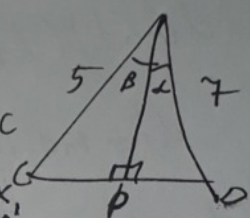
(5) Черновик .A $\cos\alpha$ ...

(3) Черновик

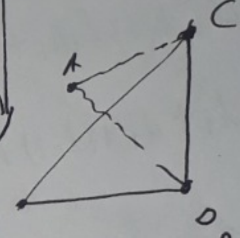






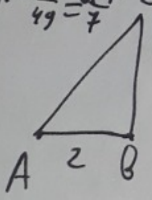


$7\cos\alpha = 5\cos\beta$



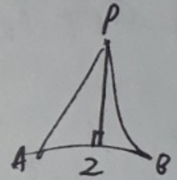
$\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{7}$ $\cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{5}$ $\sin\beta = \frac{\sqrt{23}}{5}$

$\sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{2}{49}} = \frac{\sqrt{47}}{7}$



$CD = \sqrt{47} + \sqrt{23}$

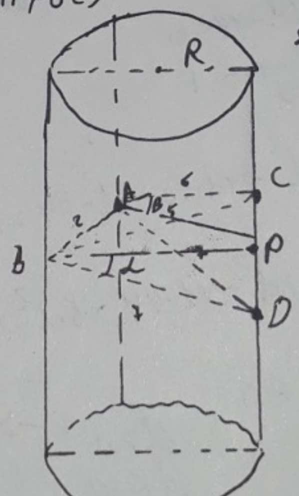
$\frac{2}{\sin APB} = 2R$



$AP = BP$

$\sin\varphi = \frac{2\sqrt{y^2-1}}{y^2}$

$\cos\beta \cdot 5 = \cos\alpha \cdot 7 = y$

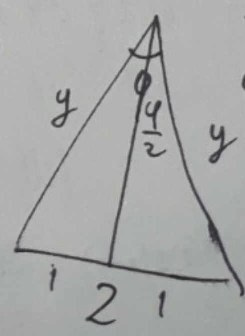


$CD = \sin\alpha \cdot 7 + \sin\beta \cdot 5 =$

$R = \frac{1}{\sin\varphi}$ R-мин $\varphi = 90°$

$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{y}$

$\cos\frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{y^2-1}}{y}$



$\sin\varphi = 2 \cdot \frac{1}{y^2} \sqrt{y^2-1}$

$\frac{2\sqrt{y^2-1}}{y^2} = 1$ $2\sqrt{y^2-1} = y^2$

$4y^2 - 4 = y^4$

$y^4 - 4y^2 + 4 = (y^2-2)^2 = 0$ $y^2 = 2$ $y = \sqrt{2}$

$\cos\beta \cdot 5 = \sqrt{2}$ $\cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{5}$ $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{7}$

Черновик Русов d-подумать $d_i \in \mathbb{Z}$ (4)

S_7 $d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, d_7$

$d_7 \cdot d_{12} > S + 20$

$d_9 \cdot d_{10} < S + 44$

$S_7 = S$ $d_1 ; d_2 = d_1 + d$

$S = \frac{d_1+d_7}{2} \cdot 7$ $d_{12} = d_1 + 11d$

$d_7 = d_1 + 6d$

$d_7(d_1+11d) > \frac{d_1+d_7}{2} \cdot 7 + 20$ $d_9 = d_1 + 8d$

$(d_1+6d)(d_1+11d) > \frac{2d_1+6d}{2} \cdot 7 + 20$ $d_{10} = d_1 + 9d$

$d_1^2 + 17d_1 d + 66d^2 > 7d_1 + 21d + 20$

$(d_1+8d)(d_1+9d) < 7d_1 + 21d + 44$

$d_1^2 + 17d d_1 + 72d^2 < 7d_1 + 21d + 44$

$$\begin{cases} d_1^2 + d_1(17d-7) + 66d^2 - 21d - 20 > 0 \\ d_1^2 + d_1(17d-7) + 72d^2 - 21d - 44 < 0 \end{cases}$$

$6d^2 - 24 < 0$

$d^2 < 4$

$|d| < 2$

$d = 1$

$d_1^2 + 10d_1 + 25 > 0$ $51 - 44 = 7$

$d_1^2 + d_1(17d-7) + 66d^2 - 21d - 20 + 6d^2 - 24 > 6d^2 - 24$

$x_{1,3} = 4,5$

$0 > d_1^2 + d_1(17d-7) + 72d^2 - 21d - 44 > 6d^2 - 24$

$-5-3\sqrt{2} \vee -9$

$4 \vee 3\sqrt{2}$

$-5-3\sqrt{2}$

$16 \vee 18$ $-1 \vee 3\sqrt{2}-5$

$4 \vee 3\sqrt{2}$

$$\begin{cases} d_1^2 + 10d_1 + 25 > 0 \\ d_1^2 + 10d_1 + 7 < 0 \end{cases}$$

$6d^2 - 24 < 0$

$d^2 < 4$

$d > 0$

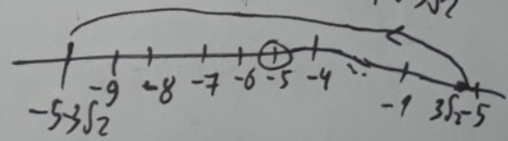
$d \in \mathbb{Z}$

$D_1 = 25 - 7 = 18$

$|d| < 2$

$d_1 = \frac{-5 \pm 3\sqrt{2}}{1}$

$$\begin{cases} d_1 \in (-5-3\sqrt{2}; 3\sqrt{2}-5) \\ d_1 \neq -5 \end{cases}$$ $d = 1$



Чис

В

$5 = y$

$\sin\beta$

$\frac{1}{4}$

$24 = 900$

$\sqrt{23}$

$5 = y$

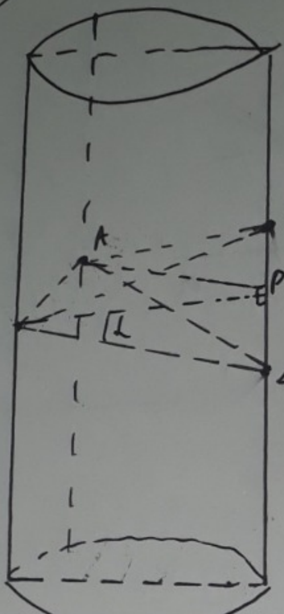
$\sin\beta\ 5$

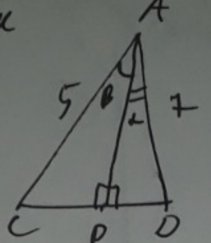
Чистов

3) с

5

Черновик





$\cos\alpha \cdot 7 = \cos\beta \cdot 5 = y$

$CD = 7\sin\alpha + 7\sin\beta$

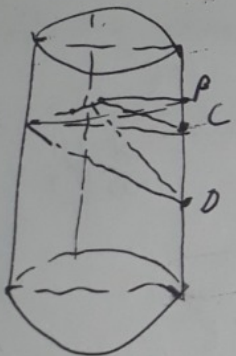
$\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{y^2-1}}{y}$, $\sin\varphi = \dfrac{1}{y}$

$\sin 2\varphi = \dfrac{2\sqrt{y^2-1}}{y^2}$

$2R = \dfrac{2}{\sin 2\varphi}$ $\quad R = \dfrac{1}{\sin 2\varphi} \Rightarrow R$ - мин

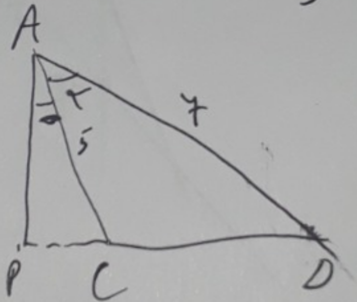
если $\sin 2\varphi = 90°$

$y = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$



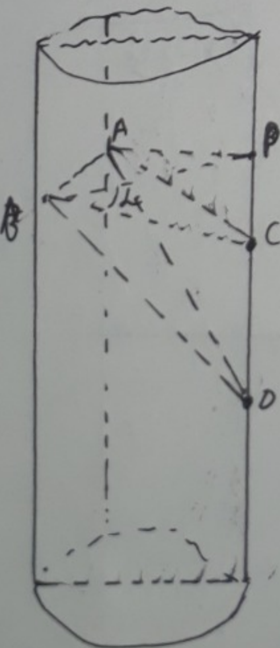
$\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{7}$, $\sin\alpha = \sqrt{1-\frac{2}{49}} = \dfrac{\sqrt{47}}{7}$

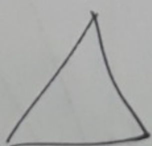
$\cos\beta = \dfrac{\sqrt{2}}{5}$ $\quad \sin\beta = \dfrac{\sqrt{23}}{5}$ $\quad CD = \sqrt{47} + \sqrt{23}$



$\cos(\alpha+\beta)\cdot 7 = \cos\beta \cdot 5 = y$

$CD = \sin(\alpha+\beta)7 - \sin\beta\, 5$





$\cos(\alpha+\beta)\cdot 7 = \sqrt{2}$ $\quad \sin(\alpha+\beta) = \dfrac{\sqrt{47}}{7}$

$\cos\beta = \dfrac{\sqrt{2}}{5}$ $\quad \sin\beta = \dfrac{\sqrt{23}}{5}$ $\quad CD = \sqrt{47} - \sqrt{23}$

Черновик (6)

1) $4a-2b>5$ $\quad a,b\in\varnothing$

$4a-2b-5>0$

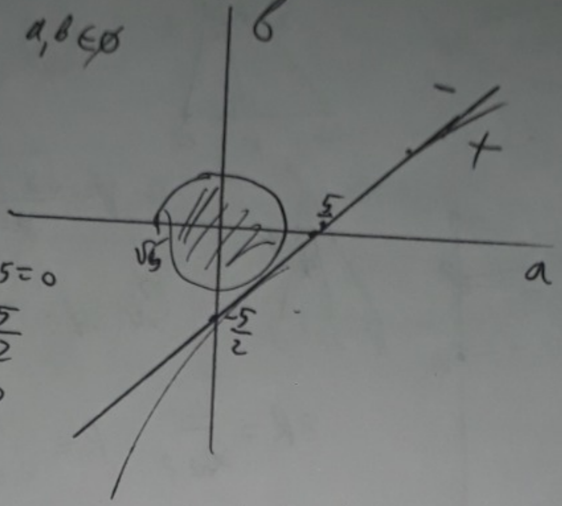
$a^2+b^2\le 5$

$4a-2b-5=0$

$b=-\frac{5}{2}$

$b=0$

$a=\frac{5}{4}$



$\frac{5}{4} \vee \sqrt{5}$

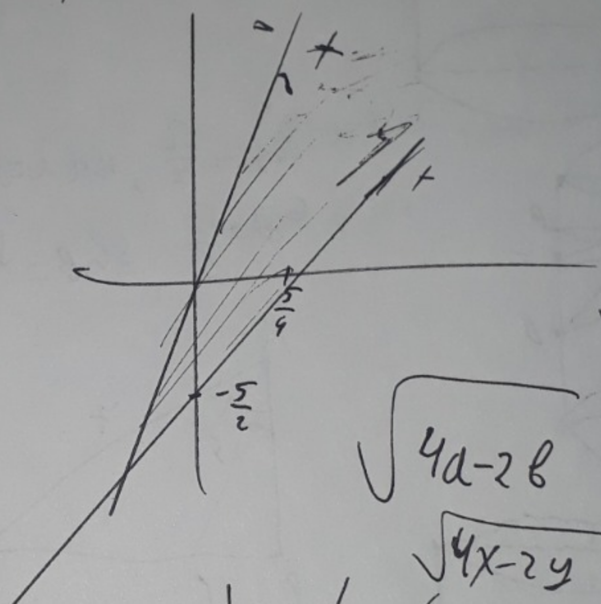
$25 \vee 20$

$>$

2) $4a-2b<0$

$a=1$ $\quad b=0$

$a,b\in\varnothing$ $\quad 4-0=0$



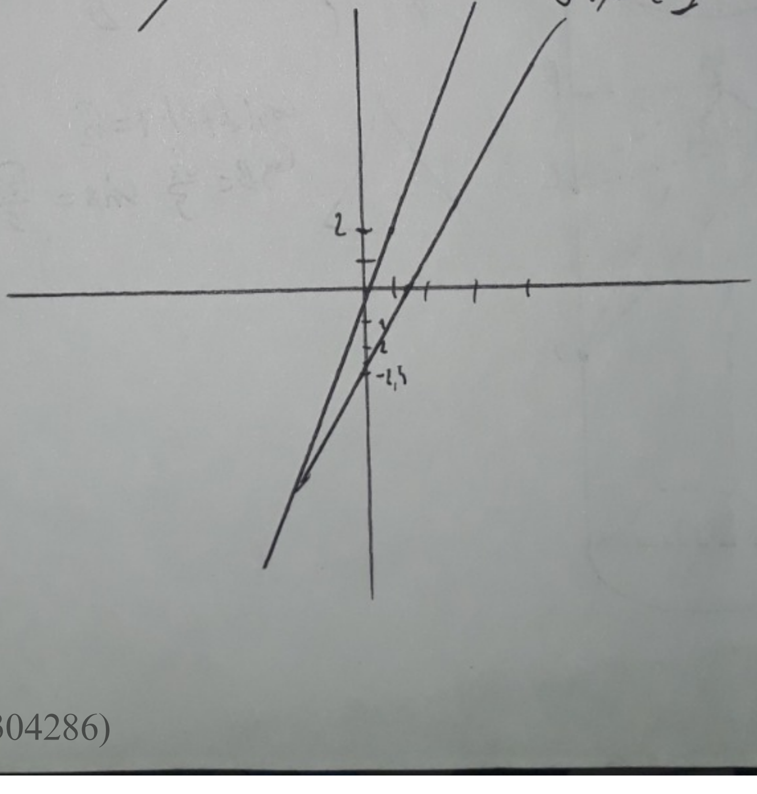
$\sqrt{5} \vee 2$

$\sqrt{4a-2b}$

$\sqrt{4x-2y}$

3) $5>4a-2b>0$

$a=b=$



Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104998**

ID профиля: **281968**

Вариант 18

№5

Чистовик ① $\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14) \overset{\text{об}}{=} a$, $\log_{6x-14}(x-1)^2 \overset{\text{об}}{=} b$; $\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right) \overset{\text{об}}{=} c$

ОДЗ

$$\begin{cases} \frac{x}{3}+3>0 \\ \frac{x}{3}+3\ne 1 \\ 6x-14>0 \\ 6x-14\ne 1 \\ x-1>0 \\ x-1\ne 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x>-9 \\ x\ne -6 \\ x>\frac{7}{3} \\ x\ne \frac{15}{6}=\frac{5}{2} \\ x>1 \\ x\ne 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in\left(\frac{7}{3};+\infty\right) \\ x\ne 2{,}5 \end{cases}$$

Заметим что по ОДЗ

$$c=\frac{4}{ab} \qquad \log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)=\frac{4}{2\cdot\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)\cdot 2\log_{6x-14}(x-1)}$$

$abc=4$

Пусть какие-то два равны t, а третий $t-1$

$t^2(t-1)=4$, $t^3-t^2-4=0$, $(t-2)(t^2+t+2)=0$

$D=1-8<0$

то есть если 2 числа равны то только 2, а третий $2-1=1$

1) $\begin{cases} a=b=2 \\ c=1 \end{cases}$ $\begin{cases} a=b=2 \\ \frac{x}{3}+3=x-1 \end{cases}$ $\begin{cases} a=b=2 \\ x=6 \end{cases}$ проверим $x=6$ $a=\log_{\sqrt{5}}22\ne 2$, $x=6$ — не подходит

1 случай не имеет решений

2) $\begin{cases} b=c=2 \\ a=1 \end{cases}$ $\begin{cases} b=c=2 \\ a=1 \end{cases}$ $\begin{cases} 2\log_{6x-14}(x-1)=2 \\ \log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)=2 \\ 2\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)=1 \end{cases}$

$6x-14=x-1$, $x=\frac{13}{5}$

подставим в a $\log_{\frac{13}{15}+3}\left(\frac{78}{5}-14\right)\overset{?}{=}\frac{1}{2}$

$\log_{\frac{58}{15}}\frac{8}{5}\ne\frac{1}{2}$ не подходит

2 случай не имеет реш

3) $\begin{cases} a=c=2 \\ b=1 \end{cases}$ $\begin{cases} 2\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)=2 \\ 2\log_{6x-14}(x-1)=1 \\ \log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)=2 \end{cases}$

$6x-14=\frac{x}{3}+3 \Rightarrow x=3$

Проверим $b=\log_4 4=1$ (верно)

и $c=\log_2 4=2$ (верно)

$x=3$ подходит

$x=3\in$ ОДЗ

$x=3$ в ответ.

Ответ: $x=3$

Чистовик ② №4

НОД(a;b;c) предположим кт-то из a,b,c содержит в разложении на простые множ-ли $x \neq 1;3;5 \Rightarrow$ в НОК(a;b;c) - должен быть x

НОК(a;b;c) то есть в разложении на простые множители a,b,c содержится только степени 3 и 5, то есть a,b,c - это числа вида $3^i \cdot 5^j$

пусть в какое-то из a,b,c входит 3^{α_1}, в какое-то другое входит 3^{α_2}, в третье 3^{α_3}

Аналогично $5^{\beta_1}, 5^{\beta_2}, 5^{\beta_3}$. $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3, \beta_3 \in \mathbb{N}$

Упорядочим $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3$ т.к НОД(a,b,c) $= 5 \cdot 3 \Rightarrow \alpha_1 = 1$

$\beta_1 \leq \beta_2 \leq \beta_3$ $\beta_1 = 1$

т.к НОК(a,b,c) $= 3^{15} \cdot 5^{18} \Rightarrow \alpha_3 = 15$

$\beta_3 = 18$

$\alpha_2 \in [1;15]$ - 15 ~~способов~~ вариантов

$\beta_2 \in [1;18]$ - 18 вариантов

теперь посчитаем сколькими способами из $3^{\alpha_1}\ 3^{\alpha_2}\ 3^{\alpha_3}$, $5^{\beta_1}\ 5^{\beta_2}\ 5^{\beta_3}$ можно составить тройки чисел вида $5^j \cdot 3^i$: ~~выбрать~~ составить 1 число 3·3 способа одно из $3^{\alpha_1}, 3^{\alpha_2}, 3^{\alpha_3}$, одно из $5^{\beta_1}, 5^{\beta_2}, 5^{\beta_3}$

составить 2 число 2·2 способа. Составить 3 число 1 способ

всего 9·4·1 = 36 но в каждом способе у нас 15·18 вариантов выбрать значение α_2, β_2

всего троек $36 \cdot 15 \cdot 18 = 9^2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 5 = 9720$ троек

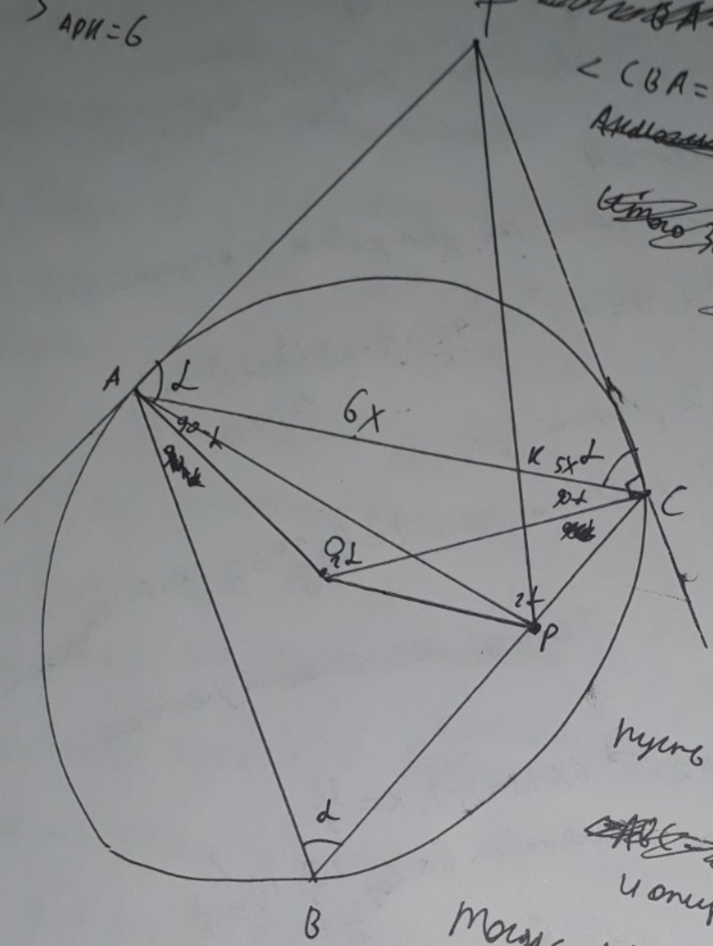
~~Ответ~~ Ответ: 9720

21104998 (U281968 M1304287)

Чистовик (3)

$S_{CPK}=5$

$S_{APK}=6$



Пусть $\angle ACT = \alpha \Rightarrow \angle TAC = \alpha$ т.к. $TA=TC$

$\angle OCA = 90-\alpha$

~~$\angle OCA = 90° - \alpha = 90-\alpha \Rightarrow \angle OCB = 90-\alpha$ и OC - биссектриса~~

ΔTAC - равнобедр.

~~Пусть $\angle BAC = \alpha$~~

$\angle CBA = \alpha$ т.к. опирается на хорду AC

~~Аналогично $\angle OAC = 90-\alpha = \angle OAO$ т.к. AO - биссектриса~~

~~Итого $360-4\alpha+\alpha=180°$~~

~~$180=3\alpha \Rightarrow \alpha=60°$~~

~~$\angle AOC = 2\alpha = \angle APC$ т.к. APOC на одной окр-сти~~

$\frac{AK}{KC} = \frac{6}{5}$ т.к. $\frac{S_{APK}}{S_{KPC}} = \frac{6}{5}$

Пусть $AK=6x$, $KC=5x$

~~$\angle ABC = \alpha$~~ $\angle AOC = 2\alpha$ т.к. центральный и опирается на AC

Тогда $\angle APC = 2\alpha$ т.к. A, O, P, C - на одной окр-сти

Чистовик ① $\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14) = a$, $\log_{6x-14}(x-1)^2 = b$,

Черновик ①

Наиб общ делитель

Наим общ кратное

НОД·НОК =

$5^3\cdot 2^6$ НОД $5\cdot 2^6$

$5^1\cdot 2^7$ НОК $2^7\cdot 5^3$

9 вар

$3\cdot 3\cdot$

$НОД(a;b;c) = 3\cdot 5$

$НОК(a;b;c) = 3^{15}\cdot 5^{18}$

$3^{\alpha_1}\ 3^{\alpha_2}\ 3^{\alpha_3}$ ab cd

$5^{\beta_1}\ 5^{\beta_2}\ 5^{\beta_3}$ dc bd / ad bc

$\alpha_1 \le \alpha_2 \le \alpha_3$

$\beta_1 \le \beta_2 \le \beta_3$

$\alpha_1 = 1$ $\alpha_3 = 15$

$\beta_1 = 1$ $\beta_3 = 18$

$\alpha_2 \in [1;15]$ − 15

$\beta \in [1;18]$ − 18

$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)$, $\log_{6x-14}(x-1)^2$; $\log_{(x-1)}\left(\frac{x}{3}+3\right)$

a b c

ОДЗ

$\begin{cases} \frac{x}{3}+3>0 \\ \frac{x}{3}+3\ne 1 \\ x>\frac{7}{3} \\ x>1 \\ x\ne 2 \\ 6x-14\ne 1 \end{cases}$

$a = 2\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14) = \frac{2}{\log_{6x-14}\left(\frac{x}{3}+3\right)}$

$b = 2\log_{6x-14}(x-1)$

$c = \log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right) = \frac{\log_{6x-14}\left(\frac{x}{3}+3\right)}{\log_{6x-14}(x-1)}$

$\begin{cases} a=b \\ c=a-1 \end{cases}$

$\begin{cases} b=c \\ a=b-1 \end{cases}$

$\begin{cases} a=c \\ b=a-1 \end{cases}$

$c = \frac{1}{a\cdot b}$ $\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right) = \frac{\log_{6x-14}\left(\frac{x}{3}+3\right)}{\log_{6x-14}(x-1)} = \frac{\frac{2}{a}}{\frac{b}{2}} = \frac{4}{ab}$

③ $3^{\alpha_2}\cdot 3^{15}$

$5^1\ 5^{\beta_2}\cdot 5^{18}$

$15\cdot 18\cdot 9$

$abc = 4$ Пусть главных t

$t^2(t-1) = 4$

$t^3 - t^2 - 4 = 0$

$t = 2$ $8-4-4=0$

$t^3 - t^2 - 4 \mid t-2$

$t^3 - 2t^2$ | $t^2 + t + 2$

$t^2 - 4$

$t^2 - 2t$

$2t - 4$

$t^2+t+2=0$

$D = 1-8<0$

$(t-2)(t^2+t+2)=0$

$t = 2$

$9\cdot 9\cdot 2\cdot 3\cdot 5$

$= 81\cdot 3\cdot 10$

2430

$x+9 = 3x-3$

$a =$ $2x = 12$, $x = 6$

$a = 3\cdot 3$

$b = 2\cdot 2$

$c = 1\cdot 1$

$9+4 = 13$ способов

$13\cdot 15\cdot 18$

$13\cdot 5\cdot 2\cdot 27$

$\frac{13}{5} \vee \frac{7}{3}$

$39 \vee 35$

$\begin{array}{r} 27 \\ \times\ 13 \\ \hline 81 \\ 27\ \ \\ \hline 351 \end{array}$

3510

21104998 (U281968 M1304287)

$\log_{\sqrt{3}+3}(6x-14) = a$

Черновик 4

$3+2\cdot 2 =$

$2\cdot 2\cdot$

Черновик (2)

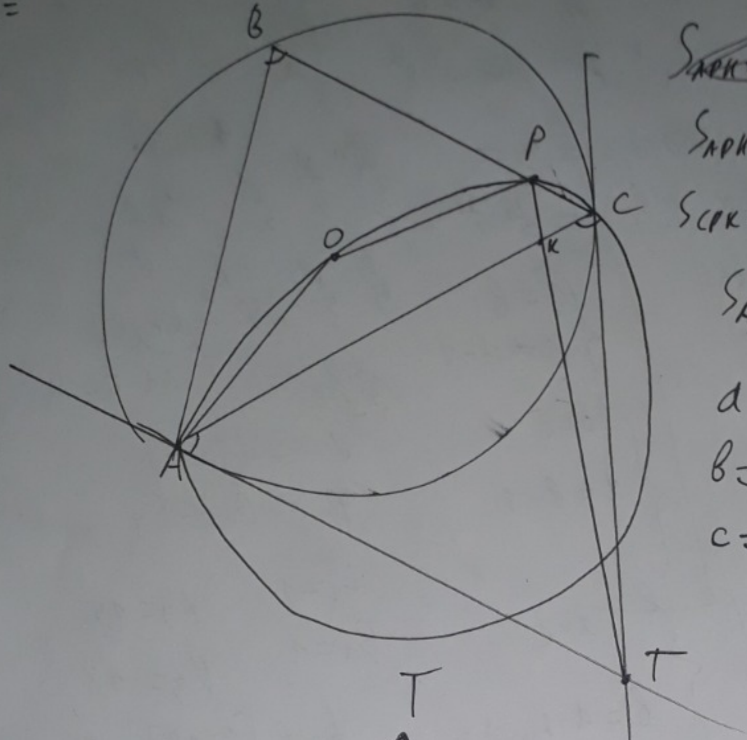
$НОД = 6$

$2\cdot 3$, $НОК = 3^2\cdot 2^2$

$2^2\cdot 3^2$

$3^2\cdot 2^2$ $\quad 3^3\cdot 2^3$

~~$S_{APK} = S_{CPK}$~~



$S_{APK} = 6$

$S_{CPK} = 5$

S_{ABC}

$a = 3^{\alpha_1}\cdot 5^{\beta_1}\cdot a_1$

$b = 3^{\alpha_2}\cdot 5^{\beta_2}\cdot b_1$

$c = 3^{\alpha_3}\cdot 5^{\beta_3}\cdot c_1$

$\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \alpha_3, \beta_3 \geq 1$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \leq 15$

$\beta_1, \beta_2, \beta_3 \leq 18$

7

$3, 5\cdot d$

$3^{20}\cdot 5^{20}$

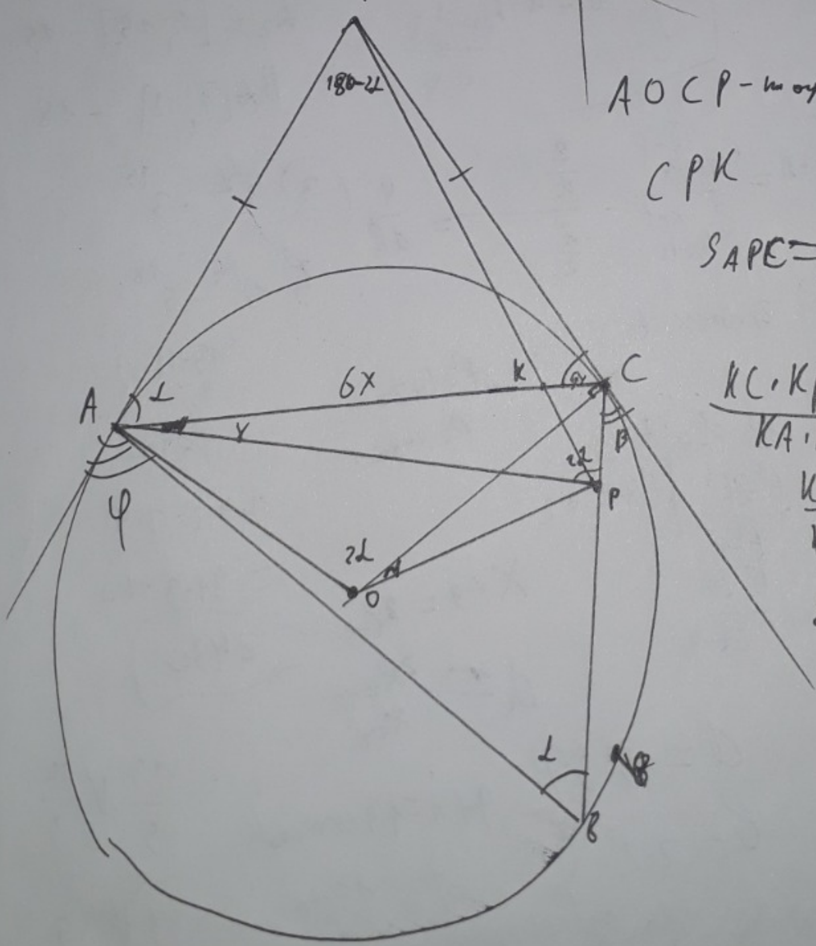
$3^{15}\cdot 5^{18}\, d$

AOCP — вписан

CPK

d_1

B_1



$S_{APC} = \dfrac{AP\cdot PC}{2}\cdot \sin 2\alpha = 11$

$\dfrac{KC\cdot KB}{KA\cdot KP} = \dfrac{5}{6}$

$\dfrac{KC}{KA} = \dfrac{5}{6}$

$\gamma+\beta+\varphi = 180^\circ$

$15,\ (x-1)^2 \geq 6;\quad \log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right) \geq c$

Вариант 3

$1)\ \begin{cases} 2\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)=1 \\ 2\log_{6x-14}(x-1)=2 \\ \log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)=1 \end{cases}$

$1)\ a=1$

$b=c=2$

$\begin{array}{r} 4 \\ \times 28 \\ 6 \\ \hline 168 \end{array}$

$6x-14=\sqrt{\frac{x}{3}+3}$

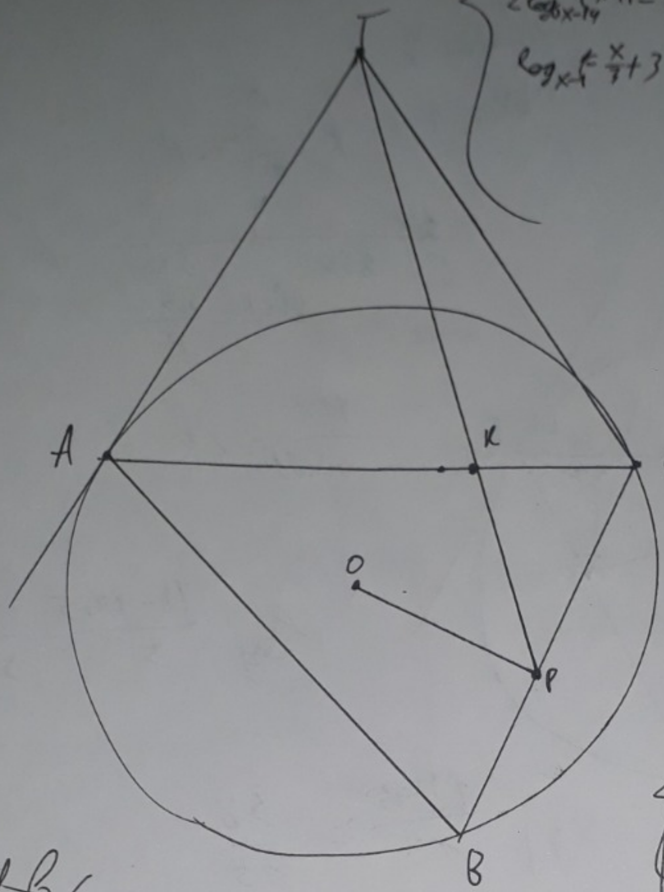
$\cancel{36x^2-168x+144}=\frac{x}{3}+3$

$2(3x-7)=\sqrt{\frac{x}{3}+3}$

$4(9x^2-42x+49)=\frac{x}{3}+3$

$12(9x^2-42x+49)=x+9$

$108x^2-$



$\begin{cases} 6x-14=x-1 \\ \cancel{x} \end{cases}$

$5x=13$

$x=\frac{13}{5}$

$\begin{cases} \log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)=\frac{1}{2} \\ \log_{6x-14}(x-1)=1 \\ \log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)=2 \end{cases}$

$x-1=6x-14$

$5x=13$

$x=\frac{13}{5}$

$\log\ \frac{13}{15}\ \frac{78}{5}+3-14$

~~abc~~

efg

$x_1\ x_2\ x_3$

af

ae

ag

$x_1\ x_2\ x_3$

de bf cg

de bg cf

de cf bg

de cg bf

$9\cdot 4$

$d=3^{\alpha_i}\cdot 5^{\beta_j}$

$9\cdot 4=36$

$\begin{array}{r} 81 \\ \times 3 \\ \hline 243 \\ \times 4 \\ \hline 972 \end{array}$

$\begin{array}{r} 81 \\ \times 12 \\ \hline 162 \\ 81 \\ \hline 972 \end{array}$

9720

21104998 (U281968 M1304287)

Чистовик (1) $\log_{\sqrt{5}+13}(6x-14)=$

Черновик 4

$3\cdot 3+2\cdot 2=13$

$ab\ \ 2\cdot 2\cdot$

cd

$ac\ \ bd$

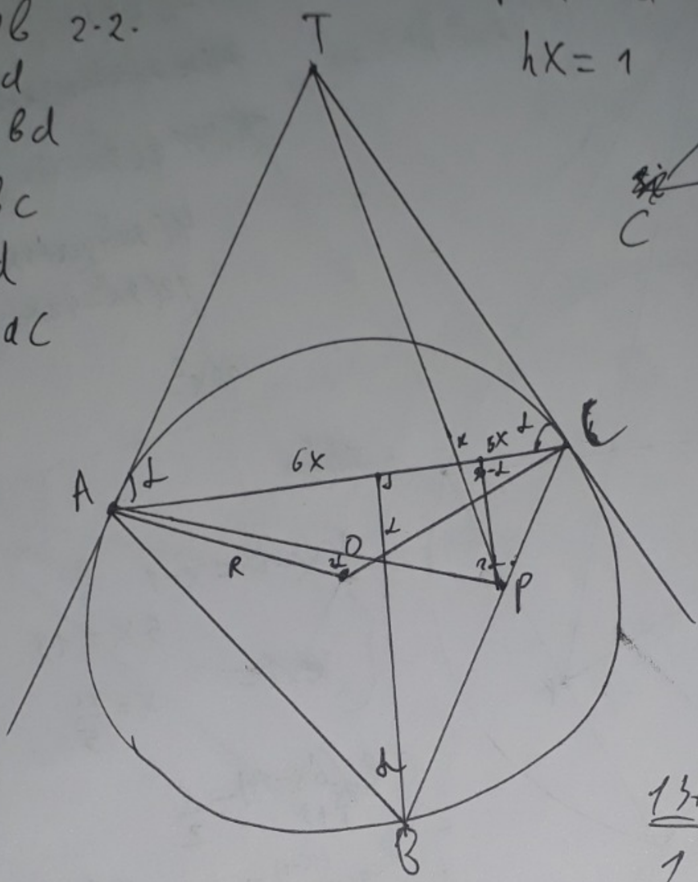
$ad\ \ bc$

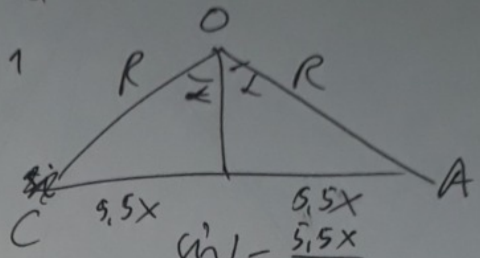
$bc\ ad$

$bd\cdot ac$

$P11\cdot XX=8$

$hX=1$





$\sin\alpha=\frac{5,5x}{R}$

$\frac{11x}{\sin\alpha}=2R$

$\frac{78-14\cdot 5}{5}=\frac{8}{5}$

$\frac{13+45}{15}=\frac{58}{15}$

$a_1\ a_2$

$b_1\ b_2$

$\cancel{a\geq b}$

$x_1\ \ \ x_2$

$a_1b_2\ \ \ a_2b_1$

$a_1b_1\ \ \ a_2b_2$

$a_2b_1\ \ \ a_1b_2$

$a_2b_2\ \ \ a_1b_1$

$18X-42=X+9$

$17X=51$

$X=3$

Черновик 5 ~~[illegible]~~ №4

$$\begin{cases} НОД(a;b;c) = 3\cdot 5 \\ НОК(a;b;c) = 3^{15}\cdot 5^{18} \end{cases}$$

Предположим a, b, c одно из трех этих чисел содержит в разложении на простые множители $x \neq 1; 5; 3 \Rightarrow$ тогда в $НОК(a;b;c)$ должно содержаться x

то есть a, b, c в разложении на простые множители содержат только степени 5 и 3

Пусть какое-то из a, b, c содержит 3^{α_1}, другое 3^{α_2}, а третье 3^{α_3}

Аналогично пусть кто-то из a, b, c содержит $5^{\beta_1}; 5^{\beta_2}; 5^{\beta_3}$, $\alpha_i, \beta_i \in N$

БОО $\alpha_1 \le \alpha_2 \le \alpha_3$ т.к $НОД(a;b;c) = 3\cdot 5$ $\alpha_1 = 1, \beta_1 = 1$

$\beta_1 \le \beta_2 \le \beta_3$ т.к $НОК(a;b;c) = 3^{15}\cdot 5^{18} \Rightarrow \alpha_3 = 15$ $\beta_3 = 18$

Тогда $\alpha_2 \in [1;15]$ - 15 вариантов, $\beta_2 \in [1;18]$ - 18 вариантов

теперь чтоб получить число a мы берем 1 из 3 $3^{\alpha_1}, 3^{\alpha_2}, 3^{\alpha_3}$ и соединяем его с 1 из 3 $5^{\beta_1}, 5^{\beta_2}, 5^{\beta_3}$. Потом выбираем 1 из 2 степеней 3 для b и 1 из 2 степеней 5 а для c степень 5 и 3 определяется однозначно

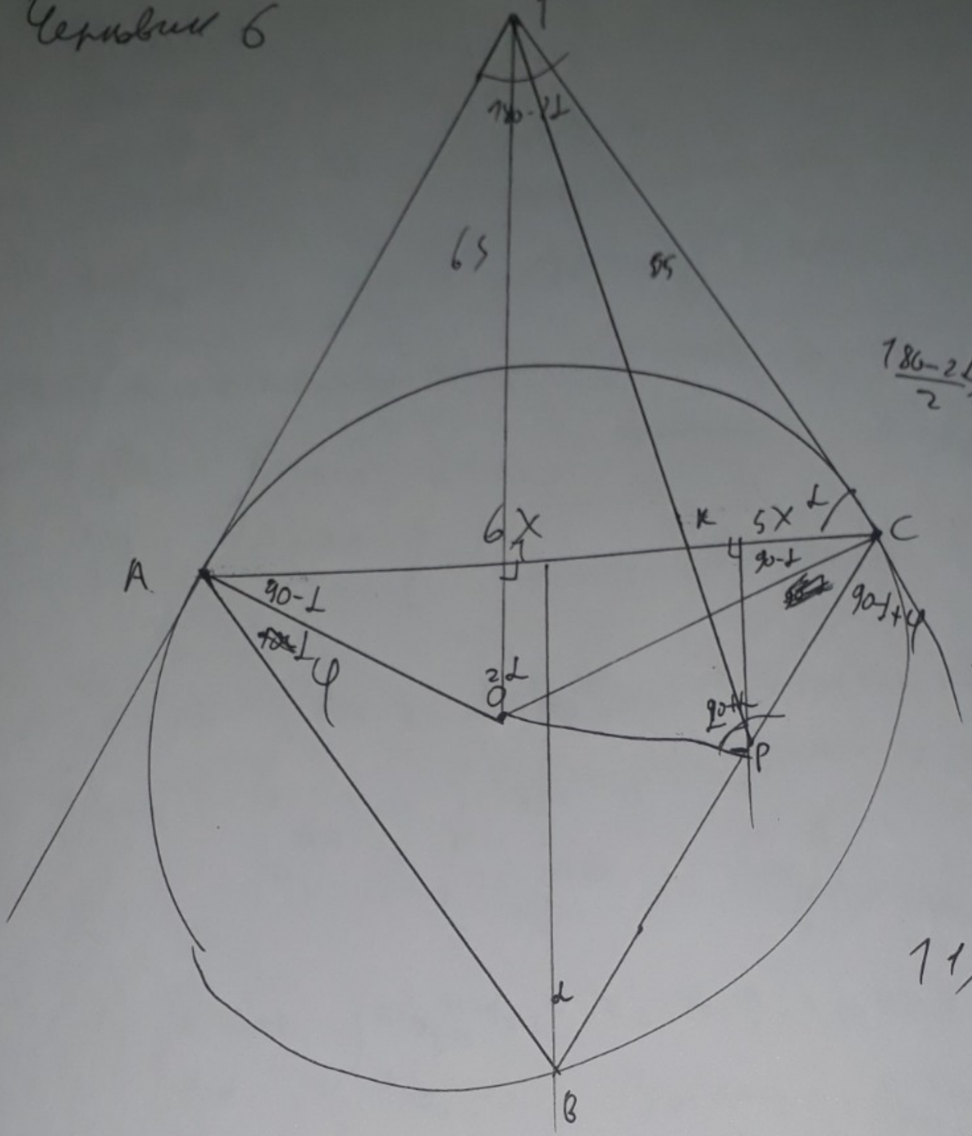
выбрать a $3\cdot 3$ способа, выбрать b $2\cdot 2$ способа, c - выбирается однозначно тем что остаётся

то есть из чисел $3^{\alpha_1}, 3^{\alpha_2}, 3^{\alpha_3}$, $5^{\beta_1}, 5^{\beta_2}, 5^{\beta_3}$ составить три числа вида $3^i\cdot 5^j$ $9\cdot 4$ способов

и в каждом способе еще $15\cdot 18$ вариантов для значений α_2, β_2

Итого $9\cdot 4\cdot 3\cdot 5\cdot 9\cdot 2 = 3^5\cdot 4\cdot 10 = 9720$ ~~[illegible]~~ троек

Черновик 6



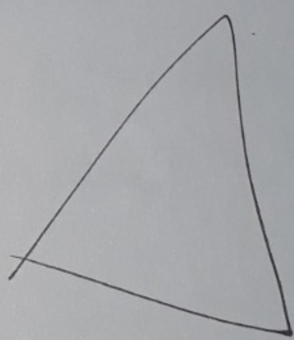
$$\frac{180-2\alpha}{2}=90-\alpha$$

$$360-4\alpha+\alpha=180$$

$$180=3\alpha$$

$$\alpha=60$$

11X.



$$\cancel{11}X\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot CP=\cancel{11}$$