Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104963**

ID профиля: **849632**

Вариант 18

Чистовик

1) $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=S$ Пусть d - разность ар. пр.

$a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)+(a_1+3d)+(a_1+4d)+(a_1+5d)+(a_1+6d)=S$

$7a_1+21d=S$

$\begin{cases} a_7\cdot a_{12}>S+20 \\ a_9\cdot a_{10}<S+44 \end{cases}$ $\begin{cases}(a_1+6d)(a_1+11d)>S+20 \\ (a_1+8d)(a_1+9d)<S+44\end{cases}$

$\begin{cases} a_1^2+11a_1d+6a_1d+66d^2>7a_1+21d+20 \\ a_1^2+9a_1d+8a_1d+72d^2<7a_1+21d+44 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1^2+17a_1d+66d^2-7a_1-21d-20>0 \\ a_1^2+17a_1d+72d^2-7a_1-21d-44<0 \end{cases}$

$\begin{cases} (a_1^2+17a_1d-7a_1-21d)+66d^2-20>0 \\ (a_1^2+17a_1d-7a_1-21d)+72d^2-44<0 \end{cases}$ Пусть $a_1^2+17a_1d-7a_1-21d=X$

$\begin{cases} X+66d^2-20>0 \\ X+72d^2-44<0 \end{cases}$ $\begin{cases} X>20-66d^2 \\ X<44-72d^2 \end{cases}$ $\cancel{44-72d^2<X}$

$20-66d^2<X<44-72d^2$ - значит,

$20-66d^2<44-72d^2$

$20-66d^2-44+72d^2<0$ $(d-2)(d+2)<0$ $+\quad -2 \quad 2 \quad +$ $d\in(-2;2)$

$6d^2-24<0$

$d^2-4<0$ точки $-1, 0$ - неподходят т.к. арифм. пр. - возрастающая. Подходит только $d=1$

$S=7a_1+21\cdot 1=7a_1+21$

$\begin{cases}(a_1+6\cdot 1)(a_1+11\cdot 1)>7a_1+21+20 \\ (a_1+8\cdot 1)(a_1+9\cdot 1)<7a_1+21+44\end{cases}$ $\begin{cases} a_1^2+11a_1+6a_1+66-7a_1-21-20>0 \\ a_1^2+9a_1+8a_1+72-7a_1-21-44<0\end{cases}$

$\begin{cases} a_1^2+10a_1+25>0 \\ a_1^2+10a_1+7<0 \end{cases}$ $(a_1+5)^2>0$ $a_1\neq -5$

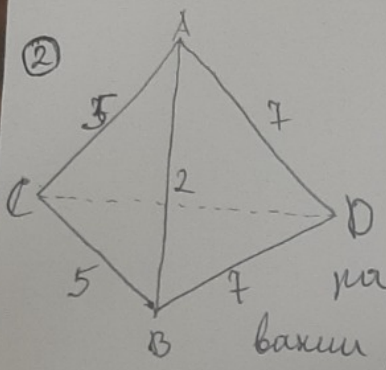
$D=100-4\cdot 7=72$ $a_1=\frac{-10+6\sqrt2}{2}=3\sqrt2-5\approx \cancel{-9,24}\ -0,757$

$(a_1+9,24)(a_1+0,757)<0$ $a\in(-9,24;-0,757)$ $a_2=\frac{-10-6\sqrt2}{2}=-3\sqrt2-5\approx-9,24$

$+\quad -9,24 \quad -0,757 \quad +$ т.к. a - целое число то $a\in[-9;-1]$

$\boxed{\text{Ответ: } a=-9;-8;-7;-6;-5;-4;-3;-2;-1.\ a\in[-9;-1]}$

Чистовик

② 

Т. к. $\triangle ACD = \triangle BCD$, то основание перпендикуляров из A и B на CD совпадают. Пусть эта точка — M., то плоскость AMB перпендикулярно CD, т.к. CD — параллельно оси цилиндра, то CD — ~~параллельно~~ перпендикулярно основании, плоскость AMB параллельно основании, то радиус описанной окружности $\triangle MAB$ равен окружности в основании R, то $2R \geq AB$ $2R \geq 2$ $R \geq 1$, т. к. R — наименьшее, то $R = 1$, AB — диаметр описаной окружности $\triangle MAB$, то $\angle AMB = 90°$, то $\triangle AMB$ — равнобедренный прямоугольный треугольник, то $AM = BM = \sqrt{2}$, то $CM = \sqrt{25-2} = \sqrt{23}$ и $MD = \sqrt{49-2} = \sqrt{47}$

$CD = \sqrt{23} + \sqrt{47}$

Ответ: $CD = \sqrt{23} + \sqrt{47}$

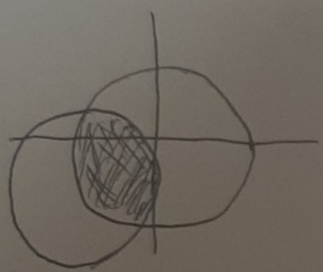
①

Чистовик

③ $\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 5\\ a^2+b^2\le \min(4a-2b,5)\end{cases}$ $\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 5\\ a^2+b^2\le 5\\ a^2+b^2\le 4a-2b\end{cases}$

$a^2+b^2\le 4a-2b$ т. е. $(a+2)^2+(b+1)^2\le 5$

$\begin{cases}a^2+b^2\le 5\\ (a+2)^2+(b+1)^2\le 5\end{cases}$ $a^2+b^2\le 10$ - означает, что $(a;b)$ находится внутри окружности с центром $(0;0)$ и радиусом $\sqrt5$, $(a+2)^2+(b+1)^2\le 5$ - означает, что $(a;b)$ находится внутри окружности с ~~цен~~ центром $(-2;-1)$ и радиусом $\sqrt5$, т.е.



$(x-a)^2+(y-b)^2\le 5$ - означает, что расстояние между точками $(x;y)$ и $(a;b)$ меньше равно $\sqrt5$, и то что для каждой пары $(a;b)$ строиться круг радиуса $\sqrt5$, а объединение всех этих кругов даст такую же фигуру, только изначальные радиусы окружностей образующих данную фигуру увеличины на определенную константу.

①

21104963 (U849632 M1295141)

Черновик

$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_7=S$

$a_7 \cdot a_{12} > S+20$

$a_9 a_{10} < S+44$

$a_1+a_1+d+a_1+2d+a_1+3d+a_1+4d+a_1+5d+a_1+6d=S$

$$\begin{cases} 7a_1+21d=S \\ (a_1+6d)(a_1+11d)>S+20 \\ (a_1+8d)(a_1+9d)<S+44 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1+6d)(a_1+11d)>7a_1+21d+20 \\ (a_1+8d)(a_1+9d)<7a_1+21d+44 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2+11a_1d+6a_1d+66d^2-7a_1-21d-20>0 \\ a_1^2+9a_1d+8a_1d+72d^2-7a_1-21d-44<0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2+17a_1d+66d^2-7a_1-21d-20>0 \\ a_1^2+17a_1d+72d^2-7a_1-21d-44<0 \end{cases}$$

$a+2b>0$

$a+3b<0$

$$\begin{cases} (a_1^2+17a_1d-7a_1-21d)+66d^2-20>0 \\ (a_1^2+17a_1d-7a_1-21d)+72d^2-44<0 \end{cases}$$

$\cancel{d^2-\frac{10}{33}d-\frac{10}{33}d-\frac{100}{33}}$

$d^2=\frac{10}{33}$ $\quad d=\pm\sqrt{\frac{10}{33}}$

$$\begin{cases} 66d^2-20>0 \\ 72d^2+14<0 \end{cases} \quad \begin{cases} 33d^2-10>0 \\ 36d^2+7<0 \end{cases} \quad \begin{cases} d^2-\frac{10}{33}>0 \\ d^2+\frac{7}{36}<0 \end{cases}$$

$\left(d-\sqrt{\frac{10}{33}}\right)\left(d+\sqrt{\frac{10}{33}}\right)\geq 0$

$d^2<-\frac{7}{36}$

$a_1^2+17a_1d-7a_1-21d=X$

$X+66d^2-20>0$

$X+72d^2-44<0$

$+ \quad -\sqrt{\frac{10}{33}} \quad - \quad \sqrt{\frac{10}{33}} \quad +$

$$\begin{cases} X>20-66d^2 \\ X<-72d^2+44 \end{cases}$$

$-72d^2+44>X>20-66d^2$

$-72d^2+44>20-66d^2$

$d=1$

$d=-1,0,1$

$-72d^2+44-20+66d^2>0$

$-6d^2+24>0$

$6d^2+24<0$

$d^2<-\frac{17}{3}$

$6d^2<-34$

$d^2<-\frac{34}{6}$

$d_1=$

$d^2<4 \quad d^2-4<0$

$-6d^2+24>0$

$(d-2)(d+2)<0$

$-6d^2-6>0$

$6d^2+6<0$

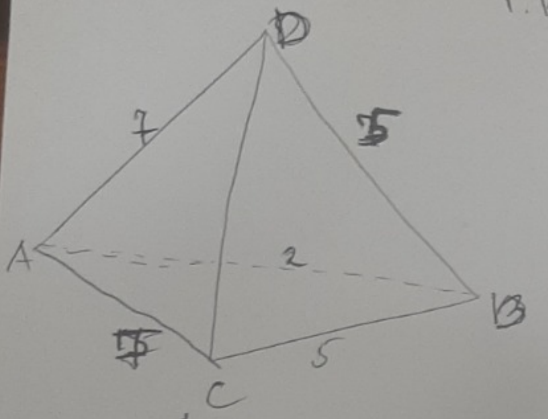
$6d^2<-6 \quad d^2<-1$

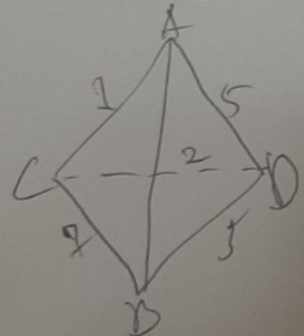
$6d^2-24<0$

$6d^2<24$

$+ \quad -2 \quad - \quad 2 \quad +$

т.к. ΔACD





т.к $\Delta ACD = \Delta BCD$ то основание перпендикуляров из A и B на CD совпадают, пусть эта точка M., то плоскость AMB перпендикулярно CD, т.к. CD-паралельно оси цилиндра, CD-перпендикулярно основании, плоскость AMB паралельна основании, то радиус описаной окружности ΔMAB равен окружности в основании R, то $2R \geq AB = 2$ $R \geq 1$, т.к. R-наименьше то $R = 1$ то AB- диаметр описаной окружности ΔMAB, то $\angle AMB = 90°$, то ΔAMB = равнобедренный прямоугольный треугольник то $AM = BM = \sqrt{2}$, то $CM = \sqrt{49-2} = \sqrt{47}$ и $MD = \sqrt{25-2} = \sqrt{23}$ то, $CD = \sqrt{47} + \sqrt{23}$

Ответ. $CD = \sqrt{47} + \sqrt{23}$

21104963 (U849632 M1295141)

1) $(a_1+6\cdot(-1))\cdot(a_1+11\cdot(-1))>S+20$

$a_1-6)(a_1-11)>S+20$

$a_1^2-11a-6a+66>7a_1+21\cdot(-1)$

$a_1^2-17a+66-7a_1+21>0$

$a_1^2-24a+87>0 \quad D=24^2-4\cdot 87=$

$a\neq-5$

$$\begin{cases}(a_1+6)(a_1+11)>7a_1+21+20\\(a_1+8)(a_1+9)<7a_1+21+44\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_1^2+11a+6a+66-7a-41>0\\a_1^2+9a+8a+72-7a_1-65<0\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_1^2+10a+25>0\\a^2+10a+7>0\end{cases} \quad D=100-4\cdot25=0$$

$a=\frac{-10}{2}=-5$

$(a+5)^2>0$

$100-4\cdot7=72$

$a=\frac{-10+\sqrt{72}}{2}=\frac{-10+6\sqrt{2}}{2}=$

$=3\sqrt{2}-5$

$-3\sqrt{2}-5$

$+ \quad - \quad +$

$-3\sqrt{2}-5 \quad 3\sqrt{2}-5$

$3\sqrt{2}\approx4,24$

$(x-(3\sqrt{2}-5))(x-(-3\sqrt{2}-5))$

$-3\sqrt{2}-5<a_1<3\sqrt{2}-5$

$-9,24<a_1<-0,757$

$a_1=-9,-8,-7,-6,-5,-4,-3,-2,-1$

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\leq5\\a^2+b^2\leq\min(4a-2b,5)\end{cases}$$

$x^2-2xa+a^2+y^2-2yb+b^2\leq5$

21104963 (U849632 M1295141)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104963**

ID профиля: **849632**

Вариант 18

Чистовик

4) $\begin{cases} НОД(a;b;c)=15 \\ НОК(a;b;c)=3^{15}\cdot 5^{18} \end{cases}$ $3^{15}\cdot 5^{18} \vdots a,b,c \Leftrightarrow$ $\begin{matrix} a=3^{x}\cdot 5^{y} \\ b=3^{x_1}\cdot 5^{y_1} \\ c=3^{x_2}\cdot 5^{y_2} \end{matrix}$ $\begin{cases} x,x_1,x_2\le 15 \\ y,y_1,y_2\le 18 \end{cases}$

$НОД(a;b;c)=15=3\cdot 5 \to \begin{cases} \min(x,x_1,x_2)=1 \\ \min(y,y_1,y_2)=1 \end{cases}$

$НОК(a;b;c)=3^{15}\cdot 5^{18} \to \begin{cases} \max(x,x_1,x_2)=15 \\ \max(y,y_1,y_2)=18 \end{cases}$

$\begin{cases} \min(x,x_1,x_2)=1 \\ \max(x,x_1,x_2)=15 \end{cases}$ – всего случаев $(2\cdot C_3^2\cdot 15-6)$, (-6) т.к. некоторые случаи считаем дважды (случаи: (1,1,15),(1,15,15) ..)

$2\cdot\frac{3!}{2!\cdot 1!}\cdot 15-6=2\cdot 3\cdot 15-6=84$ случаев.

$\begin{cases} \min(y,y_1,y_2)=1 \\ \max(y,y_1,y_2)=18 \end{cases}$ – здесь тоже самое $2\cdot C_3^2\cdot 18-6=2\cdot 3\cdot 18-6=102$ случаев.

Теперь посчитаем сколько всего троек $84\cdot 102=8568$ ~~случ~~.

Ответ: 8568 троек.

Чистовик

(5) $\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)$, $\log_{6x-14}(x-1)^2$, $\log_{x-1}(\frac{x}{3}+3)$

пусть $\frac{x}{3}+3=a$, $6x-14=b$, $x-1=c$

$\log_{a^{1/2}} b$, $\log_b c^2$ $\log_c a$ $\log_c a=\frac{\log_b a}{\log_b c}=\log_b(a-c)$

$2\log_a b$ $2\log_b c$ $\log_c a$ $2\log_a b=2\frac{1}{\log_b a}$

$\frac{2}{\log_b a}$ $2\log_b c$ $\log_b(a-c)$

1) $\frac{2}{\log_b a}=2\log_b c$

$2\log_b c\cdot\log_b a=2$

$\log_b c\cdot\log_b a=1$

2) $2\log_b c=\log_b(a-c)$

$\log_b c^2=\log_b(a-c)$

(2)

$c^2=a-c$

$(x-1)^2=\frac{x}{3}+3-x+1$ $D=16+4\cdot3\cdot9=124$

$x^2-2x+1=\frac{x}{3}+4-x$ $x=\frac{4+\sqrt{124}}{6}$ $x_2=\frac{4-\sqrt{124}}{6}$

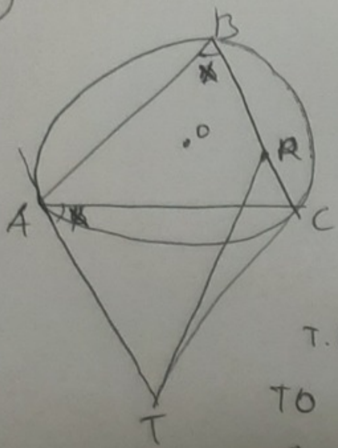
$x^2-x-3-\frac{x}{3}=0$

$x^2-\frac{4x}{3}-3=0$ $\frac{2}{\log_{\cdot}}$

$3x^2-4x-9=0$

Чистовик

6



а) Пусть $\angle ABC = x$, то $\angle TAC = \angle TCA = x$ и $\angle AOC = 2x$, то $\angle APC = 2x$ и $\angle ATC = 180 - 2x$, то APCT – цикличны, то $\angle APT = \angle TPC = x$

т.к. $S_{APK} : S_{PCK} = 6:5$, то $AK:KC = 6:5$

т.к. PK – биссектриса $\angle APC$ то $AK:KC = AP:PC$.

т.к. $\angle ABC = x$ и $\angle APC = 2x$, то $\angle BAP = x$ то $BP = CP$

то $6:5 = AK:KC = AP:PC = BP:CP$.

$S_{BPA} : S_{APC} = BP:PC = 3 : \frac{5}{2}$, а $S_{APC} =$

2

21104963 (U849632 M1295142)

НОД $(a;b;c)=15$ $a=3^{x}\cdot5^{y}$ $x, x_1, x_2 \le 15$

НОК $(a,b,c)=3^{15}\cdot5^{18}$ $b=3^{x_1}\cdot5^{y_1}$ $y, y_1, y_2 \le 18$

НОД $(a,b,c)=3\cdot5$ $c=3^{x_2}\cdot3^{y_2}$ НОД $(a,b,c)=15=3\cdot5$ $\min(x,x_1,x_2)=1$

$\min(y,y_1,y_2)=1$

$\log_{\sqrt{(\frac{x}{3}+3)}}(6x-14)$, $\log_{6x-14}(x-1)^2$, $\log_{x-1}(\frac{x}{3}+3)$

$2\log_{(\frac{x}{3}+3)}(6x-14)$ $2\frac{1}{\log_{(6x-14)}(\frac{x}{3}+3)}=\log_{6x-14}(x-1)^2$ $+\begin{matrix}8400\\168\end{matrix}$

$2\frac{\log_{(\frac{x}{3}+3)}6x}{\log_{(\frac{x}{3}+3)}14}$

НОК $(a,b,c)=3^{15}\cdot5^{18}\to \max(x,x_1,x_2)=15$

$\max(y,y_1,y_2)=18$

$6\cdot15-6=84$

$6\cdot18-6=102$ $102\cdot84=8568$ и

$2\log_{(\frac{x}{3}+3)}(6x-14)$ $2\log_{6x-14}(x-1)$ $\log_{x-1}(\frac{x}{3}+3)$

$3^{19}\cdot11^{15}$

$2\frac{1}{\log_{6x-14}(\frac{x}{3}+3)}=2\log_{6x-14}(x-1)$

$18\times6=108$ 102×84 $3323\cdot11$

$\log_{6x-14}(\frac{x}{3}+3)\cdot\log_{6x-14}(x-1)=1$

$8408+816=8568$ 114

$6\cdot19-6=108$

$6\cdot15-6=84$

$\log_{6x-14}(\frac{x}{3})\cdot\log_{6x-14}3\cdot\log_{6x-14}x\cdot\log_{6x-14}1$

$2\cdot\frac{1}{\log_{x-1}(6x-14)}=\log_{x-1}(\frac{x}{3}+3)$

②

$\log_{x-1}\frac{x}{3}\cdot\log_{x-1}3\cdot\frac{\log_{x-1}\cdot6x}{\log_{x-1}14}=2$

$2\log_{(\frac{x}{3}+3)}(6x-14)=2\frac{\log_{(\frac{x}{3}+3)}6x}{\log_{(\frac{x}{3}+3)}14}$

21104963 (U849632 M1295142)

оцен. $\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)$, $\log_{(6x-14)}(x-1)^2$, $\log_{(x-1)}(\frac{x}{3}+3)$

Пусть $\sqrt{\frac{x}{3}+3}^{\,a} = 6x-14$,

$\frac{x}{3}+3=a$ $\quad \log_{\sqrt{a}} b \quad \log_b c^2 \quad \log_c a$

$6x-14=b$

$x-1=c$ $\quad 2\log_a b \quad 2\log_b c \quad \log_c a$

$\log_c a = \frac{\log_b a}{\log_b c} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{\log_a b}} \quad 2\log_a b = 2\frac{1}{\log_b a}$

$\log_3 6 = \frac{\log_6 6}{\log_6 3} = \frac{1}{\quad}$

~~$2\log_a b$~~ $\frac{2\cdot 1}{\log_b a}$ $2\log_b c$ $\frac{\log_b a}{\log_b c}$

$\log_b(a-c) = 2\log_b c^2$

$a-c=c^2$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times\ 9 \\ \hline 108 \\ +\ 16 \\ \hline 124 \end{array}$$