Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104834**

ID профиля: **849782**

Вариант 18

№ 1. ~~Зам~~ Пусть $d = a_2 - a_1$. Заметим, что

$$a_1^2 + 66d^2 + 17a_1d = (a_1+6d)(a_1+11d) = a_7a_{12} > 7a_1 + 21d + 20$$

$$+\quad 7a_1 + 21d + 44 > a_9a_{10} = (a_1+8d)(a_1+9d) = a_1^2 + 72d^2 + 17a_1d$$

$$24 > 6d^2$$
$$\Updownarrow$$
$$4 > d^2$$
$$\Updownarrow$$
$$2 > d$$

Т.к. $d \in \mathbb{Z}$ мы имеем, что $d = 1$, т.к a_i - возврастающая.

Тогда имеем, что:

$$\begin{cases} a_1^2 + 66 + 17a_1 > 7a_1 + 21 + 20 \\ 7a_1 + 21 + 44 > a_1^2 + 72 + 17a_2 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 25 + 10a_1 > 0 \\ 0 > a_1^2 + 10a_1 + 7 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} (a_1+5)^2 > 0 \\ 0 > a_1^2 + 10a_1 + 7 \end{cases}$$

Из первого неравенство следует $a_1 \neq -5$

Из второго неравенства следует то, что:

$$2 > (a_1+1)(a_1+9)$$

что верно для всех $a_1 \in [-9, -1]$. Причем неверно для остальных чисел, т.к если $a_1 \geq 0$, то $(a_1+1)(a_1+9) \geq 9$, а если $a_1 \leq -10$ $(a_1+1)(a_1+9) \geq 9$. Поэтому получаем, что:

$a_1 = -9, -8, -7, -6, -4, -3, -2, -1.$

21104834 (U849782 M1300927)

№2. Давайте введем декартовы координаты в задачу. Пусть ось цилиндра параллельна направлению $\vec{z}$, а также основания лежит на плоскости $z=0$. Пусть также прямая CD имеет характеристики $x=0$, $y=0$. Также пусть ось цилиндра, проходящая сквозь центр основания имеет характеристики $x=0$, $y=t$. (Таким образом центр окружности основания это $(0,t,0)$). Заметим, что тогда

$$C=(0,0,c),\ D=(0,0,d),\ A=(x,y,h) \text{ и тогда}$$

$B=(-x,y,h)$, т.к такая точка B - единственная.

Замечаем, что

$$AB=2 \longleftrightarrow 4x^2=4 \to x^2=1$$
$$AC=5 \longleftrightarrow x^2+y^2+(c-b)^2=25$$
$$AD=7 \longleftrightarrow x^2+y^2+(d-b)^2=49$$

То, что A, B, C, D лежат на боковой поверхности означает что

$$t^2=x^2+(t-y^2)$$
$$\Updownarrow$$
$$t^2=1+(t-y)^2$$
$$\Updownarrow$$
$$0=1-2ty+y^2$$
$$\Updownarrow$$
$$t=\frac{y^2+1}{2y}$$

Функция $\frac{y^2+1}{2y}$ имеет минимум 1, т.к

$$\frac{y^2+1}{2y}\geq 1 \longleftrightarrow y^2+1\geq \pm 2y \longleftrightarrow (y\pm 1)^2\geq 1.$$

№2 Оно достигает минимума при $y=\pm 1$, т.е

при $y^2=1$. Если $y^2=1$, тогда

$$\begin{cases} 2+(c-b)^2=25 \\ 2+(d-b)^2=49 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} (c-b)^2=23 \\ (d-b)^2=47 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{matrix} c-b=\pm\sqrt{23} \\ d-b=\pm\sqrt{47} \end{matrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$CD=|c-d|=\left|\pm\sqrt{23}\pm\sqrt{47}\right|=$$

$$=\sqrt{23}+\sqrt{47} \text{ либо } \sqrt{47}-\sqrt{23}.$$

Это и есть ответ.

№ 3

Заметим, что

$$a^2+b^2 \leqslant \min(4a-2b, 5)$$

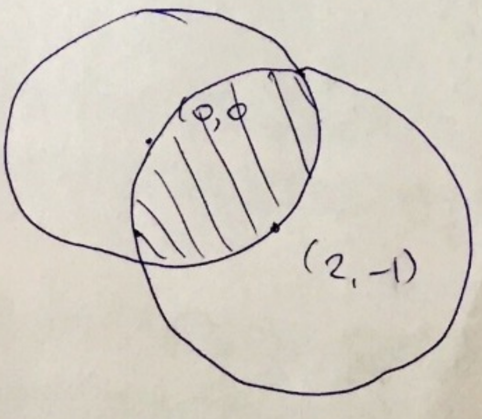
$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} a^2+b^2 \leqslant 4a-2b \\ a^2+b^2 \leqslant 5 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} (a-2)^2+(b+1)^2 \leqslant 5 \\ a^2+b^2 \leqslant 5 \end{cases}$$

Первое неравенсто означает что a, b должны лежать внутри окружности с центром ~~и радиусом~~ $(2,-1)$. Второе неравенство означает, что a, b с центром $(0,0)$. Обе окружности с радиусом $\sqrt{5}$. Визуализация будет таковой:



$d=0$

$d=1$

$a_1, a_2, \ldots \qquad a_7 =$

$a_1 + (a_1+d) + \ldots + (a_1+6d) = 7a_1 + 21d$

$a_1^2 + 66d^2 + 17a_1d = (a_1+6d)(a_1+11d) > \cancel{0} + 7a_1 + 21d + 20$

$7a_1 + 21d + 44 > (a_1+8d)(a_1+9d) = a_1^2 + 17a_1d + 72d^2$

$24 > 6d^2$

$4 > d^2$

$2 > d$

$a_1^2 > 7a_1 + 20$

$a_1^2 < 7a_1 + 44$

$2 > (a_1+1)(a_1+9)$

$a_1 = -1, 9$

0

$(x-a)^2+(y-b)^2 \leq 5$

$a^2+b^2 \leq 5$

$(a-2)^2+(b+1)^2 \leq 5$

$(2,-1)$

$a^2+b^2 \leq 4a-2b$

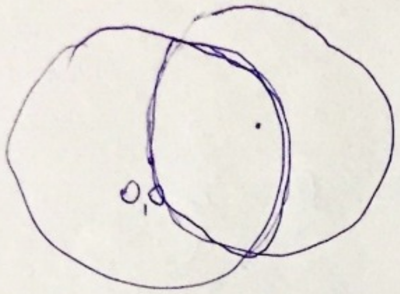
$(a-2)^2+(b+1)^2 \leq 5$

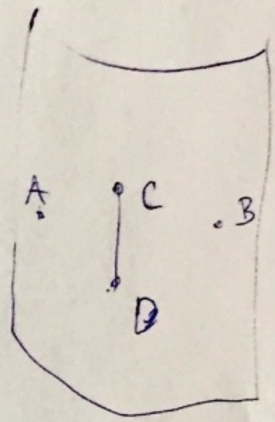
(x,y)

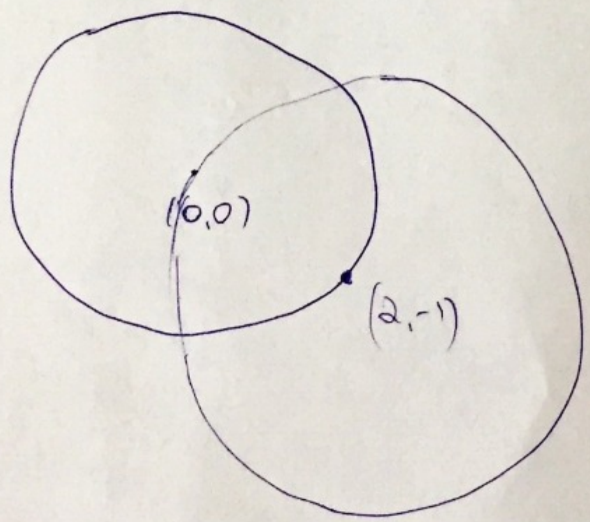
(a,t)

$(0,0)$

$(0,0)$







$(0,0,c)$

$(0,0,d)$

(x,y,h)

$(-x,y,h)$

$(0,t,0)$

$t^2 = x^2 + (t-y)^2$

$x^2 + y^2 + (e-h)^2 = 25$

$x^2 + y^2 + (d-h)^2 = 49$

$4x^2 = 4 \to x = 1$

$t = 1$

$1 + y^2 \leq 25$

$y^2 \leq 24$

$t^2 = 1 + (t-y)^2$

$\Updownarrow$

$0 = 1 - 2ty + y^2$

$\downarrow$

$2ty = y^2 + 1$

$t = \dfrac{y^2+1}{2y}$

$\dfrac{y}{2} + \dfrac{y^{-1}}{2} =$

$= \dfrac{1}{2} - \dfrac{y^{-2}}{2} =$

$= \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2y^2} = 0$

$\dfrac{2y}{2\sqrt{24}} = \dfrac{\sqrt{24}}{2} = \sqrt{6}$

$y = \pm 1$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104834**

ID профиля: **849782**

Вариант 18

№4 Заметим, что каждое из чисел a, b, c можно представить в виде $3^{\alpha}\cdot5^{\beta}$, т.к $НОК(a,b,c) = 3^{15}\cdot5^{18} \vdots a, b, c$ на каждую из них.

Пусть $a=3^{\alpha_1}5^{\alpha_2}$, $b=3^{\beta_1}5^{\beta_2}$, $c=3^{\theta_1}5^{\theta_2}$, тогда

$\min(\alpha_1, \beta_1, \theta_1) = 1$ $\quad$ $\min(\alpha_2, \beta_2, \theta_2) = 1$

$\max(\alpha_1, \beta_1, \theta_1) = 15$ $\quad$ $\max(\alpha_2, \beta_2, \theta_2) = 18$

Заметим, что множества $\{\alpha_1, \beta_1, \theta_1\}$ и $\{\alpha_2, \beta_2, \theta_2\}$ не зависят друг от друга. Поэтому можно найти кол-во возможных вариантов для обеих из них, чтобы получить ответ перемножив затем.

Если $\{\alpha_1, \beta_1, \theta_1\} = \{1, 1, 15\} \to$ три варианта

$\{\alpha_1, \beta_1, \theta_1\} = \{1, 15, 15\} \to$ три варианта

$\{\alpha_1, \beta_1, \theta_1\} = \{1, 15, x\}$ при $1<x<15 \to$ вариантов $6\cdot13$.

Если $\{\alpha_2, \beta_2, \theta_2\} = \{1, 1, 18\} \to$ три варианта

$\{\alpha_2, \beta_2, \theta_2\} = \{1, 18, 18\} \to$ три варианта

$\{\alpha_2, \beta_2, \theta_2\} = \{1, x, 18\}$ $1<x<18 \to$ вариантов $6\cdot16$

Тогда для первого множества $\to 3+3+6\cdot13 = 6\cdot14$ вариантов

для второго множества $\to 3+3+6\cdot16 = 6\cdot17$ вариантов

Всего кол-во: $(6\cdot14)\cdot(6\cdot17)$ ~~вар~~ троек a, b, c.

21104834 (U849782 M1300928)

Чистовик | Стр 1.

№5. Заметим, что $\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$ где ln – натуральный логарифм.

Тогда пусть $\{t, t, t-1\} = \{\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14), \log_{\sqrt{6x-14}}(x-1)^2,$

$\log_{x-1}(\frac{x}{3}+3)\}$. Заметим, что

$$t \cdot t \cdot (t-1) = \frac{\ln 6x-14}{\ln\sqrt{\frac{x}{3}+3}} \cdot \frac{\ln(x-1)^2}{\ln(6x-14)} \cdot \frac{\ln(\frac{x}{3}+3)}{\ln(x-1)} = 4, \text{ т.к } \frac{\ln a^2}{\ln a} = 2$$

Тогда

$$t^3 - t^2 - 4 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$(t-2)(t^2+t+2) = 0$$

Заметим, что $t^2+t+2 \neq 0$, т.к $t^2+t+\frac{1}{4}+\frac{3}{4} = (t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4} > 0$.

$$t-2=0$$

$$\Downarrow$$

$$t=2$$

Осталось найти подходящие x

~~Допустим, что~~ $\cancel{\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14) = 1}$, ~~тогда~~

$$\cancel{6x-14 = \sqrt{\frac{x}{3}+3}} \rightarrow \cancel{36x^2-168x+196 = \frac{x}{3}+3}$$

$$\cancel{108x^2-505x+569=0}$$

$$\Downarrow$$

$$\cancel{x = \frac{505 \pm \sqrt{9917}}{216}}$$

~~Однако в таком~~ случае:

Заметим, что $\frac{\ln \frac{x}{3}+3}{\ln(x-1)}$ либо 1 либо 2.

21104834 (U849782 M1300928)

Чистовик | Стр 2.

№5 Если оно равно 1, тогда

$$\frac{x}{3}+3=x-1 \rightarrow 4=\frac{2x}{3} \rightarrow x=6$$

Тогда

$$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)=\log_{\sqrt{5}}22 \neq 1{,}2$$

Если оно ровно 2, то тогда

$$\left(\frac{x}{3}+3\right)^2=(x-1)$$
$$\downarrow$$
$$(x+9)^2=9x-9$$
$$\downarrow$$
$$x^2+18x+90=9x$$
$$\downarrow$$
$$x^2+9x+90=0$$

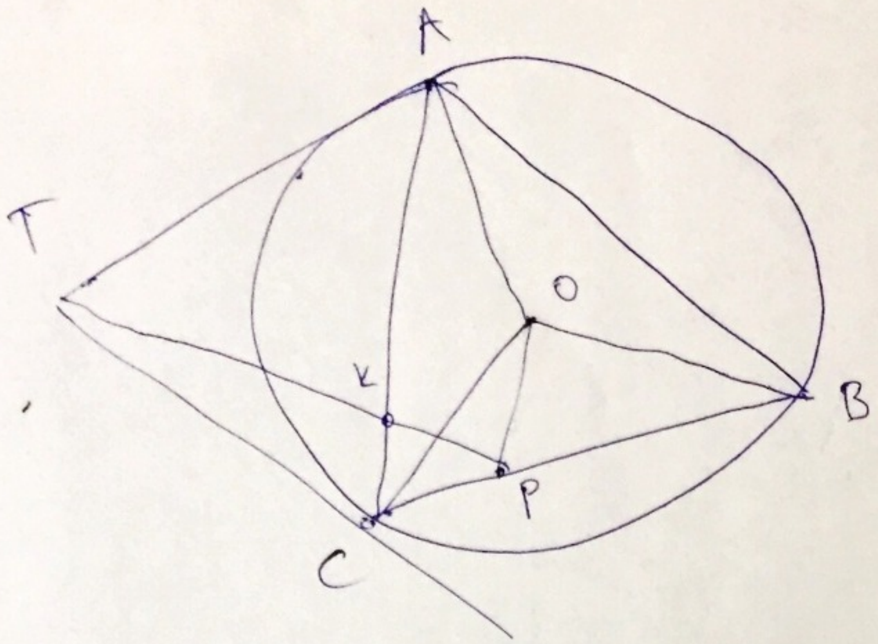
Однако это невозможно, потому что

$$\Delta=81-4\cdot 90<0.$$

Ответ $\rightarrow$ никакой x.

21104834 (U849782 M1300928) Чистовик Стр 3.

№6. П.



$$\overset{6/5}{\overset{\parallel}{\frac{S[APK]}{S[CPK]}}} = \frac{AK}{CK} = \frac{AP}{CP}$$ (потому что T тоже лежит на окружности ⊙ AOC из за чего ∠APT = ∠CPT)

$$\frac{AP}{CP} = \cancel{\sin(2\angle B)}\ \frac{\sin\angle AOP}{\sin\angle COP} = \frac{\sin\angle C}{\sin(\angle C - 2\angle B)} = \frac{\sin\angle C}{\sin(\angle 180^\circ - \angle C - 2\angle B)}$$

Теперь найдем △ABC :

$$\frac{S(\triangle ABC)}{S(\triangle APC)} = \frac{BC}{PC} = 1 + \frac{BP}{PC} = 1 + \frac{S(BOP)}{S(COP)} = 1 + \frac{BO\cdot OP\cdot \sin\angle BOP}{CO\cdot OP\cdot \sin\angle COP} =$$

$$= 1 + \frac{\sin\angle BOP}{\sin\angle COP} = 1 + \frac{\sin(2\angle A - (\angle 180 - \angle C - 2\angle B))}{\sin(\angle 180^\circ - \angle C - 2\angle B)} =$$

$$= 1 + \frac{\sin(\angle A + \angle B)}{\sin(\angle 180 - \angle C - 2\angle B)} = 1 + \frac{6}{5} = \frac{11}{5}$$

Получаем, что $S(\triangle ABC) = S(\angle APC)\cdot\frac{11}{5} = \frac{121}{5}$

Пусть $tg\angle B = \frac{1}{2}$

$$\downarrow$$

$$\frac{\sin\angle B}{\cos\angle B} = \frac{1}{2}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{\cos^2\angle B} = \frac{5}{4}$$

$$\downarrow$$

$\cos\angle B = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$, т.к ABC - остроугольный

$$\downarrow$$

$$\sin\angle B = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\cos 2B = 1 - 2\sin^2\angle B = \frac{3}{5}$$

$$\sin 2B = 2\sin\angle B\cos\angle B = \frac{4}{5}$$

Тогда $\frac{6}{5} = \frac{\sin\angle C}{\sin\angle C + 2\angle B} = \frac{\sin\angle C}{\sin\angle C\cdot\cos\angle 2B + \cos\angle C\cdot\sin\angle 2B} = \frac{\sin\angle C}{\sin\angle C\cdot\frac{3}{5} + \cos\angle C\cdot\frac{4}{5}}$

$$\frac{5}{6} = \frac{3}{5} + ctg\angle C\cdot\frac{4}{5} \to ctg\angle C = \frac{7}{24} = \frac{\cos\angle C}{\sin\angle C} \to$$

$$\to \frac{7^2}{24^2} + 1 = \frac{1}{\sin^2\angle C} \to \sin\angle C = \frac{24}{25} \to \cos\angle C = \frac{7}{25}$$

$$\sin\angle A = \sin(180 - \angle B - \angle C) = \sin(\angle B + \angle C) = \sin\angle B\cdot\cos\angle C + \sin\angle C\cdot\cos\angle B =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{7}{25} + \frac{24}{25}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{55}{25\sqrt{5}}$$

Таким образом мы имеем, что

$$S(\Delta ABC) = \frac{121}{5} = AC\cdot AB\cdot\sin\angle A = AC^2\cdot\frac{\sin\angle C\cdot\sin\angle A}{\sin\angle B} = AC^2\cdot\frac{\frac{24}{25}\cdot\frac{55}{25\sqrt{5}}}{\frac{1}{\sqrt{5}}} =$$

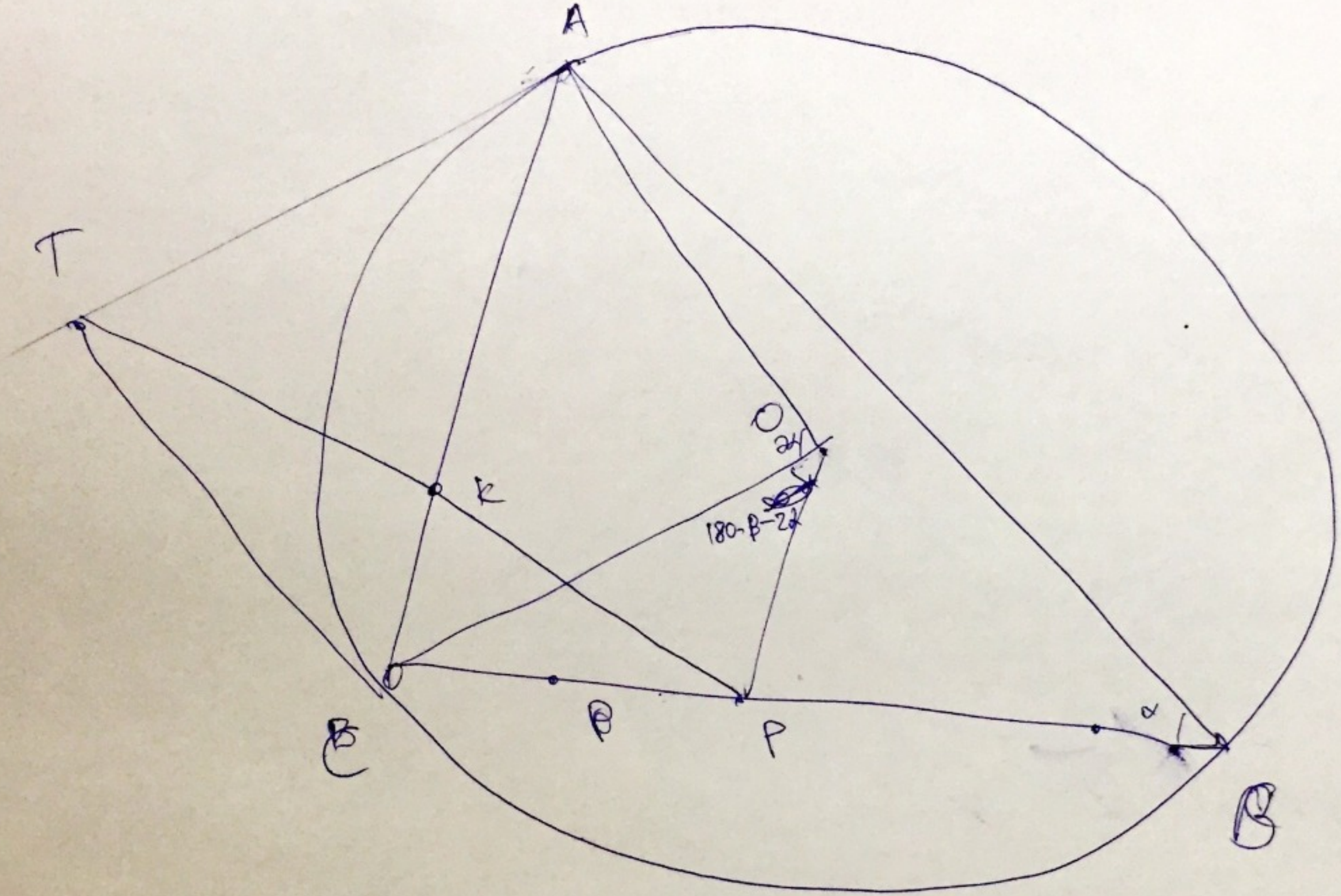
$$= AC^2\cdot\frac{24\cdot 55}{25^2} \to AC^2 = \frac{121}{5}\cdot\frac{25^2}{24\cdot 55} = \frac{11\cdot 25^2}{25\cdot 24} = \frac{11\cdot 25}{24}$$

$$\downarrow$$

Ответ $AC = \sqrt{\frac{11\cdot 25}{24}}$

$180-2\alpha$

$90-\alpha, \; 90-\alpha$



$$\frac{\sin\beta}{\sin\beta+2\alpha} = \frac{\cancel{\sin(90+\alpha)}}{\sin(90-\alpha)} = \frac{6}{5}$$

$tg\,B = \frac{\sin B}{\cos B}$

24×24

96

48

5749

1

25×25

125

50

$$\frac{5}{4} = tg^2 B + 1 = \frac{1}{\cos B^2}$$

625

$$\frac{25}{30} - \frac{18}{30}$$

$$\frac{576+49}{526}$$

$$\frac{7}{30}\cdot\frac{5}{4}$$

$$\frac{7}{24}$$

$$\frac{2}{\sqrt{5}} \qquad \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}} (6x-14)$, $\log_{\frac{6x-14}{2}}$

log

$\frac{\ln(6x-14)}{\ln\sqrt{\frac{x}{3}+3}}$, $\frac{\ln(x-1)^2}{\ln(6x-14)}$, $\frac{\ln(\frac{x}{3}+3)}{\ln x-1}$ =

$\log_m a + \log_m b = \log_m ab$

$\log_{2m} a = \log_m \sqrt{a}$

= 4

$t^{2m} = a$ $\quad \log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$

$t \cdot t(t-1) = 4$

$t^3 - t^2 = 4$

$(t^2+t+2)(t-2) = 0$

$$\begin{array}{r} 168 \\ \times\ 3 \\ \hline 504 \end{array} \quad 2 \quad 2$$

$$\begin{array}{r} 196 \\ \times\ 3 \\ \hline 528 \\ -\ 9 \\ \hline 569 \end{array} \quad 1 \quad 2$$

$$\begin{array}{r} 28 \\ \times\ 6 \\ \hline 168 \end{array} \quad 4$$

$t^3 - t^2 - 4 \mid t-2$
$-\ t^3 - 2t^2 \qquad t^2+t+2$
$t^2 - 4$

$t^3 + t^2 + 2t$
$-2t^2 - 2t - 4$

$\ln a = 2\ln b$ $\quad \ln \frac{a}{2b^2} = 0$

HO2 (a,b,c)

$\left(\frac{289 \pm \sqrt{9117}}{216}\right)^2 =$

$3^{\alpha_1} 5^{\alpha_2}$

$\min(\alpha_1, \beta_1, \theta_1) = 1$
$\max(\alpha_1, \beta_1 \theta_1) = 15$

$\frac{x}{3} + 3 = 2(x-1$

1, 15, x   2   14

$\left(\frac{x}{3}+3\right)^2 = (x-1)$

6 + 16·6 =

1, 1, 15   1, 15, 15
1, 15, 1   15, 1, 15
15, 1, 1   15, 15, 1

$$\begin{array}{r} 505 \\ \times\ 505 \\ \hline 2525 \\ +\ 2525\ \ \\ \hline 255025 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 255025 \\ -\ 245808 \\ \hline 9117 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4.569 \\ 108 \\ \hline 4552 \\ +\ 569\ \ \\ \hline 61452 \\ \times\ 4 \\ \hline 245808 \end{array}$$

7

2

13·6

505^2

$4 = \frac{2x}{3}$

13.

$(x+9)^2 = 9x - 9$

$x = 6$

$x^2 + 18x + 81 = 9x - 9$

$x^2 + 9x + 90 = 0$

81   4.90