Часть 1

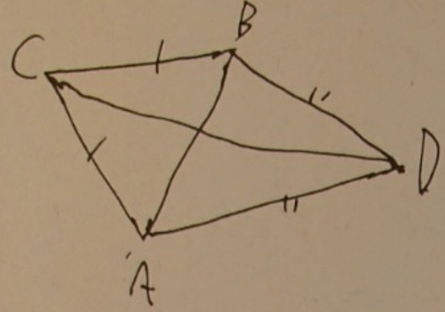
Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

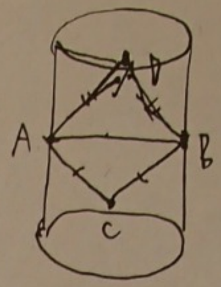
Шифр: **21104722**

ID профиля: **830918**

Вариант 18

Черновик Математика, 11 кл.





$(x-a)^2+(y-b)^2 \leq 5$

и $x^2-2xa+a^2+y^2-2yb+b^2 \leq 5$

$x^2-2xa+\cancel{a}\,y^2-2yb+\min(4a-\cancel{\ }2b, 5) \leq 5$

Если $4a-2b \geq 5$, то

$x^2-2xa+y^2-2yb=0$

$x(x-2a)+y(y-2b)=0$

$\cancel{a}\ b=2a$

Черновик

Математика, 11кл.

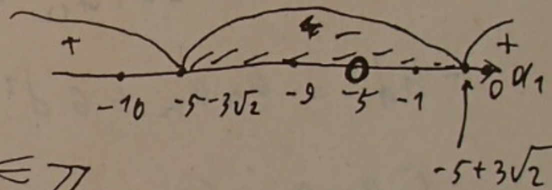
$$\begin{cases} a_1^2 + 17a_1 + 66 > 7a_1 + 41 \\ a_1^2 + 17a_1 + 72 < 7a_1 + 65 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0 \\ a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a_1+5)^2 > 0 \\ (a_1 + 5 - 3\sqrt{2})(a_1 + 5 + 3\sqrt{2}) < 0 \end{cases}$$

$D = 100 - 28 = 72 = (6\sqrt{2})^2$

$a_1; a_2 = \dfrac{-10 \pm 6\sqrt{2}}{2}$ — $-5+3\sqrt{2}$; $-5-3\sqrt{2}$

$3\sqrt{2} = \sqrt{18}$; $< \sqrt{25} = 5$; $> \sqrt{16} = 4$



Итого, ~~$a_1 \in [-9; -8]$~~, $a_1 \in \mathbb{Z}$

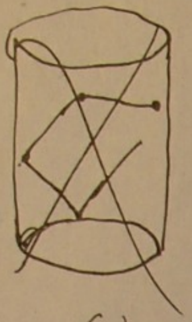
$a_1 \in [-9; -1] \setminus \{-5\}$

$d = -1$: $\begin{cases} (a_1 - 6\cdot 1)(a_1 - 11\cdot 1) > \dfrac{2a_1 - 6\cdot 1}{2}\cdot 7 + 20 \\ (a_1 - 6\cdot 1)(a_1 - 11\cdot 1) + 6\cdot(-1)^2 < \dfrac{2a_1 - 6\cdot 1}{2}\cdot 7 + 44 \end{cases}$

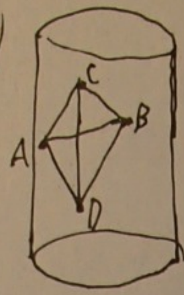
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 - 17a_1 + 66 > 7a_1 - 1 \\ a_1^2 - 17a_1 + 72 < 7a_1 + 23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 - 24a_1 + 67 > 0 \\ a_1^2 - 24a_1 + 49 < 0 \end{cases}$$

21104722 (U830918 M1303382)

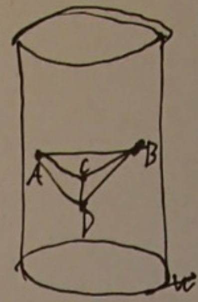
Имеем 2 возм. случая:



1)



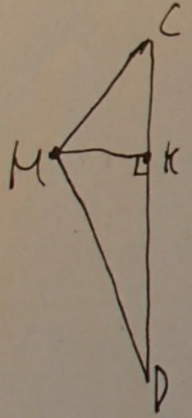
2)



(1) C и D лежат по разные стороны от сечения, парал. осн., через AB

по одну

1) ☆ $\triangle DCH$: $\exists$ (·) K — осн. высоты из H к CD.



H — центр диаметра, т. е. лежит на оси; CD лежит на бок. стор. цилиндра и парал. оси

$\Rightarrow HK = r = \frac{AB}{2} = 1$

из $\triangle ACH$: $CH^2 = AC^2 - AH^2 = 25 - 1 = 24$

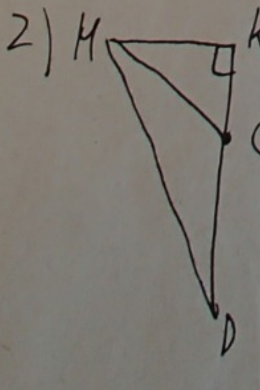
из $\triangle CHK$: $CK^2 = CH^2 - HK^2 = 23$

из $\triangle ADH$: $DH^2 = AD^2 - AH^2 = 49 - 1 = 48$

из $\triangle DHK$: $DK^2 = DH^2 - HK^2 = 47$

(*) $CD = CK + KD = \sqrt{23} + \sqrt{47}$

2)



аналогично вплоть до (*).

далее:

$CD = DK - CK = \sqrt{47} - \sqrt{23}$.

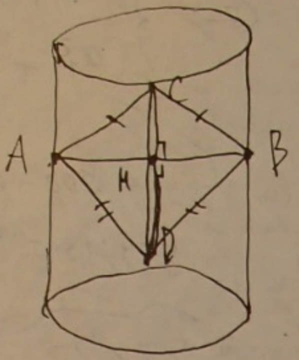
Ответ: $\left[\begin{array}{l} CD = \sqrt{23} + \sqrt{47} \\ CD = \sqrt{47} - \sqrt{23} \end{array}\right.$

21104722 (U830918 M1303382)

Чистовик

Математика, 11 кл.

№2.



Дано:
тетр. ABCD впис. в цилиндр.
$AB=2$, $AC=CB=5$, $AD=DB=7$,
$CD \parallel$ оси, радиус цилиндра наим.

Найти: $CD=?$

Решение:] (·) H — середина AB.

☆ △ADB: △ADB — равнобедр., AB — осн. => $DH \perp AB$,
т.к. DH — не только медиана, но и высота.

☆ △ACB: △ACB — равнобедр., AB — осн. => $CH \perp AB$
(аналогично)

☆ пл-ть (DCH). пл-ть содержит перпендикуляр к осн. цил. CD => (DCH) ⊥ (осн. цил.)
пл-ть также содержит перпендикуляры CH и DH к AB => (DCH) ⊥ AB.

Отсюда имеем AB ∥ (осн. цил.), т.е. AB — хорда в сечении, параллельном (осн. цил.)

Поскольку радиус цилиндра наименьший, имеем $AB=2r$ (AB — диаметр)

21104722 (U830918 M1303382)

Чистовик

Математика, 11 кл.

$$\begin{cases} a_1^2 + 17a_1 + 66 > 7a_1 + 41 \\ a_1^2 + 17a_1 + 72 < 7a_1 + 65 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0 \\ a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0 \end{cases}$$

$D = 100 - 28 = 72 = (6\sqrt{2})^2$

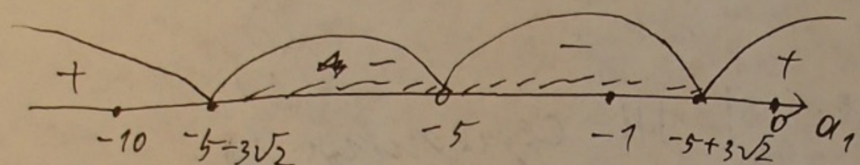
$a_{1_1;1_2} = \dfrac{-10 \pm 6\sqrt{2}}{2}$ / $-5+3\sqrt{2}$ \ $-5-3\sqrt{2}$

$3\sqrt{2} = \sqrt{18} < \sqrt{25} = 5$

$\vee$

$\sqrt{16} = 4$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a_1+5)^2 > 0 \\ (a_1 + 5 + 3\sqrt{2})(a_1 + 5 - 3\sqrt{2}) < 0 \end{cases}$$



Итого, $a_1 \in [-9; -1] \setminus \{-5\}$, $a_1 \in \mathbb{Z}$.

* $d = -1$. Тогда прогрессия убывает, что противоречит условию.

Ответ: $a_1 \in [-9; -5) \cup (-5; -1]$, при этом $a_1 \in \mathbb{Z}$.

21104722 (U830918 M1303382)

Чистовик Математика, 11 кл.

№1.

$S = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_7$, где $a_1, a_2, a_3, \ldots$ — возрастающ. арифм. прогр., сост. из целых чисел

$a_7 a_{12} > S + 20$ $a_9 a_{10} < S + 44$

$a_1 = ?$

] d — разность арифм. прогр; тогда

$$a_9 a_{10} = (a_7 + 2d)(a_{12} - 2d) = a_7 a_{12} + 2a_{12} d - 2a_7 d - 4d^2 =$$

$$= a_7 a_{12} + 2d(a_{12} - a_7) - 4d^2 = a_7 a_{12} + 2d(a_7 + 5d - a_7) -$$

$$- 4d^2 = a_7 a_{12} + 6d^2$$

$$\begin{cases} a_7 a_{12} > S + 20 \\ a_9 a_{10} < S + 44 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a_7 a_{12} > S + 20 \\ a_7 a_{12} + 6d^2 < S + 44 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$a_7 a_{12} + S + 44 > S + 20 + a_7 a_{12} + 6d^2$$

$$44 > 20 + 6d^2$$

$$6d^2 < 24$$

$$d^2 < 4$$

$$d \in (-2; 0) \cup (0; 2)$$

Т.к. прогрессия целочисленная, $\left[\begin{array}{l} d = 1 \\ d = -1 \end{array}\right.$, но прогр. возрастающ.

$\measuredangle$ $d = 1$:

$$\begin{cases} (a_1 + 6\cdot 1)(a_1 + 11\cdot 1) > \frac{2a_1 + 6\cdot 1}{2} \cdot 7 + 20 \\ (a_1 + 6\cdot 1)(a_1 + 11\cdot 1) + 6\cdot 1^2 < \frac{2a_1 + 6\cdot 1}{2} \cdot 7 + 44 \end{cases}$$

21104722 (U830918 M1303382)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104722**

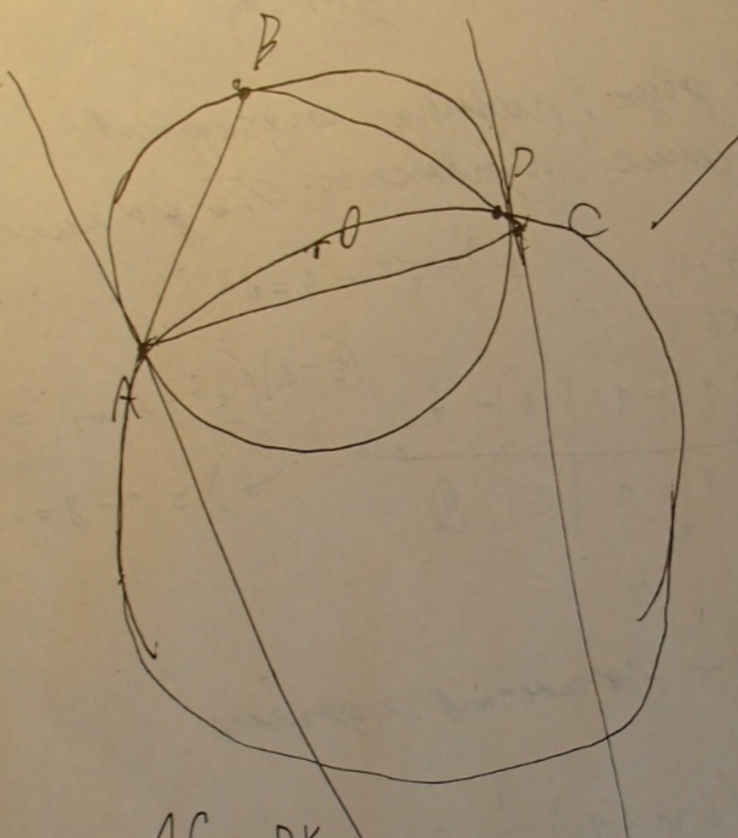
ID профиля: **830918**

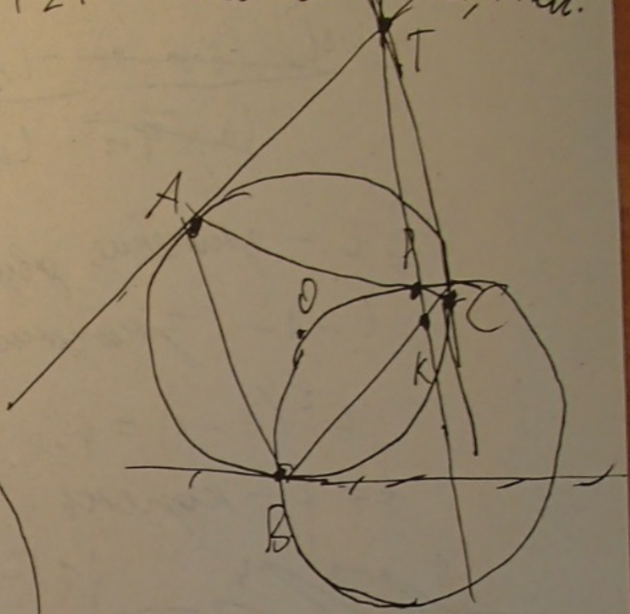
Вариант 18

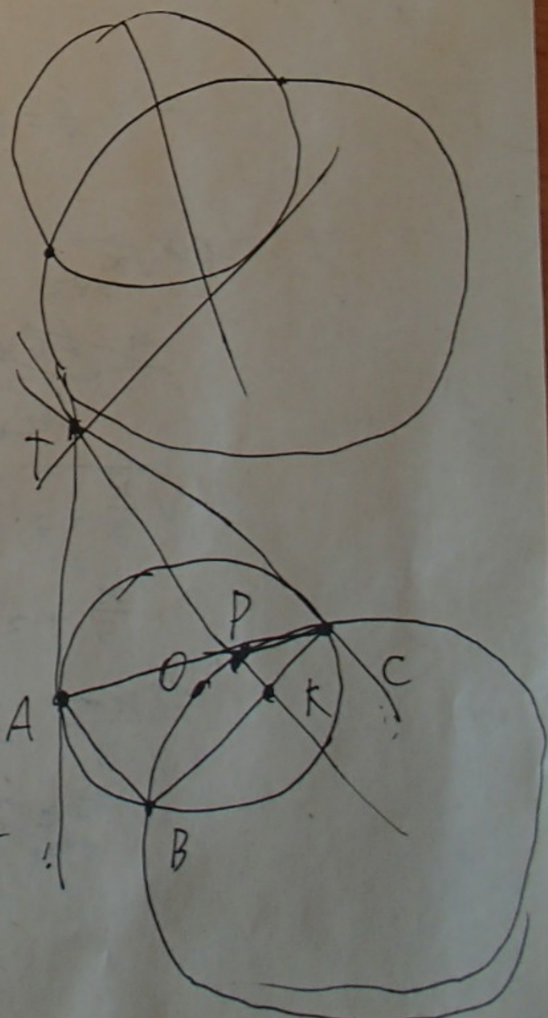
Черновик.

Математика, 11 кл.

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times\ 6 \\ \hline 72 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 72 \\ +\ 49 \\ \hline 121 \end{array}$$







$$\frac{AC}{h} = \frac{PK}{h_1}$$

$$AC = \frac{22}{h_1}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{h_1 \cdot AP}{2} = 6 \\ \dfrac{h_1 \cdot PC}{2} = 5 \end{array}\right\}$$

$$h = h_2 + h_3 = \frac{22}{PK}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{h_2 \cdot PK}{2} = 6 \\ \dfrac{h_3 \cdot PK}{2} = 5 \end{array}\right\}$$

21104722 (U830918 M1303383)

Черновик Математика, 11 кл.

$$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)\cdot\log^2_{6x-14}(x-1)\cdot\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)=$$

$$=\frac{2\cdot 2\cancel{\ln(6x-14)}\cdot\ln(x-1)\cdot\cancel{\ln\sqrt{\frac{x}{3}+3}}}{\cancel{\ln\sqrt{\frac{x}{3}+3}}\cdot\ln(6x-14)\cdot\cancel{\ln(x-1)}}=4.$$

$\exists\, t$ – значение двух равных логарифмов

$t-1$ – значение третьего. Тогда имеем

$t^2(t-1)=4$ $\qquad t^3-t^2-4=0$

$t=2$ – корень.

	1	−1	0	−4
2	1	1	2	0

$(t-2)(t^2+t+2)=0$

$D=1-8=-7<0$

$\Rightarrow t=2$ – единств. корень.

$+:\ \log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)=2$

$\left(\sqrt{\frac{x}{3}+3}\right)^2=6x-14$

$\frac{x}{3}+3=6x-14$

$\frac{18x-x}{3}=17$

$\frac{17x}{3}=17$

$x=3$

$\frac{13}{5}>\frac{7}{3}$

$39>35$

$45+13=$
$=58$

21104722 (U830918 M1303383)

5^1 3^1

Черновик

Математика, 11 кл.

5:

0	1	2	3	4	5
5	4	3	2	1	0
×	✓	✓	✓	✓	×

$$\cancel{\begin{array}{r} 17 \\ \times\ 13 \\ \hline 51 \\ +\ 17 \\ \hline 221 \end{array}}$$

$$\cancel{\begin{array}{r} 22 \\ \times\ 9 \\ \hline 198 \end{array}}$$

$$\begin{array}{r} 16 \\ \times\ 13 \\ \hline 48 \\ +\ 16 \\ \hline 208 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 208 \\ \times\ 9 \\ \hline 1872 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 13 \\ \times\ 9 \\ \hline 117 \end{array}$$

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{r} 1872 \\ +\ 117 \\ \hline 1989 \end{array}$$

$$\log_b a \cdot \log_c b = \log_c a$$

$$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}} (6x-14)$$

$$\log_{6x-14} (x-1)^2$$

$$\log_{x-1} \left(\frac{x}{3}+3\right)$$

ОДЗ:

$\cancel{x \neq 1}$ $x > 1$

$x \neq 2$

$6x - 14 = 1$

$x = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}$

$x > \frac{14}{6} = \frac{7}{3}$

$x \neq \frac{5}{2}$

$\frac{x}{3} + 3 = 1$

$\frac{x}{3} = -2$

$x = -6$

$x > -9$

$x \neq -6$

~~Loop~~

$$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}} (6x-14) = \log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)$$

$$\frac{\ln(6x-14)}{\ln\sqrt{\frac{x}{3}+3}} = 2\,\frac{\ln\sqrt{\frac{x}{3}+3}}{\ln(x-1)}$$

21104722 (U830918 M1303383)

Чистовик Математика, 11кл.

* уравнение: $\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)=2$

$$(x-1)^2=\frac{x}{3}+3$$
$$x^2-2x+1=\frac{x}{3}+3$$
$$3x^2-6x+3=x+9$$
$$3x^2-7x-6=0$$

$D=49+12\cdot 6=121=11^2$ $\qquad x_{1;2}=\frac{7\pm 11}{6}$ — 3; $-\frac{4}{6}=-\frac{2}{3}$

$x=3$ – подх. (разобр. выше)

$x=-\frac{2}{3}$ не подх. под (*).

Ответ: $x=3$.

5.

21104722 (U830918 M1303383)

Чистовик Математика, 11 кл.

	1	-1	0	-4
2	1	1	2	0

$(t-2)(t^2+t+2)=0$

$D=1-8=-7<0 \Rightarrow$

$t=2$ – единств. корень.

* уравнение: $\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)=2$

$$\left(\sqrt{\frac{x}{3}+3}\right)^2=6x-14$$

$$\frac{x}{3}+3=6x-14$$

$$\frac{18x-x}{3}=17 \Leftrightarrow \frac{17x}{3}=17$$

$$x=3.$$

x подх. под (*)

Сделаем подстановки:

$$\log_{6\cdot3-14}(3-1)^2=\log_4 4=1.$$

$$\log_{3-1}\left(\frac{3}{3}+3\right)=\log_2 4=2.$$

$x=3$ подх. под усл.

* уравнение: $\log_{6x-14}(x-1)^2=2$

$$(6x-14)^2=(x-1)^2$$

С уч. (*):

$$6x-14=x-1$$

$$5x=13$$

$$x=\frac{13}{5}>\frac{7}{3}$$

Сделаем подстановки:

$$\log_{\frac{13}{5}-1}\left(\frac{13}{15}+3\right)=\log_{\frac{8}{5}}\left(\frac{58}{15}\right)\neq 2$$

$\neq 1$

$x=\frac{13}{5}$ – не подх.

21104722 (U830918 M1303383)

Чистовик. Математика, 11кл.

№5.

$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)$, $\log_{6x-14}(x-1)^2$, $\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)$

Два из них равны, третье меньше на 1.

$x=?$

Решение:

Все логарифмы определены лишь при

$$\begin{cases} x>\frac{7}{3} \\ x\neq\frac{5}{2} \end{cases} \quad (*)$$

Заметим, что:

$$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)\cdot\log_{6x-14}(x-1)^2\cdot\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)=$$

$$=\frac{2\cdot2\cdot\cancel{\ln(6x-14)}\cdot\cancel{\ln(x-1)}\cdot\cancel{\ln\sqrt{\frac{x}{3}+3}}}{\cancel{\ln\sqrt{\frac{x}{3}+3}}\cdot\cancel{\ln(6x-14)}\cdot\cancel{\ln(x-1)}}=4.$$

$\sqrt{(x-1)^2}=x-1$, поскольку $x-1>0$

$\sqrt{\frac{x}{3}+3}$ корректно, поскольку $\frac{x}{3}+3>0$.

Знаменатель с уч. $(*)$ не обращ. в 0.

$\exists\, t$ – значение двух равных логарифмов

$t-1$ – значение третьего.

Тогда имеем:

$$t^2(t-1)=4. \quad t=2 \text{ – корень}$$

$$t^3-t^2-4=0$$

21104722 (U830918 M1303383)

Чистовик Математика, 11 кл.

Это можно сделать 13 способами, т.к. в каждом из упорядоченных чисел степень не меньше 1.

Аналогично 17 оставшихся пятёрок между двумя упорядоченными числами можно распределить 16 способами.

Итого, таких троек будет:

~~3·3·13·17 = 1989. Ответ: 1989.~~

3·3·13·16 = 1872. Ответ: 1872.

2

21104722 (U830918 M1303383)

Чистовик Математика, 11 кл.

№4.

Поскольку НОК $(a; b; c) = 3^{15} \cdot 5^{18}$, можно утверждать, что числа a, b и c в качестве простых делителей могут иметь лишь 3 и 5.

НОД $(a; b; c) = 15$ $^{\shortparallel 5 \cdot 3}$ $\Leftrightarrow$ среди чисел a, b, c сущест- (с уч. отмеченного выше) вует число, куда 5 входит лишь в первой степени, и существует число, куда 3 входит лишь в первой степени. Если в какое-то из этих чисел 5 или 3 не входят, то и НОД не может быть $\vdots 5$ или $\vdots 3$ соотв. Если же во все числа они входят во второй или более степенях, то и в НОД они входят во второй или более степенях.

~~Рассмотрим два случая:~~

~~1) 5 и 3 входят ровно в первой степени~~

Выбрать число, куда входит 3 в перв. степени, можно 3-мя способами. Также 3-мя способами можно выбрать число, куда входит 5 в перв. степени.

Теперь определим сколькими способами

(1) можно распределить 14 троек между двумя (в одном степень уже фиксирована) упорядоч. числами.

21104722 (U830918 M1303383)