Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104655**

ID профиля: **78473**

Вариант 18

Черновик

$a \quad a+d \quad a+2d \ \ldots$

$S = 7a+21d \qquad a,d \in \mathbb{Z}$

$a_7 = a+6d$

$a_{12} = a+11d \Rightarrow a_7 a_{12} = (a+6d)(a+11d) > 7a+21d+20$

$\qquad = a^2+17ad+66d^2$

$a_9 = a+8d$

$a_{10} = a+9d \Rightarrow a_9 a_{10} = (a+8d)(a+9d) < 7a+21d+44$

$\qquad = a^2+17ad+72d^2$

$7a+21d+20 < a^2+17ad+66d^2 < a^2+17ad+72d^2 < 7a+21d+44$ 65

$\cancel{a^2}+\cancel{17ad}+72d^2-\cancel{a^2}-\cancel{17ad}-66d^2 < 24$

$6d^2 < 24$

$d^2 < 4 \Rightarrow d = \cancel{\pm}1$ (т.к. d – целое)

$7a+41 < a^2+17a+66$

$a^2+17a+72 < 7a+65$

$a^2+10a+25 > 0$

$(a+5)^2 > 0 \Rightarrow a \neq -5$

$a^2+10a+7 < 0$

$D = 100-28 = 72$

$a_1 = \dfrac{-10-6\sqrt{2}}{2} = -5-3\sqrt{2}$

$a_2 = \dfrac{-10+6\sqrt{2}}{2} = -5+3\sqrt{2}$

$a \in (-5-3\sqrt{2}; -5+3\sqrt{2}) \Rightarrow a \in$

$-5-3\sqrt{2} > -10$	$-5-3\sqrt{2} < -9$	$-5+3\sqrt{2} > -1$	$-5+3\sqrt{2} < 0$
$-3\sqrt{2} > -5$	$-3\sqrt{2} < -4$	$3\sqrt{2} > 4$	$3\sqrt{2} < 5$
$18 < 25$	$18 > 16$	$18 > 16$	$18 < 25$

$\sqrt{48-k^2} =$

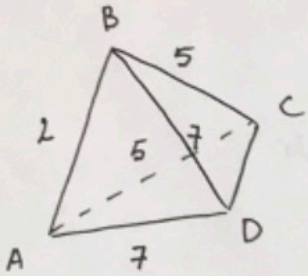
$a = b$

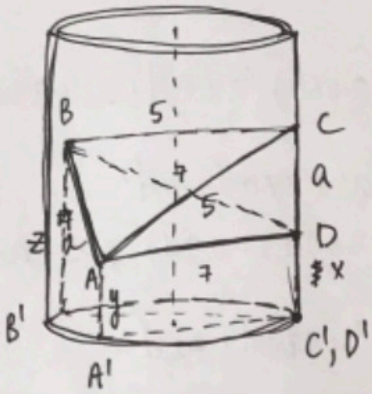
$\dfrac{a^2+b^2}{2ab} \geq 1$

24×4

$47 \times 4 = 168$

Черновик





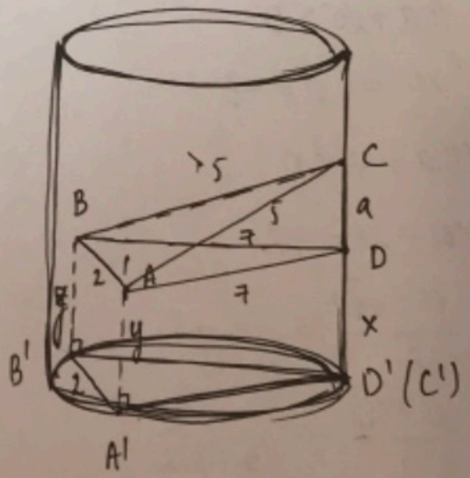
$$B'C'^2 = 49 - (x-z)^2 \qquad A'C' = 25 - (x+a-y)^2$$
$$B'C'^2 = 25 - (x+a-z)^2 \qquad A'C' = 49 - (x-y)^2$$

$$49 - (x-z)^2 = 25 - (x+a-z)^2$$
$$49 - (x-y)^2 = 25 - (x+a-y)^2$$

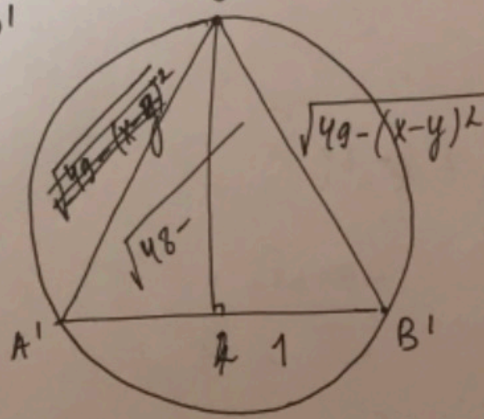
$$49 - (\cancel{x^2} + \cancel{z^2} - \cancel{2xz}) = 25 - (\cancel{x^2} + a^2 + \cancel{z^2} - \cancel{2xz} - 2az + 2xa)$$
$$49 - (\cancel{x^2} + \cancel{y^2} - \cancel{2xy}) = 25 - (\cancel{x^2} + a^2 + \cancel{y^2} - \cancel{2xy} + 2ax - 2ay)$$

$$49 = 25 - a^2 + 2az - 2xa$$
$$49 = 25 - a^2 - 2ax + 2ay$$
$$a^2 - 2az + 2ax = 24$$
$$a^2 + 2ax - 2ay = 24$$

$$z = y \qquad A'B' = 2$$



$$A'D' = B'D'$$



$$\sqrt{49-(x-y)^2}$$

$$\cancel{a^2 + 2ax + 2ay} = 24$$
$$\cancel{a^2 + a(2x+2y) - 24} = 0$$
$$a^2 + 2a(x-y) = 24$$
$$x - y = \frac{24 - a^2}{2a} = \frac{12}{a} - \frac{a}{2}$$

Черновик

$$\frac{(24-a^2)(2a^2+48)}{a}\cdot\left(2\sqrt{48-\left(\frac{24-a^2}{2a}\right)^2}-\left(49-\left(\frac{24-a^2}{2a}\right)^2\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{48-\left(\frac{24-a^2}{2a}\right)^2}}\right)$$

$a^2=24$

$$2\sqrt{48-\underbrace{\left(\frac{24-a^2}{2a}\right)^2}_{k}}=\left(49-\underbrace{\left(\frac{24-a^2}{2a}\right)^2}_{k}\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{48-\underbrace{\left(\frac{24-a^2}{2a}\right)^2}_{k}}}$$

$$2\sqrt{48-k}=(49-k)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{48-k}}$$

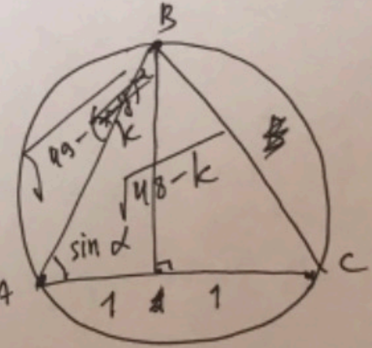
$4(48-k)=49-k$

$192-4k=49-k$ $\quad\cancel{192-49}=$ $\quad k=\left(\frac{24-a^2}{2}\right)^2$

$143=3k$ $\quad 3\cdot 48=144-1$

$\frac{143}{3}=k$ $\quad k=$

$$\left(\frac{24-a^2}{2a}\right)^2=\frac{143}{3}$$



$2\sqrt{}$

$$\sqrt{48-k}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{48-k}}\cdot(-1)$$ $\quad\cancel{(x-y)'}\quad\cancel{(x-y)^2}$

$$-1\cdot 2\sqrt{48-k}+$$
$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{48-k}}\cdot(49-k)$$

$$\sin\alpha=\frac{\sqrt{48-k}}{\sqrt{49-k}}$$

$$2\sqrt{48-k}=\frac{1}{2\sqrt{48-k}}\cdot(49-k)$$

$4(48-k)=49-k$

$$f(k)=\frac{BC}{\sin\alpha}=\frac{\sqrt{49-k}}{\sqrt{48-k}}\cdot\sqrt{49-k}=\frac{49-k}{2\sqrt{48-k}}$$

$$f'(k)=\frac{(49-k)'\cdot 2\sqrt{48-k}-(2\sqrt{48-k})'\cdot(49-k)}{4(48-k)}$$

Черновик

$$a^2+a(2x+2y)-24=0$$

$$R=\frac{abc}{4S}$$

$$\frac{\cancel{2}(49-(x-y)^2)}{24S}=\frac{49-(x-y)^2}{2\sqrt{48-(x-y)^2}}=R$$

$$S=\sqrt{48-(x-y)^2}$$

$$\frac{49-\left(\frac{24-a^2}{2a}\right)^2}{2\sqrt{48-\left(\frac{24-a^2}{2a}\right)^2}}=R$$

$$\cancel{R'=\frac{49-\frac{24-a^2}{2a}}{}}$$

$$R'=\frac{\left(49-\left(\frac{24-a^2}{2a}\right)^2\right)'\cdot 2\sqrt{48-\left(\frac{24-a^2}{2a}\right)^2}-\left(49-\left(\frac{24-a^2}{2a}\right)^2\right)\left(2\sqrt{48-\left(\frac{24-a^2}{2a}\right)^2}\right)'}{4\left(48-\left(\frac{24-a^2}{2a}\right)^2\right)}$$

$$\left(49-\left(\frac{24-a^2}{2a}\right)^2\right)'=$$

$$=0-\left(\left(\frac{24-a^2}{2a}\right)^2\right)'=0-2\left(\frac{24-a^2}{2a}\right)\cdot\left(-2a^2-48\right)=$$

$\cancel{f(x)} \to f(g(x))$

$$=\frac{\cancel{2}(24-a^2)(2a^2+48)}{\cancel{2}a}=$$

$$\frac{24-a^2}{2a}=(24-a^2)'\cdot 2a-2\cdot(24-a^2)$$

$$=\frac{(24-a^2)(2a^2+48)}{a}$$

$$-2a\cdot 2a-48+2a^2=-2a^2-48$$

$$f'\quad 48-\left(\frac{24-a^2}{2a}\right)^2=$$

$$=\frac{(24-a^2)(2a^2+48)}{a}$$

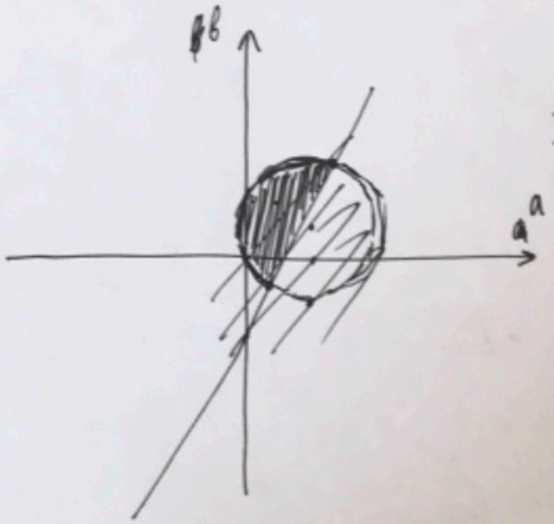
$$\left(\sqrt{48-\left(\frac{24-a^2}{2a}\right)^2}\right)'=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{48-\left(\frac{24-a^2}{2a}\right)^2}}\cdot\frac{(24-a^2)(2a^2+48)}{a}$$

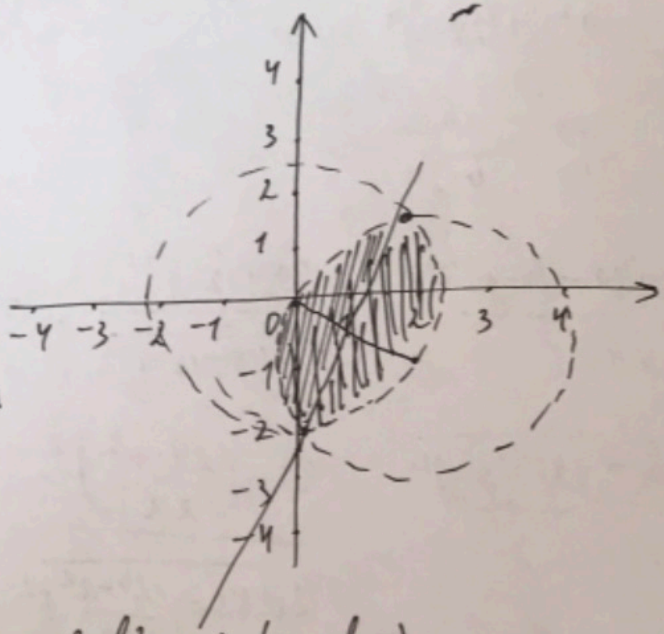
21104655 (U78473 M1303688)

М: $(x-a)^2+(y-b)^2 \le 5$

$a^2+b^2 \le \min(4a-2b, 5)$

Черновик





$a^2+b^2 \le \min(4a-2b, 5)$

1) $4a-2b<5$

$a^2+b^2 \le 4a-2b$

$a^2-4a+4+b^2+2b+1 \le 5$

$(a-2)^2+(b+1)^2 \le 5$

$2b > 4a-5$

$b > 2a-2{,}5$

$b = 2a-2{,}5$

2) $4a-2b \ge 5$

$a^2+b^2 \le 5$

$a^2+b^2=5$

$(a-2)^2+(b+1)^2=5$

$y = -\cancel{2a}\,\frac{1}{2}a$

$-\frac{1}{2}a = 2a-2{,}5$

$2{,}5 = 2a+\frac{1}{2}a$

$a=1$

21104655 (U78473 M1303688)

Чистовик 18 вар.

1| Прогрессия: $a,\ a+d,\ a+2d\ldots$

$$S = a+a+d+a+2d+a+3d+a+4d+a+5d+a+6d = 7a+21d$$

$a_7 = a+6d$

$a_{12} = a+11d \Rightarrow a_7 \cdot a_{12} = a^2+17ad+66d^2$

$a_9 = a+8d$

$a_{10} = a+9d \Rightarrow a_9 \cdot a_{10} = a^2+17ad+72d^2$

$$S+20 < \underbrace{a^2+17ad+66d^2}_{m} < \underbrace{a^2+17ad+72d^2}_{n} < S+44$$ $\Rightarrow$ разность n и m меньше разности $S+44$ и $S+20$, т.е. 24.

$n-m<24$

$a^2+17ad+72d^2-a^2-17ad-66d^2<24$

$6d^2<24$

$d^2<4 \Rightarrow d=1$ (т.к. $d \in \mathbb{Z}$ и d – положительно)

Тогда a может принимать любые целые значения, удовлетворяющие системе:

$$\begin{cases} a^2+17a+66 > 7a+41 \\ a^2+17a+72 < 7a+65 \end{cases}$$

$a^2+10a+25>0 \Rightarrow (a+5)^2>0 \Rightarrow a \neq -5$

$a^2+10a+7<0$

$D = 100-28 = 72$

$a_1 = \dfrac{-10-6\sqrt{2}}{2} = -5-3\sqrt{2}$

$a_2 = \dfrac{-10+6\sqrt{2}}{2} = -5+3\sqrt{2}$

$\Rightarrow a \in (-5-3\sqrt{2}; -5+3\sqrt{2})$

Чистовик 18 вар.

$-5-3\sqrt{2} > -10$ $\quad -5-3\sqrt{2} < -9$ $\quad -5+3\sqrt{2} > -1$ $\quad -5+3\sqrt{2} < 0$

$-3\sqrt{2} > -5$ $\quad -3\sqrt{2} < -4$ $\quad 3\sqrt{2} > 4$ $\quad 3\sqrt{2} < 5$

$18 < 25$ $\quad 18 > 16$ $\quad 18 > 16$ $\quad 18 < 25$

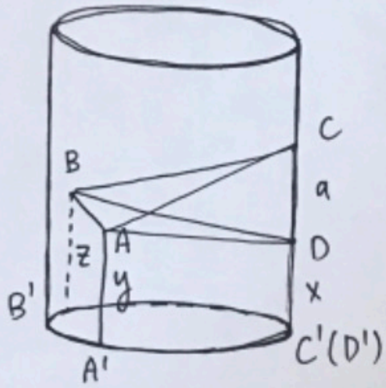
$a \in \{-9; -8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1\}$

Учтём, что $a \neq -5$:

Ответ: $a \in \{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1\}$.

Чистовик 18 вар.

21



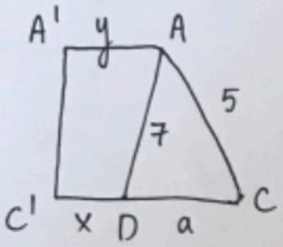
Спроецируем точки A, B, C и D на плоскость основания цилиндра:

$A \to A'$

$B \to B'$

$C, D \to C'(D')$ (т.к. $CD \parallel$ оси цилиндра)

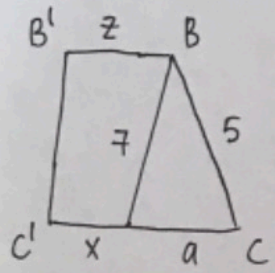
В плоскости $A'ACC'$:



$A'C'^2 = 49 - (x-y)^2$ (из пр. трапеции $A'ADC'$)

$A'C'^2 = 25 - (x+a-y)^2$ (из пр. трапеции $A'ACC'$)

В плоскости $B'BCC'$:



$B'C'^2 = 49 - (x-z)^2$

$B'C'^2 = 25 - (x+a-z)^2$

$$49 - (x^2+y^2-2xy) = 25 - (x^2+y^2-2xy+a^2+2ax-2ay)$$

$$49 - (x^2+z^2-2zy) = 25 - (x^2+z^2-2zy+a^2+2ax-2az)$$

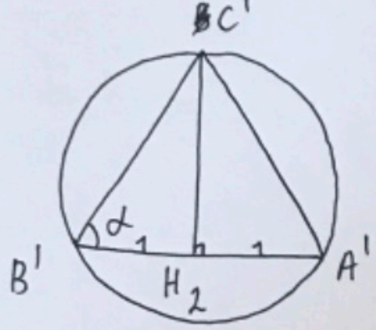
$24 = -a^2-2ax+2ay$

$24 = -a^2-2ax+2az$ $\Rightarrow z = y \Rightarrow BAA'B$ – прямоугольник $\Rightarrow A'B' = AB = 2$

$24 + a^2 = 2a(y-x)$

$$y - x = \frac{24+a^2}{2a}$$

$B'C' = A'C' = \sqrt{49-(x-y)^2} = \sqrt{49-\left(\frac{24+a^2}{2a}\right)^2}$ Чистовик 18 вар.



$R = \frac{C'A'}{2\sin\alpha}$

$\sin\alpha = \frac{C'H}{B'C'} = \frac{\sqrt{49-\left(\frac{24+a^2}{2a}\right)^2-1}}{\sqrt{49-\left(\frac{24+a^2}{2a}\right)^2}} = \frac{\sqrt{48-\left(\frac{24+a^2}{2a}\right)^2}}{\sqrt{49-\left(\frac{24+a^2}{2a}\right)^2}}$

$R = \frac{49-\left(\frac{24+a^2}{2a}\right)^2}{2\sqrt{48-\left(\frac{24+a^2}{2a}\right)^2}}$

$\frac{24+a^2}{2a} = k$

$\frac{49-k^2}{2\sqrt{48-k^2}} = \frac{\left(\sqrt{48-k^2}\right)^2+1^2}{2\cdot 1\cdot\sqrt{48-k^2}}$

$m = \sqrt{48-k^2}$

$n = 1$

$\frac{m^2+n^2}{2mn} \geqslant 1$ (по неравенству о средних)

Т.е. минимум радиуса достигается при $m=n$, т.е. $\sqrt{48-k^2} = 1$:

$48-k^2=1$

$k^2=47$

$$\frac{24+a^2}{2a}=\sqrt{47}$$ Чистовик 18 вар.

$$24+a^2=2a\sqrt{47}$$

$$a^2-2a\sqrt{47}+24=0$$

$$D=168-96=72$$

$$a_1=\frac{2\sqrt{47}+6\sqrt{2}}{2}$$

$$a_2=\frac{2\sqrt{47}-6\sqrt{2}}{2}$$

Ответ: $\frac{2\sqrt{47}+6\sqrt{2}}{2}$; $\frac{2\sqrt{47}-6\sqrt{2}}{2}$.

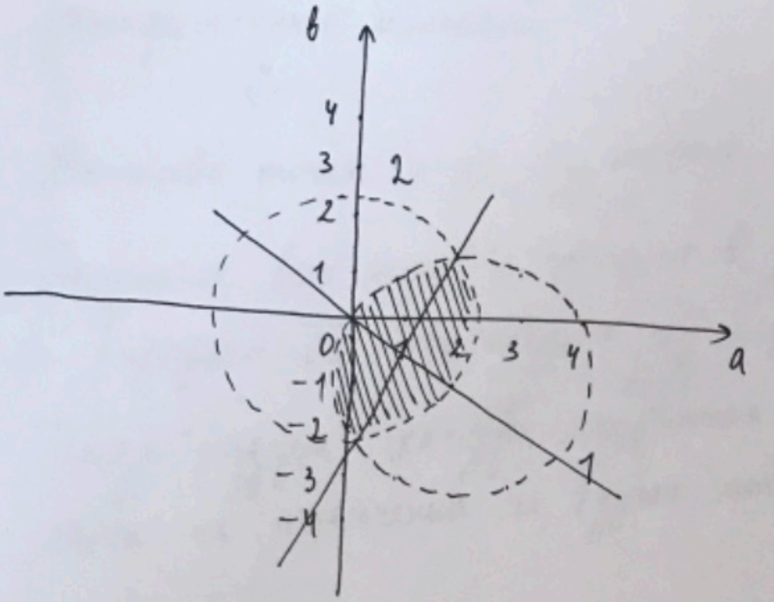
Чистовик

6

18 вар.

3| Рассмотрим второе неравенство:

$a^2+b^2 \le \min(\cancel{2a}\ 4a-2b; 5)$



1) $4a-2b \le 5$

$a^2+b^2 \le 4a-2b$

$a^2-4a+4+b^2+2b+1 \le 5$

$(a-2)^2+(b+1)^2 \le 5$

Круг с центром в $(2;-1)$ и $r=\sqrt{5}$

~~Заметим, что он проходит через~~

2) $4a-2b > 5$

$a^2+b^2 \le 5$

Круг с центром в $(0;0)$ и $r=\sqrt{5}$

Рассмотрим линию центров этих кругов; и прямую $4a-2b=5$:

уравнение $b=-\frac{1}{2}a$

уравнение $b=2a-2{,}5$

Заметим, что эти прямые $\perp$ (т.к. $2\cdot(-\frac{1}{2})=-1$) и пересекаются в точке $(1;-\frac{1}{2})$ ⟵ середина линии центров $\Rightarrow$ прямая $4a-2b=5$

21104655 (U78473 M1303688)

проходит через точки пересечения окружностей.

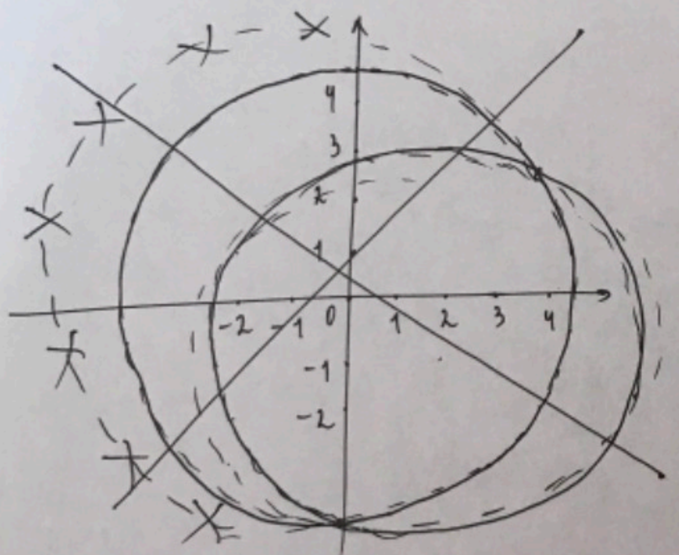
$\Downarrow$

Множество точек $(a;b)$, удовлетворяющих данному неравенству – заштрихованное множество.

$\Downarrow$

Множество точек $(x;y)$, из которых состоит M, это просто объединение всех кругов с центром в заштрихованной области и радиусом $\sqrt{5}$ (это следует из неравенства $(x-a)^2+(y-b)^2 \leq 5$)

Тогда "раздуем" каждый ~~окружность~~ круг до $r = 2\sqrt{5}$ $\Rightarrow$ множество точек их пересечения и будет множеством M:



Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104655**

ID профиля: **78473**

Вариант 18

Чистовик 18 вар.

$\boxed{5}$ ~~4)~~ $\cancel{\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14) = \log_{6x-14}(x-1)^2}$

Все 3 логарифма существуют $\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} \frac{x}{3}+3>0,\ \neq 1 \\ 6x-14>0,\ \neq 1 \\ x-1>0,\ \neq 1 \end{array}\right\}$ ОДЗ

Все переходы будут происходить в ОДЗ:

1) $\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14) = \log_{6x-14}(x-1)^2$

$2\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14) = 2\log_{6x-14}(x-1)$

$\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14) = \log_{6x-14}(x-1) = a$

$\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right) = \cancel{a+1}\ \cancel{\frac{a}{2}+1}\ 2a-1$

$\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)\cdot\log_{6x-14}(x-1) = \log_{\frac{x}{3}+3}(x-1) = \dfrac{1}{\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)} = \cancel{\frac{1}{a-1}}\ \dfrac{1}{\cancel{\frac{a}{2}+1}\ 2a-1}$

$\overset{\shortparallel}{a^2}$

$\cancel{a^2 = \frac{1}{a-1}}$ $\quad$ $\cancel{a^2 = \frac{2}{a-2}}$ $\quad$ $a^2 = \dfrac{1}{2a-1}$ $\quad$ $a=1$

$\cancel{a^2(a-1)=1}$ $\quad$ $\cancel{a^3-2a^2-2=0}$ $\quad$ $2a^3-a^2-1=0$ $\quad$ $6x-14 = x-1$

$\cancel{a^3-a^2-1=0}$ $\quad$ $(a-1)(2a^2+a+1)=0$ $\quad$ $x = 2,6$

$D<0$ $\quad$ $\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14) = \log_{\frac{11,6}{3}} 1,6 \neq 1$

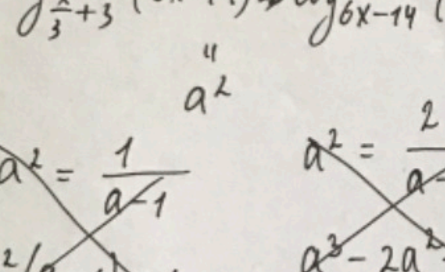
~~Исследуем функцию $f(a) = a^3-a^2-1$:~~

$\cancel{f'(a) = 3a^2-2a}$

$\cancel{f'(a)=0 \Leftrightarrow a=0,\ a=\frac{2}{3}}$

~~Понимаем, что единственный корень~~ случай невозможен ~~уравнения лежит в интервале $(1;1,5)$~~ $\Rightarrow a>1$

$\Downarrow$



~~$6x-14 < x-1 \Rightarrow x<2,6$~~
~~$\frac{x}{3}+3 < 6x-14 \Rightarrow x>3$~~
$\}$ не может соблюдаться одновременно

$\Downarrow$

~~$\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14) \neq \log_{6x-14}(x-1)$~~

т.е. ~~этот случай невозможен~~

1

2) $\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14) = \log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)$ Чистовик 18 вар.

$2\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14) = \log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right) = a$

$\log_{6x-14}(x-1)^2 = a-1$

$2\log_{6x-14}(x-1) = a-1$

$\log_{6x-14}(x-1) = \frac{a-1}{2}$

$$\underbrace{\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)\cdot\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)}_{=\frac{a^2}{2}} = \log_{x-1}(6x-14) = \frac{1}{\log_{6x-14}(x-1)} = \frac{2}{a-1}$$

$\frac{a^2}{2} = \frac{2}{a-1}$

$a^3 - a^2 - 4 = 0$

$(a-2)\underbrace{(a^2+a+2)}_{D<0} = 0$

$a = 2$

$\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14) = \frac{a}{2} = 1$

$\frac{x}{3}+3 = 6x-14$

$x+9 = 18x-42$

$51 = 17x$

$x = 3$

$\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14) = 1 = \frac{a}{2}$

$\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right) = 2 = a$

$\log_{6x-14}(x-1)^2 = 1 = a-1$

т.е. $x=3$ удовлетворяет условию задачи. 2

3) $\log_{6x-14}(x-1)^2 = \log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)$ Чистовик 18 вар.

$2\log_{6x-14}(x-1) = \log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right) = a$

$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14) = a-1$

$2\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14) = a-1$

$\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14) = \frac{a-1}{2}$

$$\underbrace{\log_{6x-14}(x-1)\cdot\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)}_{\frac{a^2}{2}} = \log_{6x-14}\left(\frac{x}{3}+3\right) = \frac{1}{\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)} = \frac{2}{a-1}$$

$\frac{a^2}{2} = \frac{2}{a-1} \iff a=2$

$\log_{6x-14}(x-1) = \frac{a}{2} = 1$

$6x-14 = x-1$

$5x = 13$

$x = 2{,}6$

$\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right) = \log_{1,6}\left(\frac{11,6}{3}\right) \neq 2$

т.е. такая ситуация невозможна.

Ответ: 3.

Чистовик 18 вар.

4| НОД$(a;b;c)=15$
НОК$(a;b;c)=3^{15}\cdot 5^{18}$

$a=3^{\alpha_1}\cdot 5^{\beta_1}$
$b=3^{\alpha_2}\cdot 5^{\beta_2}$
$c=3^{\alpha_3}\cdot 5^{\beta_3}$

(если в a, b или c содержатся какие-то простые делители не равные 3 или 5, то их НОК не будет равен $3^{15}\cdot 5^{18}$).

НОД$(a;b;c)=15 \Leftrightarrow \min(\alpha_1, \cancel{\beta_1} \alpha_2, \alpha_3)=1$, $\min(\beta_1, \beta_2, \beta_3)=1$

НОК$(a;b;c)=3^{15}\cdot 5^{18} \Leftrightarrow \overset{max}{\cancel{\min}}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)=15$, $\max(\beta_1, \beta_2, \beta_3)=18$

1) $\{\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3\} = \{1;1;15\}$ (или $\{1;15;15\}$)

1.1) $\{\beta_1;\beta_2;\beta_3\}=\{1;1;18\}$ (или $\{1;18;18\}$)

Количество способов распределить альфы между a, b и c = 3 и умножаем на 2 (т.к. 2 набора существует). Итого 6 сп.

~~Ко~~ То же самое с бетами ⇒ Всего 36 вариантов.

1.2) $\{\beta_1;\beta_2;\beta_3\}=\{1;x;18\}$, где ~~$x\neq 1,18$~~ $1<x<18$.

С альфами то же самое – 6 способов.

С бетами получается так: количество способов распределить их между a, b и c равно 6 (3!), а количество наборов 16.

Т.е. с учётом наборов $6\cdot 16=96$ способов.

С учётом α: $6\cdot 96=576$ способов.

2) $\{\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3\}=\{1;x;15\}$, где $1<x<15$

Количество способов распределить альфы между a, b, c = 6, с учётом количества наборов: $6\cdot 13=78$

2.1) $\{\beta_1;\beta_2;\beta_3\}=\{1;1;18\}$ (или $\{1;18;18\}$)

$78\cdot 6=468$

2.2) $\{\beta_1;\beta_2;\beta_3\}=\{1;x;18\}$, где $1<x<18$

4

$78\cdot 96=8488$

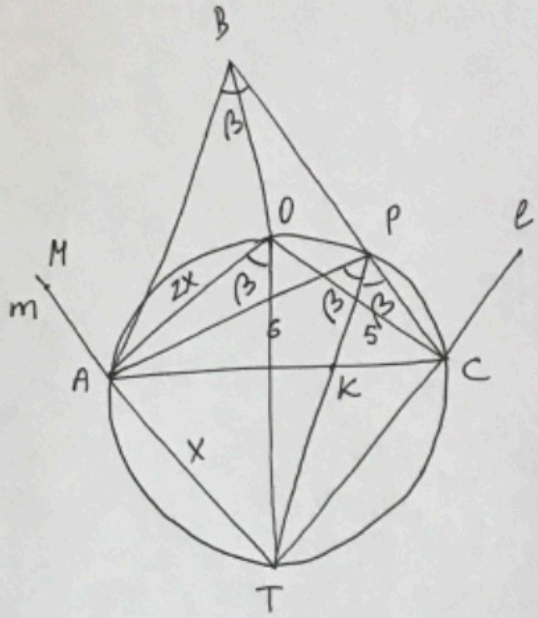
Чистовик 18 вар.

Итого получаем $8488 + 468 + 576 + 36 = 9568$

Ответ: 9568.

Чистовик 18 вар.

6|



а) дано: $S_{APK}=6$

$S_{CPK}=5$

Покажем, что $PT \parallel AB$:

l — касательная к ω в т. C

m — касательная к ω в т. A

$\angle OCT = 90^\circ$

$\angle OAT = 90^\circ$ $\Rightarrow$ $OCTA$ — вписанный (т.е. T лежит на описанной окружности OAC)

$\angle ABC = \beta$

$\angle ACB = \gamma$

$\angle BAC = \alpha$

$AT = TC$ (как отрезки касательных) $\Rightarrow$

PT — биссектриса $\angle APC \Rightarrow \angle APT = \frac{1}{2}\angle APC$

$\angle APC = \angle AOC \Rightarrow \angle APT = \frac{1}{2}\angle AOC \Rightarrow \angle APT = \beta$

опираются на одну дугу

$\angle AOC = 2\beta$ (как центральный в ω)

$\angle BAP = 180^\circ - \angle BAM - \angle PAT = 180^\circ - \gamma - \alpha = \beta$

$\angle BAM = \gamma$ (опирается на дугу AB)

$\angle PAT = 180^\circ - \angle PCT = 180^\circ - (\angle OCT + \angle OCP) = 180^\circ - \left(90^\circ + \frac{180 - \angle COB}{2}\right) =$

$= 180^\circ - (90^\circ + 90^\circ - \alpha) = \alpha$

Т.е. $\angle BAP = \angle APT \Rightarrow AB \parallel PT$

$\frac{S_{ABP}}{S_{APC}} = \frac{BP}{PC} = \cancel{\frac{CK}{AK}} \neq \cancel{\frac{S_{PCK}}{S}} \frac{AK}{CK} = \frac{S_{APK}}{S_{PKC}} = \frac{6}{5}$

т.к. $PK \parallel AB$

$S_{ABP} = \frac{6}{5} \cdot S_{APC} = \frac{6}{5} \cdot 11$

$S_{ABC} = S_{ABP} + S_{APC} = 11\left(1 + \frac{6}{5}\right) = \frac{121}{5} = \frac{242}{10} = 24,2$

Ответ: 24,2.

б) $\underset{\beta}{\overset{\shortparallel}{\angle ABC}} = \operatorname{arcctg}\frac{1}{2}$ Чистовик 18 вар.

~~$\angle APT = \beta$~~

OT – диаметр (т.к. $\angle OAT = 90°$)

$\underset{\beta}{\overset{\shortparallel}{\angle ADT}} = \underset{\beta}{\overset{\shortparallel}{\angle TOC}}$ (OT – биссектриса, т.к. AT = TC)

$tg\,\beta = \frac{AT}{AO} = \frac{1}{2}$

$OT = x\sqrt{5} \Rightarrow \sin\beta = \frac{x}{x\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\cos\beta = \frac{2x}{x\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\sin\angle APC = \sin 2\beta = \frac{4}{5}$

$AP \cdot PC \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} = 11$

$AP \cdot PC = \frac{55}{2}$

$AP \cdot PK \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{2} = 6$ $PC \cdot PK \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{2} = 5$

$AP \cdot PK = 12\sqrt{5}$ $PC \cdot PK = 10\sqrt{5}$

$\Downarrow$

$AP \cdot PC \cdot PK^2 = 120 \cdot 5 = 600$

$PK^2 = \frac{600}{AP \cdot PC} = \frac{600}{55} \cdot 2 = \frac{240}{11}$

~~$AB^2 =$~~ $\frac{PK^2}{AB^2} = \left(\frac{5}{11}\right)^2$

$AB^2 = \frac{PK^2 \cdot 11^2}{5^2} = \frac{240 \cdot 11}{5^2}$

$AB = \frac{\sqrt{240 \cdot 11}}{5}$

$S_{ABC} = AB \cdot BC \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin\beta$ Чистовик 18 вар.

$$\frac{242}{\cancel{10}} = \frac{\sqrt{240 \cdot 11}}{\cancel{5}} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot BC$$

$$\frac{242 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{240 \cdot 11}} = BC$$

$$BC = \frac{\cancel{2} \cdot 11 \cdot \cancel{11} \cdot \cancel{\sqrt{5}}}{\cancel{\sqrt{11}} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{3}} = \frac{11\sqrt{11}}{2\sqrt{3}}$$

Т. косинусов:

$$BC^2 + AB^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\beta = AC^2$$

$$AC^2 = \frac{121 \cdot 11}{12} + \frac{240 \cdot 11}{25} - \frac{4}{\sqrt{5}} \cdot \frac{11\sqrt{11}}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{240 \cdot 11}}{5}$$

Ответ: $\sqrt{\frac{121 \cdot 11}{12} + \frac{240 \cdot 11}{25} - \frac{4}{\sqrt{5}} \cdot \frac{11\sqrt{11}}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{240 \cdot 11}}{5}}$.

$$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)=\log_{6x-14}(x-1)^2$$ Черновик

$\frac{x}{3}+3>0,\ \neq 1$

$6x-14>0$

$\cancel{x-1>0}\ x\neq 1$

$$2\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)=2\log_{6x-14}(x-1)$$ $\underline{a\overset{?}{=}1}$

$240=$

$=80\cdot 3$

$$\log_{\frac{x+9}{3}}(6x-14)=\cancel{4}\log_{6x-14}(x-1)=a$$

$$\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)\cdot\log_{6x-14}(x-1)=\log_{\frac{x}{3}}$$

$$(a-x)\left(a^2+(x-1)a+\frac{1}{x}\right)=0$$

$$a^3-xa^2+(x-1)a^2-x(x-1)a+$$

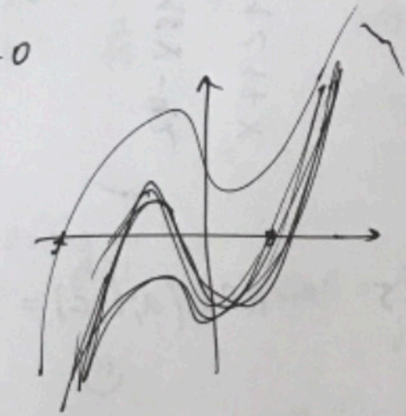
$$a^3-a^2$$

$$a^3-a^2-1$$

$$a^3-a^2-1=0$$

$$3a^2-2a=0$$

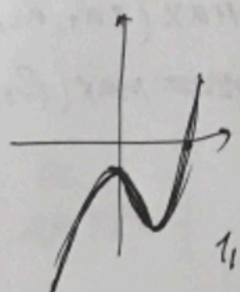
$$a(3a-2)=0$$



$a=\frac{2}{3}$

$$\frac{8}{27}-\frac{4}{9}-1=$$

$$=\frac{8}{27}-\frac{12}{27}-\frac{27}{27}=-\frac{31}{27}$$



$1{,}5$

$\frac{3}{2}$

$$\frac{27}{8}-\frac{9}{4}-1=$$

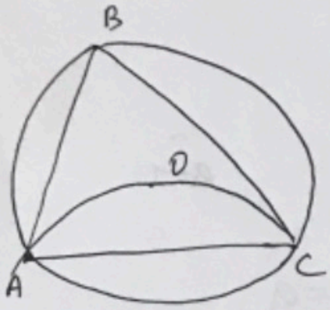
$2\sqrt{2}-1$

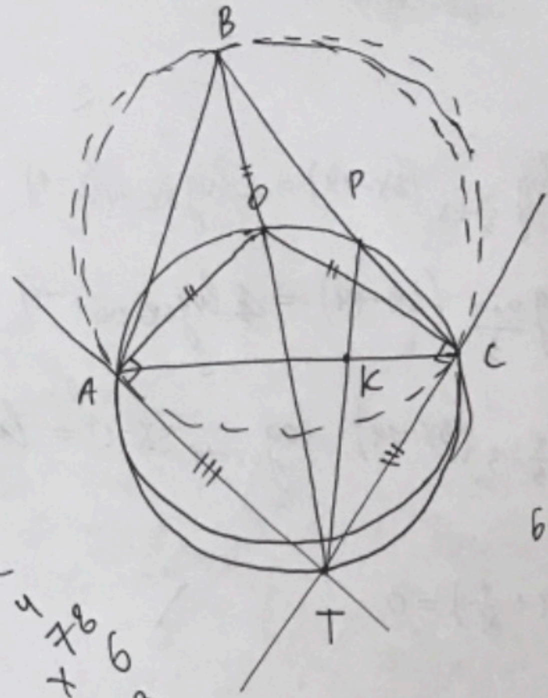
$$=\frac{27}{8}-\frac{18}{8}-\frac{8}{8}=\frac{1}{8}$$

Черновик

54

$$96 \times 6 = 576$$





$$78 \times 6 = 468$$

$$(x-1)^{a-1} = \frac{x}{3}+3$$

$$x-1 > \frac{x}{3}+3$$

$$6x-14 > x-1$$

$$5x > 13$$

$$x > 2{,}6$$

$$3x-3 > x+9$$

$$2x > 12$$

$$x > 6$$

$$x+9 < 18x-42$$

$$51 < 17x$$

4)

$$\left.\begin{aligned} &НОД(a;b;c) = 15 \\ &НОК(a;b;c) = 3^{15}\cdot 5^{18} \end{aligned}\right\}$$

$a \vdots 15$

$b \vdots 15$

$c \vdots 15$

$a = 3^{\alpha_1} 5^{\beta_1}$

$b = 3^{\alpha_2}\cdot 5^{\beta_2}$

$c = 3^{\alpha_3}\cdot 5^{\beta_3}$

$НОД(a;b;c) = 15 = 3\cdot 5$

$\Updownarrow$

$\min(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 1$

$\min(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = 1$

$НОК(a;b;c) = 3^{15}\cdot 5^{18}$

$\Updownarrow$

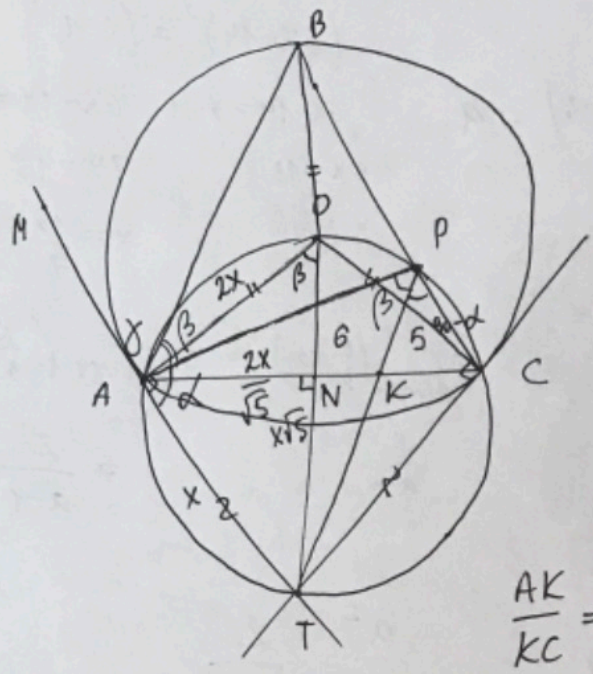
$\max(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 15$

~~min~~ $\max(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = 18$

$1 \ \underbrace{\ }_{15 \text{ вариантов}}\ 15$

$$\begin{array}{r} 96 \\ \times\ 78 \\ \hline 768 \\ 672 \\ \hline 8488 \end{array}$$

Черновик



$$\frac{CP}{PB} = \frac{CK}{KA} = \frac{5}{6}$$

$$\frac{S_{APC}}{S_{BPA}} = \frac{PC}{BP} = \frac{5}{6}$$

$S_{APK} = 6$

$S_{CPK} = 5$

$S_{BPA} = \frac{6}{5} \cdot 11 = \frac{66}{5}$

а) $S_{ABC} = ?$

$\frac{AK}{KC} = \frac{6}{5}$

$S_{ABC} = \frac{66}{5} + 11 = \frac{55+66}{5} = \frac{121}{5} = \frac{242}{10} = 24{,}2$

$AK \cdot KC = PK \cdot KT$

$5AK = 6KC$

$KC = \frac{5}{6} AK$

$PK \cdot KT = \frac{5}{6} AK^2$

$AN = \frac{2x^2}{x\sqrt{5}} = \frac{2x}{\sqrt{5}}$

б) $\angle ABC = \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$

$\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{2}$

$\sin\beta = \frac{2x}{\sqrt{5}} : 2x = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\cos\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\beta = \frac{4}{5}$

$\frac{PK}{AB} = \frac{5}{11}$

$AB = \frac{11PK}{5} = \frac{\frac{4\sqrt{15}}{\sqrt{11}} \cdot 11}{5} = \frac{4\sqrt{3} \cdot \sqrt{11}}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{33}}{\sqrt{5}}$

$PC \cdot PK \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = 5$

$AP \cdot PC \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = 11 = \frac{55}{2}$

$AP \cdot PK = 12\sqrt{5}$

$PK \cdot PC = 10\sqrt{5}$

$AP \cdot PK^2 \cdot PC = 120 \cdot 5$

$PK^2 \cdot \frac{55}{2} = 120 \cdot 5$

$PK^2 = \frac{240}{11}$

$15 \cdot 16$

$PK = \frac{4\sqrt{15}}{\sqrt{11}}$

21104655 (U78473 M1303689)

Черновик

$\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14) = \log_{6x-14}(x-1)$

$\log_{6x-14}(x-1)^2 = 2$

$(6x-14)^2 = (x-1)^2$

$\log_{6x-14}(x-1)^2 = \log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right) = a$

$6x-14 = x-1 \qquad 6x-14 = 1-x$

$5x = 13 \qquad 7x = 15$

$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14) = a-1$

$x = 2{,}6 \qquad x = \frac{15}{7}$

$\underbrace{\log_{6x-14}(x-1)}_{=\frac{a}{2}} \cdot \underbrace{\log_{(x-1)}\left(\frac{x}{3}+3\right)}_{=a} = \log_{6x-14}\left(\frac{x}{3}+3\right) = \frac{2}{a-1}$

~~2log~~

$2\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14) = a-1$

$\frac{a^2}{2} = \frac{2}{a-1}$

$a^2(a-1) = 4$

$\sqrt{\frac{x}{3}+3} = 6x-14$

$a^3 - a^2 - 4 = 0$

$\cancel{\frac{x}{3}+3 = 36x^2}$

$(a-2)(a^2+a+2) = 0$

$D<0$

$6 \cdot 2{,}6 = 15{,}6 - 14 = 1{,}6$

$a=2$

$\frac{x}{3} + \frac{2{,}6}{3} = \frac{x+9}{3} = \sqrt{\frac{11{,}6}{3}} \neq 1{,}6$

$\frac{6 \cdot 15 - 14 \cdot 7}{7}$

90

21104655 (U78473 M1303689)