Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104549**

ID профиля: **376873**

Вариант 18

Черновик.

№1.

~~$a_7 \cdot a_{12} > S+20$~~ $S = a_1 + a_2 + \dots + a_7$. $a_2 > a_1 \dots$

d.

$a_7 \cdot a_{12} > S+20$ $a_1 + \dots + a_7 =$

$a_9 \cdot a_{10} < S+44$. $= \frac{a_1 + a_1 + 6d}{2} \cdot 7 = \frac{2a_1 + 6d}{2} \cdot 7 = (a_1 + 3d) \cdot 7$.

$a_7 = a_1 + 6d$

$a_7 = a_1 + 6d$, $a_{12} = a_1 + 11d$

$a_9 = a_1 + 8d$, $a_{10} = a_1 + 9d$. $(a_1 + 6d)(a_1 + 11d) > (a_1 + 3d) \cdot 7 + 20$

$a_1^2 + \cancel{6d \cdot a_1} + \cancel{11d a_1} + 66d^2 > \cancel{7a_1} + 21d + 20$

$a_1^2 + (17d - 7)a_1 + 66d^2 - 21d - 20 > 0$. $a_1^2 + 17d \cdot a_1 - 7 \cdot a_1 + 66d^2 - 21d - 20 > 0$

$D = \cancel{289d^2} + 49 - \cancel{248d} - \cancel{264d^2} + \cancel{84d} + 80 =$

$= 25d^2 - 164d + 129 \geq 0$.

14×17 $14 \cdot 14 + 14 \cdot 3 = 152 + 196$

$196 + 52 = 248$ $66 \times 4 = 264$

17×14: 68, 17, 238 $196 + 42$ $289 - 264 = 25$ $248 - 84 = 164$

$238 - 84 = 164$

$24 + 240$

$25d^2 - 154d + 129 \geq 0$. $6009 - 80$

$77^2 - 129 \cdot 25$. 5929

$D_1 =$ $(80-3)^2 = 6400 + 9 - 480$

$1290 : 2 = 645$ 129×25 ~~130~~ $5929 - 3225$

$129 \cdot 20 + 129 \cdot 5 = 645 +$

$1290 \cdot 2$ $2580 + 645 = 3225$ $5929 - 3225 = 2704$

$77 + 52 = 129$ $(50+1)^2 = 2500 + 100$

$(52)^2 = 2500 + 4 + 200$

$d_1 = \frac{77-52}{25} = \frac{25}{25} = 1$

$d_2 = \frac{77+52}{25} =$

1 $\frac{129}{25}$ d

288. $4 \cdot 44 = 160 + 16$ $-\frac{238}{84}$ Черновик.

$\begin{array}{r} 49 \\ +176 \\ \hline 225 \end{array}$

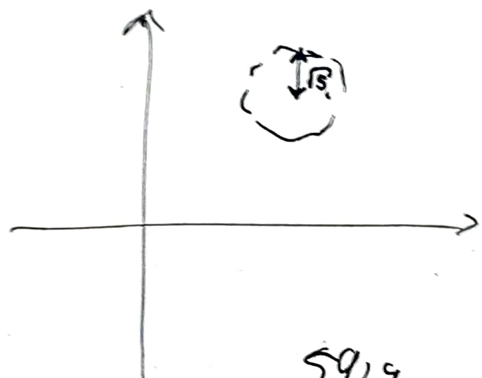
$d = 77^2 - 225 =$

$\begin{array}{r} 5929 \\ -225 \\ \hline 5704 \end{array}$

$(72)^2 = 4900 + 4 + 280$

$(76)^2 = 4900 + 36 + 840$

$\begin{array}{r} 12 \\ \cdot 7 \\ \hline 84 \end{array}$



$\begin{array}{r} 176 \\ +49 \\ \hline 225 \end{array}$

$77^2 = 4900 + 49 + 980$

$5000 + 880 + 49$

$5880 + 49 = 5929$

$\begin{array}{r} 5929 \\ -225 \\ \hline 5704 \end{array}$ $4 \cdot 1426 = 8 \cdot 713$

$a^2 + b^2 \leq \min(4a - 2b, 5)$

$d_1 = \dfrac{77 \pm 2\sqrt{1426}}{1}$ $40 - 2$.

$77 - 2\sqrt{1426} \overset{>}{\vee} 1$

$76 \overset{>}{\vee} 2 \cdot 1426$

$38 \overset{>}{\vee} \sqrt{1426}$

$\begin{array}{r} 1600 \\ -160 \\ \hline 1444 \end{array}$ $+4 - 160$

$1 \quad 77 - 2\sqrt{1426}$

$\frac{129}{25}$ $77 + 2\sqrt{1426}$

$a_1 = 7 - 17d \pm$

$49 - 24 = 24$.

Черновик

$a_1^2+17a_1+72-7a_1-21-44<0$ $\quad \begin{array}{r}72\\-65\\\hline 17\end{array}$

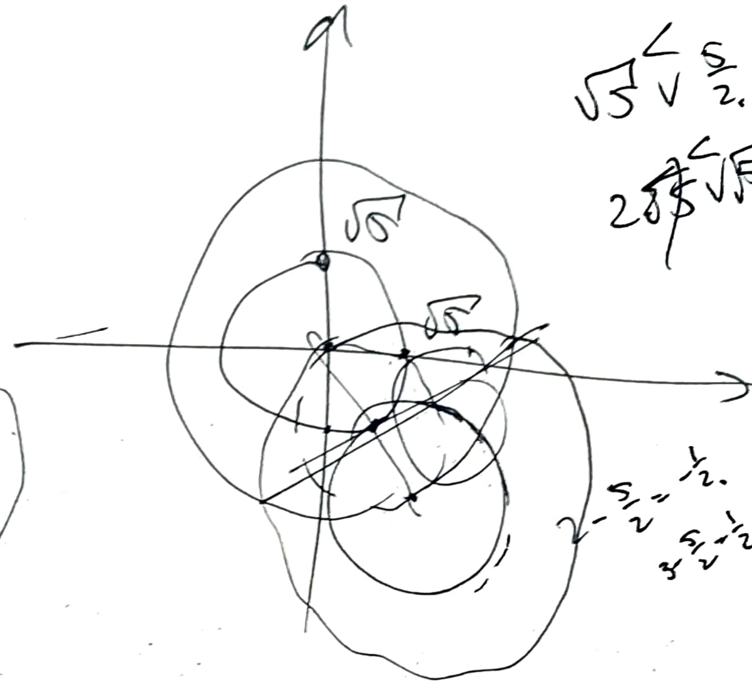
$a_1^2+10a_1+17<0$

$(a_1+5)^2-8<0$

$a_1=-4;-$

$\sqrt5 \lessgtr \frac52$

$2\cancel{8}\lessgtr\sqrt5$



$2-\frac52=-\frac12$

$3-\frac52=\frac12$

$\cancel{a^2-4a+4+4a^2-10a+}\frac{25}{4}+\cancel{4a-5-8}\le0$ $\quad b=2a-\frac52$

$5a^2-10a+\frac14\le0$ $\quad a^2+4a^2-10a+\frac{25}{4}\le5$

$\cancel{a^2+a^2}\; a^2+4a^2-10a+\frac{25}{4}\cancel{-4a+4a}-5\le0$ $\quad 5a^2-10a+\frac54\le0$

$a_1=25-25$

$\cancel{a^2}\; 5a^2-10a+\frac54$ $\quad (\sqrt5a-\frac{\sqrt5}{2})^2$

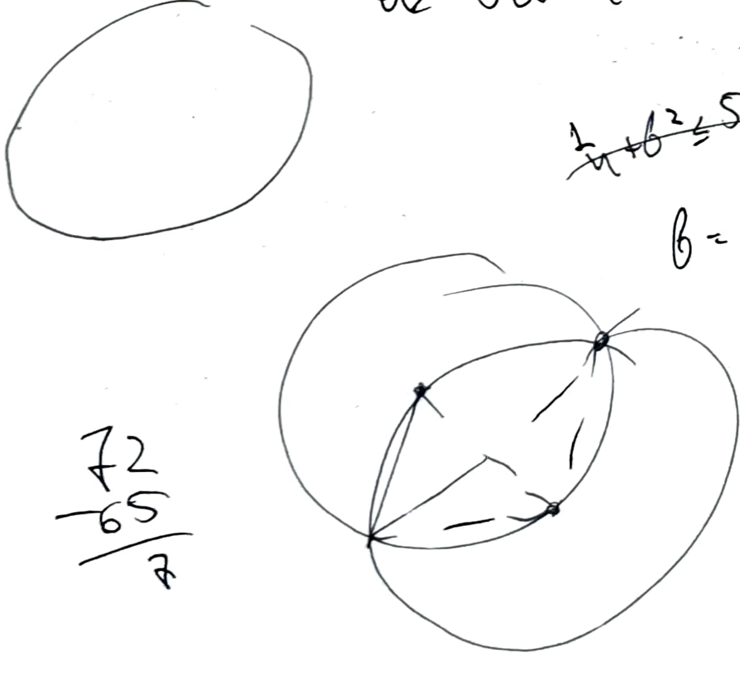
$b=2a-\frac52$

$\cancel{\frac14+b^2\le5}$

$a^2-4a+4+b^2+2b+1$

$b=1-\frac52=-\frac32$ $\quad a^2-4a+4+4a^2-10a+\frac{25}{4}+$

$\frac12 i$



$\begin{array}{r}72\\-65\\\hline 7\end{array}$

$25-7=18.$ $\quad 12$ $\quad \frac{804}{3}$

$+25-18.$

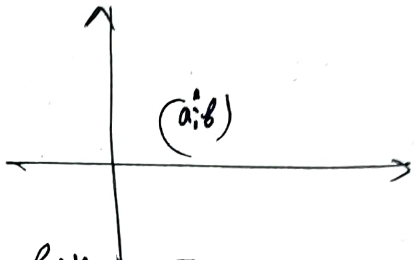
Черновик

$$a_1 = \frac{7-17d \pm \sqrt{d^2-154d+225}}{2}$$

№7. $\frac{66}{-41}$ $\frac{}{25}$

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 5 \\ a^2+b^2 \le \min(4a-2b, 5) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$a^2+b^2 \le 5.$



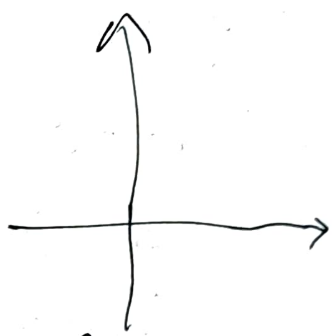
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 5 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a^2+b^2 \le 4a-2b \\ 4a-2b \le 5 \end{cases} \\ \begin{cases} a^2+b^2 \le 5 \\ 4a-2b \ge 5 \end{cases} \end{array} \right. \end{cases}$$

$a^2-4a+b^2+2b+4+1 \le 5$

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 5 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (a-2)^2+(b+1)^2 \le 5 \\ 4a-2b \le 5 \end{cases} \\ \begin{cases} a^2+b^2 \le 5 \\ 4a-2b \ge 5 \end{cases} \end{array} \right. \end{cases}$$

$b \le 2a - \frac{5}{2}$

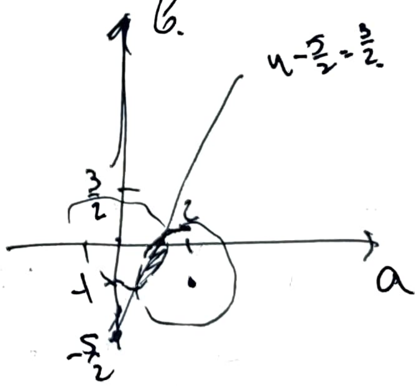
$b \ge 2a - \frac{5}{2}.$



$$+\begin{array}{l} a^2+b^2 \le 5 \\ -4a+2b \le -5 \end{array}$$

$a^2-4a+b^2+2b \le 0$

$(a-2)^2+(b+1)^2 \le 5.$



~~Чистовик. Лист 1.~~ Черновик.

№1.

$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_7 = \frac{a_1+a_7}{2}\cdot 7 = \frac{a_1 + a_1 + 6d}{2}\cdot 7 = (a_1+3d)\cdot 7$, где d - разность прогр.

$a_7 = a_1+6d$; $a_{12} = a_1+11d$; $a_9 = a_1+8d$; $a_{10} = a_1+9d$.

$a_7\cdot a_{12} > S+20, \Leftrightarrow (a_1+6d)\cdot(a_1+11d) > (a_1+3d)\cdot 7+20, \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a_1^2+17d\cdot a_1+66d^2 > 7a_1+21d+20, \Leftrightarrow a_1^2+(17d-7)\cdot a_1+66d^2-21d-20>0$

$D_I = 289d^2+49-14\cdot17\cdot d-264d^2+84d+80 = 25d^2-238d+84d+129 = 25d^2-154d+129 =$
$= (d-1)(d-\frac{129}{25})$

(2) $a_9\cdot a_{10} < S+44, \Leftrightarrow (a_1+8d)(a_1+9d) < (a_1+3d)\cdot 7+44, \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a_1^2+17d\cdot a_1+72d^2-7a_1-21d-44<0, \Leftrightarrow a_1^2+(17d-7)\cdot a_1+72d^2-21d-44<0.$

$D_{II} = 289d^2-238d+49-288d^2+84d+176 = d^2-154d+225 = (d-77+2\sqrt{1426})(d-77-2\sqrt{14}$

т.к. все члены арифм. прогр. - целые числа, то a_1 - целое, a_2 - целое

$a_2 = a_1+d$, a_2-a_1 - целое, $\Rightarrow$ d - тоже целое число.

Чтобы (2) имело решения необходимо, чтобы $D_{II}\geq 0$, $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ ~~$d\in[77-2\sqrt{1426}; 77+2\sqrt{1426}]$~~. $d\in(-\infty; 77-2\sqrt{1426}]\cup[77+2\sqrt{1426};+\infty)$

Чернетка.

$5\sqrt{3}$,

$$\left(\frac{20\pi}{6}-5\sqrt{3}\right)\cdot 4+10\sqrt{3}= \cancel{20\pi}$$ це

$$\frac{80\pi}{6}-10\sqrt{3}$$

$$40\pi-\frac{80\pi}{6}+10\sqrt{3}=40\pi-\frac{40\pi}{3}+10\sqrt{3}=\frac{80\pi}{3}+10\sqrt{3}.$$

Чистовик. Лист ~~2~~1. Вар. – 18.

~~№2.~~

№1.

Пусть d – разность прогрессии, тогда, т.к. все её члены целые и прогрессия возрастающая, то $d \in \mathbb{N}$

$a_7 = a_1 + 6d$; $a_{12} = a_1 + 11d$; $a_9 = a_1 + 8d$; $a_{10} = a_1 + 9d$.

$S = \frac{a_1 + a_7}{2} \cdot 7 = \frac{a_1 + a_1 + 6d}{2} \cdot 7 = \frac{2a_1 + 6d}{2} \cdot 7 = (a_1 + 3d) \cdot 7 = 7a_1 + 21d.$

$a_7 \cdot a_{12} = (a_1 + 6d) \cdot (a_1 + 11d) = a_1^2 + 6d \cdot a_1 + 11d \cdot a_1 + 66d^2 = a_1 + 17d a_1 + 66d^2$

$a_9 \cdot a_{10} = (a_1 + 8d)(a_1 + 9d) = a_1^2 + 17d \cdot a_1 + 72d^2.$

Известно, что $\begin{cases} a_7 a_{12} > S + 20 \\ a_9 \cdot a_{10} < S + 44 \end{cases}$, $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} a_1^2 + 17d a_1 + 66d^2 > S + 20 \\ a_1^2 + 17d \cdot a_1 + 72d^2 < S + 44 \end{cases}$, $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\begin{cases} a_1^2 + 17d a_1 + 66d^2 > S + 20 \\ -a_1^2 - 17d \cdot a_1 - 72d^2 > -S - 44 \end{cases}$, $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} a_1^2 + 17d \cdot a_1 + 66d^2 > S + 20 \\ -6d^2 > -24 \end{cases}$, $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\begin{cases} a_1^2 + 17d \cdot a_1 + 66d^2 > S + 20 \\ d^2 < 4 \end{cases}$ т.к. $d \in \mathbb{N}$, то из $d^2 < 4$ следует, что, ~~$\Leftrightarrow$~~ $\Rightarrow$ $d = 1$, откуда

$a_1^2 + 17a_1 + 66 > 7a_1 + 21 + 20$, $\Leftrightarrow$ $a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0$, $\Leftrightarrow$ $(a_1 + 5)^2 > 0$, $\Rightarrow$ $a_1 ~~\in \mathbb{Z} \setminus \{-5\}~~ \neq -5$. необх., чтобы выполнялось при $d = 1$ нер-во:

$a_9 \cdot a_{10} < S + 44$, ~~$\Leftrightarrow a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0, \Leftrightarrow (a_1 + 5)^2 - 18 < 0$, откуда~~

~~$a_1 = -3; -4; -5; -6; -7$; но т.к. $a_1 \neq -5$, то a_1 может принимать значение $-3; -4; -5; -6; -7$ и при $d = 1$ все они удовлетворяют условию.~~

~~Ответ: $-3; -4; -5; -6; -7$.~~

$\Leftrightarrow$ $a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0$, $\Leftrightarrow$ $(a_1 + 5)^2 - 18 < 0$. $\Rightarrow$ $a_1 = -9; -8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1$;

т.к. $a_1 \neq -5$, то конечный ответ: $a_1 = -9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1$. Все такие a_1 удовлетворяют всем условиям при $d = 1$.

Ответ: $-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1$.

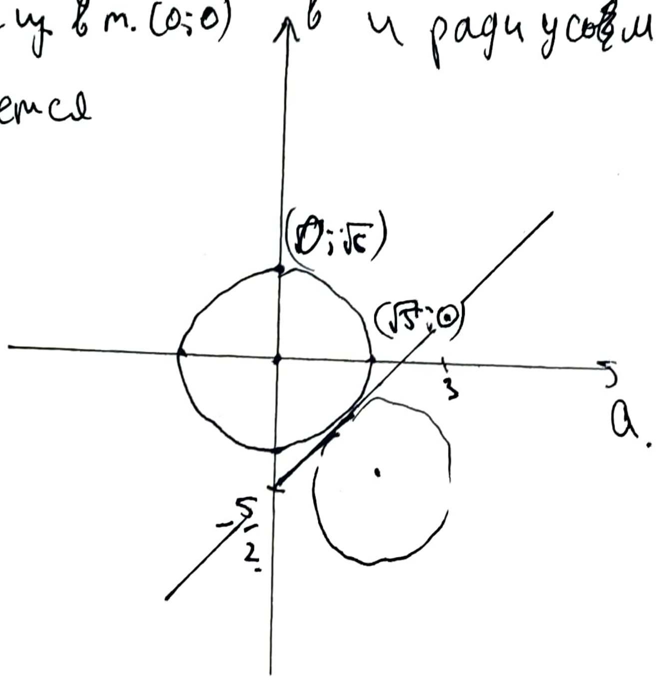
Чистовик. Лист 2.

№3.

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 5\\ a^2+b^2\le \min(4a-2b;5)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 5\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a^2+b^2\le 5\\ 4a-2b\ge 5\end{cases}\\ \begin{cases}a^2+b^2\le 4a-2b\\ 4a-2b\le 5\end{cases}\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 5\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a^2+b^2\le 5\\ b\le 2a-\frac{5}{2}\end{cases} (1)\\ \begin{cases}(a-2)^2+(b+1)^2\le 5\\ b\ge 2a-\frac{5}{2}\end{cases} (2)\end{array}\right.\end{cases}$$

Рассмотрим совокупность из этой системы: система (1) этой совокупности на плоскости $(a;b)$ задаёт ~~кусок~~ ~~окружности~~ круга: круг с ц. в т. $(0;0)$ и радиусом $\sqrt{5}$.

(прямая $b=2a-\frac{5}{2}$ - касается окр. $a^2+b^2=5$)

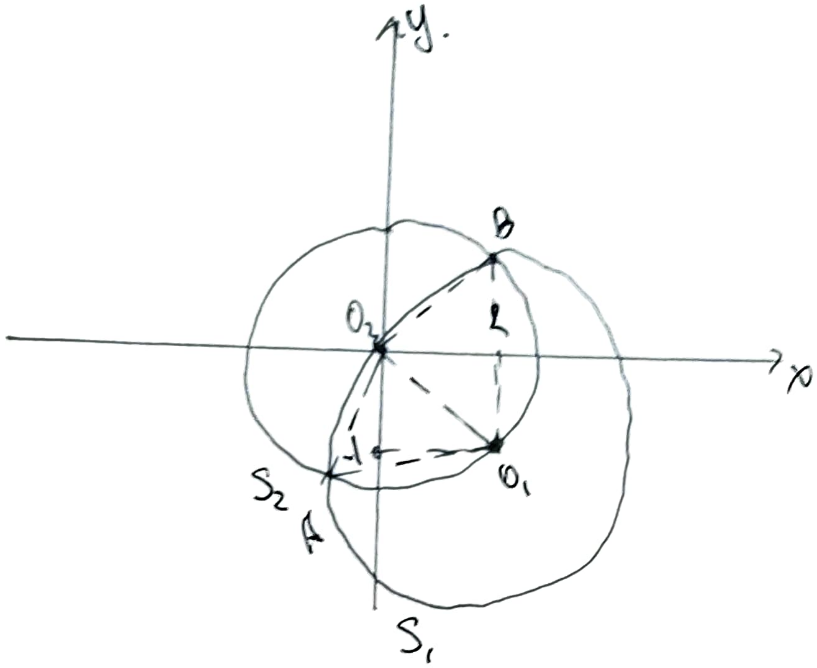


Система (2) этой совокупности в плоскости $(a;b)$ задаёт круг с ц. в т. $(2;-1)$ и радиусом $\sqrt{5}$, который касается прямой $b=2a-\frac{5}{2}$.

Значит центр окружности $(x-a)^2+(y-b)^2\le 5$ лежит ~~на~~ внутри одного из двух кругов $x^2+y^2\le 5$ или $(x-2)^2+(y+1)^2\le 5$ или на их границе. (Эти два круга касаются в т. $(\frac{1}{2};-\frac{3}{2})$). Если посмотреть на множество, которое образуют все такие круги $(x-a)^2+(y-b)^2\le 5$ при возможных a и b, то ~~пусть~~ это мн-во будет являться объединением всех точек множества $x^2+y^2\le 20$ и ~~$x+y$~~ $(x-2)^2+(y+1)^2\le 20$

Продолжение на листе 3.

Чистовик. Лист 3.



Пусть круг. с ц. в т. (2;-1) – S_1, а с ц. в т. (0;0) – S_2, тогда очевидно, что центр S_1 лежит на S_2 и наоборот, Пусть центр. S_2 – O_2 и S_1 – O_1, $S_2 \cap S_1 = A, B$, $\triangle O_1O_2A$ и $\triangle O_1O_2B$ – равносторонние, с площадью $5\sqrt{3}$, площадь кругов равна $\pi \cdot 20 = 20\pi$, площадь сектора O_2O_1A в ~~окр.~~ круге S_2 равна $\frac{20\pi}{6}$, и в круге S_1 – тоже $\frac{20\pi}{6}$, площадь части круга S_2 между хордой AO_1 и меньшей дугой AO_1 равна $\frac{20\pi}{6} - 5\sqrt{3}$, аналогично находится площадь части круга между хордой AO_2 и меньшей дугой AO_2 и тоже самое с ~~верш.~~ точкой B. Площадь фигуры AO_2BO_1 равна $\left(\frac{20\pi}{6} - 5\sqrt{3}\right)\cdot 4 + (5\sqrt{3})\cdot 2 = \frac{80\pi}{6} - 2\cdot 5\sqrt{3} = \frac{40\pi}{3} - 10\sqrt{3}$, Площади кругов 20π, Площадь объединения мн-ва равна $2\cdot 20\pi - \frac{40\pi}{3} + 10\sqrt{3} =$

Ответ: $\frac{80\pi}{3} + 10\sqrt{3}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104549**

ID профиля: **376873**

Вариант 18

Чистовик. Лист 1.

№5. Решение.

$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)$, $\log_{(6x-14)}(x-1)^2$, $\log_{(x-1)}\left(\frac{x}{3}+3\right)$

Ограничения: $\begin{cases} 6x-14>0 \\ 6x-14\neq 1 \\ x-1\neq 1 \\ x-1>0 \\ \frac{x}{3}+3>0 \\ \frac{x}{3}+3\neq 1 \end{cases}$, $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} x>\frac{7}{3} \\ x\neq\frac{5}{2} \\ x\neq 2 \\ x>1 \\ x>-9 \\ x\neq -6 \end{cases}$, $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} x>\frac{7}{3} \\ x\neq\frac{5}{2} \end{cases}$

На области ограничений справедливы равенства
$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14) = \cancel{\frac{5}{2}}\, 2\cdot\log_{\left(\frac{x}{3}+3\right)}(6x-14)$ и $\log_{(6x-14)}(x-1)^2 = 2\cdot\log_{(6x-14)}(x-1)$, тогда числа имеют вид.

$2\log_{\left(\frac{x}{3}+3\right)}(6x-14)$; $2\cdot\log_{(6x-14)}(x-1)$; $\log_{(x-1)}\left(\frac{x}{3}+3\right)$

Рассмотрим три случая:

$\begin{cases} 2\cdot\log_{\left(\frac{x}{3}+3\right)}(6x-14) = 2\cdot\log_{(6x-14)}(x-1) \\ \log_{(x-1)}\left(\frac{x}{3}+3\right) = \log_{(6x-14)}(x-1) - 1 \end{cases}$, $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \log_{\left(\frac{x}{3}+3\right)}(6x-14) = \log_{(6x-14)}(x-1) \\ \log_{(x-1)}\left(\frac{x}{3}+3\right) = \log_{(6x-14)}(x-1) - 1. \end{cases}$

При всех допустимых x выполняется равенство
$\log_{(x-1)}\left(\frac{x}{3}+3\right) = \log_{(x-1)}(6x-14)\cdot\log_{(6x-14)}\left(\frac{x}{3}+3\right)$. Пусть $\log_{\left(\frac{x}{3}+3\right)}(6x-14) = a$, $\log_{(6x-14)}(x-1) = b$, тогда $\log_{(x-1)}\left(\frac{x}{3}+3\right) = \frac{1}{b}\cdot\frac{1}{a}$ и система принимает вид.

$\begin{cases} a=b \\ \frac{1}{ab} = b-1 \end{cases}$, $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} a=b \\ \frac{1}{a^2} = a-1 \end{cases}$, $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} a=b \\ 1=a^3-a^2 \\ a\neq 0 \end{cases}$, Черновик. ~~Чистовик. Лист 4.~~

б) $\angle ABC = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$, $\angle ABC = \alpha$, $\Rightarrow$ $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$, $\Rightarrow$ $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$, $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{2}$, $\cos\alpha = 2\sin\alpha$,

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $5\sin^2\alpha = 1$, $\Leftarrow$ $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

~~Пусть~~ $\angle ATO = \alpha$, $\Rightarrow$, $\frac{OA}{AT} = \frac{1}{2}$, Пусть $OA = a$, $AT = 2a$, тогда $TO = \sqrt{5}a$,

По т. Синусов в $\triangle ABC$: $\frac{AC}{\sin\alpha} = 2 \cdot AO = 2 \cdot a$, $AC = 2a \cdot \sin\alpha = 11x$,

$a = \frac{11}{2}x \cdot \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{11}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot x \Rightarrow a = \frac{11\sqrt{5}x}{2}$, $TO^2 = AO^2 + AT^2 = a^2 + 4a^2 = 5a^2$, $\Rightarrow$

$\Rightarrow$, $TO = \sqrt{5}a$, $\angle PAC = \angle PTC$ ~~$\Rightarrow$~~, т.к. $APCT$ – вписан, $\Rightarrow$, $\triangle APK \sim \triangle TPC$,

$\frac{S_{APK}}{S_{TPC}} = k^2 = \left(\frac{AK}{CT}\right)^2 = \left(\frac{6x}{2a}\right)^2 = \left(\frac{6x}{~~2~~ 11\sqrt{5}x}\right)^2 = \frac{6 \cdot 6}{121 \cdot 5}$; $S_{APK} = 6$, тогда

$S_{TPC} = S_{APK} \cdot \frac{121 \cdot 5}{6 \cdot 6} = \frac{121 \cdot 5}{6}$, $S_{TCK} = S_{TPC} - S_{PCK} = \frac{121 \cdot 5}{6} - 5 = \left(\frac{121}{6} - 1\right) \cdot 5 =$

$= \frac{115}{6} \cdot 5 = 115 \cdot \frac{5}{6}$; Аналогично $\triangle CPK \sim \triangle TPA$, $\frac{S_{CPK}}{S_{TPA}} = \left(\frac{CK}{AT}\right)^2 = \left(\frac{5x}{2a}\right)^2 =$

$= \left(\frac{5x}{11\sqrt{5}x}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{11}\right)^2 = \frac{5}{121} = \frac{5}{S_{TPA}}$, $\Rightarrow$ $S_{TPA} = 121$, $\Rightarrow$ $S_{ATK} = 121 - 6 = 115$.

$S_{ATC} = S_{ATK} + S_{CTK} = 115 + 115 \cdot \frac{5}{6} = 115 \cdot \frac{11}{6}$. В $\triangle ATC$ проведём высоту TH, если $TK = t$, то $AH = 2t$, $5t^2 = 4a^2$ (из т. Пиф. в $\triangle ATK$),

$t = \frac{2a}{\sqrt{5}}$, $\Rightarrow$, $TK = \frac{2a}{\sqrt{5}}$, $AH = \frac{4a}{\sqrt{5}}$,

$121 - 96 = 100$

$$\begin{array}{r} 121 \\ -\ 96 \\ \hline 25 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 100 \\ +\ 125 \\ \hline 225 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 275 \\ \times\ 5 \\ \hline 1375 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 1375 & 25 \\ -125 & 55 \\ \hline 125 & \end{array}$$

$192 = 64 \cdot 3$.

Черновик.

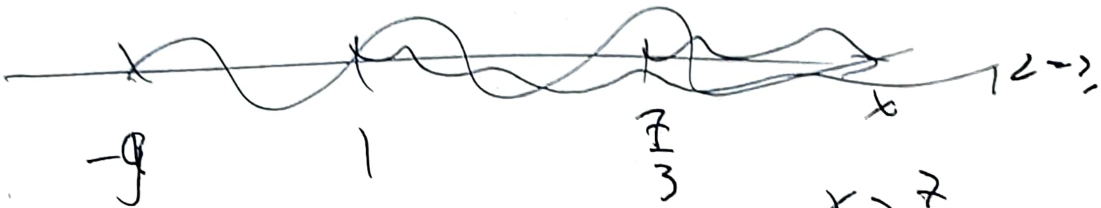
$$\begin{cases} \text{НОД}(a;b;c)=15 \\ \text{НОК}(a;b;c)=3^{15}\cdot 5^{18}. \end{cases}$$

$x > \frac{14}{6} = \frac{7}{3}$

$x \neq \frac{15}{6} = \frac{5}{2}$

$\frac{7}{3}$

$x+9 \neq 3;\ x \neq -6$



$x > \frac{7}{3}$

$x > \frac{7}{3},$

$\frac{5}{2} \overset{>}{\vee} \frac{7}{3}$

$a+b \geq 2\sqrt{ab}.$

$\log_{(\frac{x}{3}+3)}$

$4\cdot\sqrt{\log_{(\frac{x}{3}+3)}(x-1)} \le 2\cdot\log_{(x-1)}\left(\frac{x}{3}+3\right)+2.$

$2t^2-4t+2\geq 0$

$t^2-2t+1\geq 0$

$(t-1)^2\geq 0$

Черновик

$$\frac{1}{\log_{(6x-14)}\left(\frac{x}{3}+3\right)} = \frac{\log_{(6x-14)}(x-1)}{1}, \Leftrightarrow \quad 1 = \log_{(6x-14)}(x-1)\cdot\log_{(6x-14)}\left(\frac{x}{3}+3\right)$$

$x-1 \vee 6x-14$, $13 \vee 5x$. $\quad \frac{13}{5} \vee x$.

$\frac{13}{5} \overset{>}{\vee} \frac{7}{3}$; $39 \overset{>}{\vee} 35$

$$\begin{cases} a=b \\ \frac{1}{ab}= \end{cases}$$

$\log_{(x-1)}\left(\frac{x}{3}+3\right) = \log_{\frac{x}{3}(6x-14)}\left(\frac{x}{3}+3\right) + \log$ $\quad a^3-a^2-1=0.$

$a^3-a^2-1\geq 0$ $\quad \begin{cases} a>1 \\ a<2 \end{cases}$ $\quad \frac{27}{8}-\cancel{\frac{9}{4}-1}$ $\quad 13$

$3a^2-2a\geq 0$ $\quad \frac{64}{27}-\frac{16}{9}-1$

$a\left(a-\frac{2}{3}\right)\geq 0$

$\frac{25}{9}$; 175

$a>0$.

$6x-14 > \frac{x}{3}+3 > 0.$ $\quad x>-9.$

$18x-42 > x+9 > 0.$

$17x > 51$

$x>3.$

$11x = \frac{49}{\sqrt{5}}, \; a = \frac{11\sqrt{5}}{4}x$ $\quad \frac{24}{4\sqrt{5}}$ $\quad \frac{2a}{\sqrt{5}} \cdot \frac{a}{\sqrt{5}} = \frac{2a^2}{5} = \frac{275}{96} = 25 \cdot 6$

$16 \cdot 6 =$

$(2+4)25 =$

$$\frac{6^2 \cdot 4^2}{121 \cdot 5} = \frac{6}{S}, \quad S = \frac{\cancel{6} \cdot 5 \cdot 121}{6 \cdot \cancel{6} \cdot 4^2} = \frac{5 \cdot 121}{96} \quad a^2 = \frac{25 \cdot 5 \cdot \cancel{6}}{2 \cdot \cancel{6} \cdot 4^2}$$

$$a = \frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{2} \cdot 4}$$

$$\frac{5x}{\frac{11\sqrt{5}}{4} \cdot x} = \left(\frac{\sqrt{5} \cdot 4}{4}\right)^2 = \frac{5}{S}$$

$$11x = \frac{49}{\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$$

$$S = \frac{121 \cdot \cancel{5}}{\cancel{5} \cdot 16} = \frac{121}{16}$$

$$\frac{2a^2}{5} = \frac{11 \cdot 5 \cdot 5}{}$$

$$\frac{2a^2}{5} = \frac{275}{96} = \frac{55 \cdot 5}{6 \cdot 16}$$

$$\cancel{2a}\, a^2 = \frac{5^2 \cdot 5 \cdot 4}{\cancel{6} \cdot 4^2 \cdot 4 \cdot 3}$$

$$a = \frac{5\cancel{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{11}}{\cancel{4} \cdot \cancel{\sqrt{6}} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 2}$$

$$11x = \frac{5\sqrt{11}}{\sqrt{62}}$$

Черновик.

$$\frac{S}{S} = \left(\frac{5x}{2a}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{\cancel{x}\cdot 2}{4\sqrt{5}\cancel{x}}\right)^2 = \frac{5}{121}$$

$S_{APT} = 121,\quad S_{ATK} = 115,$

$$\frac{S}{S} = \left(\frac{6x}{2a}\right)^2 = \left(\frac{6\cdot\cancel{x}\cdot 2}{2\cdot 4\cdot\sqrt{5}\cdot\cancel{x}}\right) = \frac{36}{121\cdot 5},\ S = \frac{121\cdot 5}{6} - 5 = \left(\frac{121}{6}-1\right)\cdot 5 = \frac{115\cdot 5}{6}$$

$$S_{CKT} = \frac{115\cdot 5}{6},\quad S_{ACT} = 115\cdot\left(\frac{4}{6}\right) = 115\cdot\frac{11}{6} =$$

$\frac{4a}{\sqrt{5}} = 2t$ $\qquad 4t^2 + t^2 = 4a^2,\ t^2 = \frac{4}{5}a^2,\ t = \frac{2}{\sqrt{5}}a \qquad -115\frac{5}{23}$

$t = \frac{2}{\sqrt{5}}a$

$$S = \frac{4a}{\sqrt{5}}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}a = 115\cdot\frac{11}{6} \Rightarrow 23\cdot 5\cdot\frac{11}{6} = \frac{8\cdot a^2}{5}$$

$$a^2 = \frac{25\cdot 23\cdot 11}{6\cdot 8},\quad a$$

$$11x = \frac{2a}{4\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{11}\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{23}\cdot\cancel{\sqrt{11}}}{\cancel{8}4\cdot\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{23}}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{3}\cdot 2}$$

Черновик.

$\frac{AC}{\sin\alpha} = 2R = 2a$

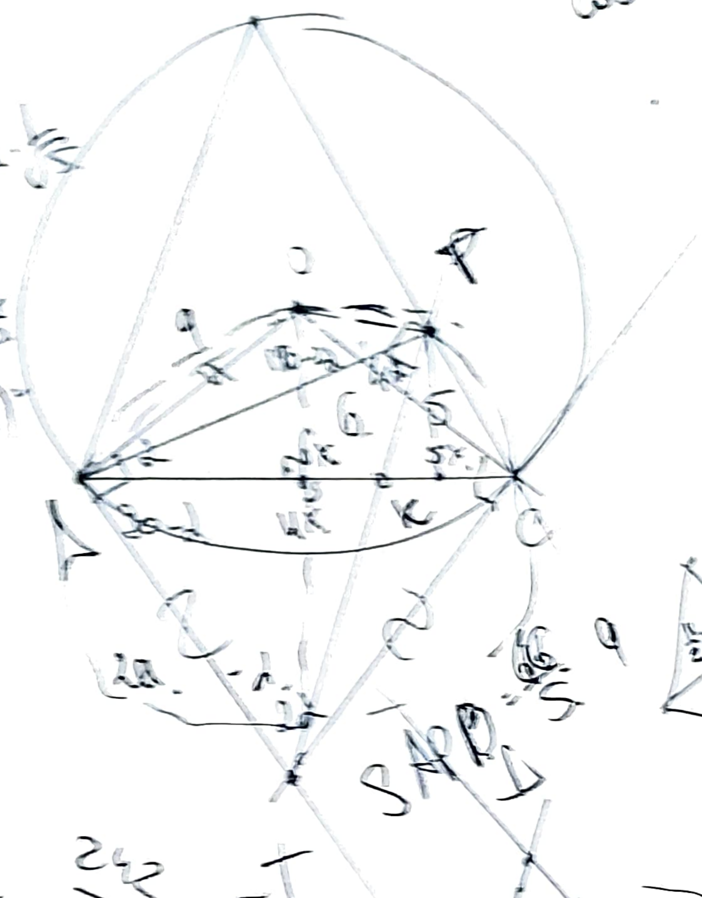
$\tan\alpha = \frac{1}{2}$. $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{2}$. $\cos\alpha = 2\sin\alpha$. $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt5}$, $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt5}$

$\frac{AC}{\sin\alpha} = 2a$

AC

$11x = 2a \cdot \frac{1}{\sqrt5}$

$x = \frac{2}{11}\frac{a}{\sqrt5}$



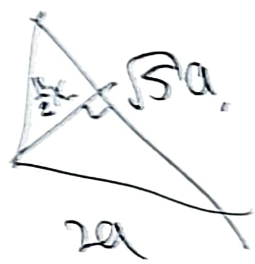
$AC = 2a\sin\alpha$

$11x = 2a \cdot \frac{1}{\sqrt5}$

$x = \frac{2a}{11\sqrt5}$

$11\left(\frac{11}{5}-1\right) = 11\left(\frac{6}{5}\right) = \frac{66}{5}$

$\frac{121}{5} - 11 = $

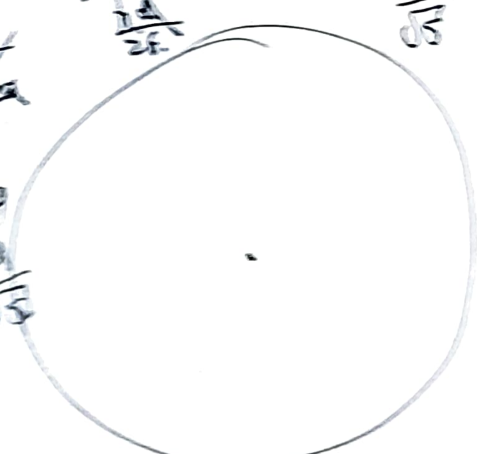


$\sqrt5 a$. $a^2 + 4a^2 =$

SAPD

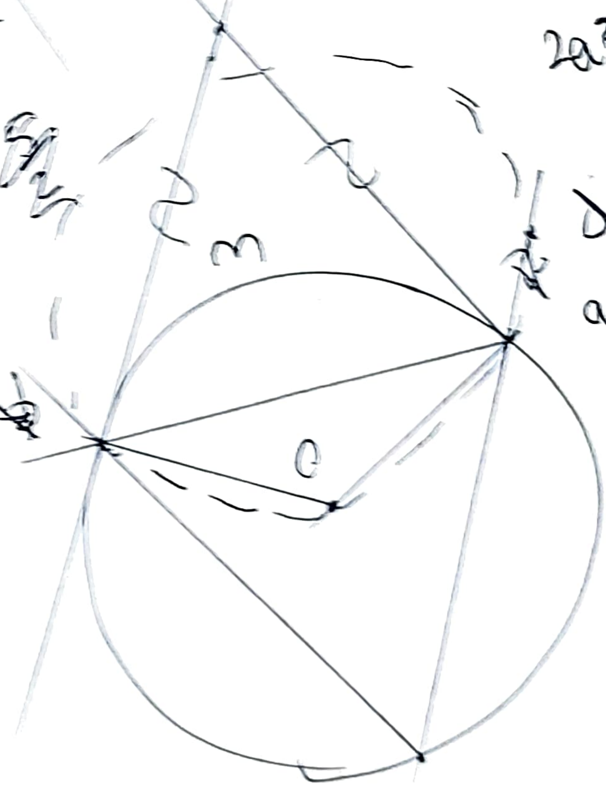
$\sqrt{4a^2+a^2}$

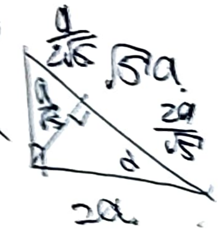
$2a^2 = \frac{11}{2}x \cdot \sqrt5 a$



$\sqrt5 t = 2a$

$t = \frac{2a}{\sqrt5}$

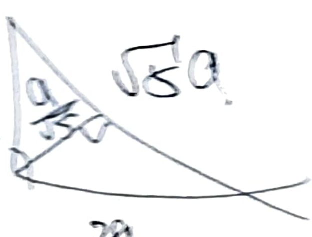




$\frac{a}{2\sqrt5}$ $\sqrt5 a$ $\frac{2a}{\sqrt5}$

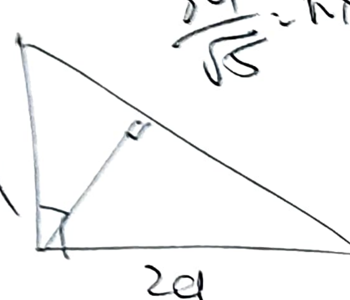
$x = \frac{2a}{11\sqrt5}$

$\frac{2a}{\sqrt5} : \frac{a}{2\sqrt5}$



$\sqrt5 a$

$\frac{8a}{\sqrt5} = 11x$



$2a^2 = a^2$

$\frac{a^2}{20} + \frac{4a^2}{20} = \frac{a^2}{5}$

$\frac{AC}{\frac{1}{\sqrt5}} = 2a$ $AC = \frac{2a}{\sqrt5}$, $x = \frac{2a}{11\sqrt5}$, $11x = \frac{2a}{\sqrt5}$.

$$\begin{cases} \log_{\left(\frac{x}{3}+3\right)}(6x-14) = \log_{(6x-14)}(x-1) \\ \log_{(x-1)}\left(\frac{x}{3}+3\right) = \log_{\left(\frac{x}{3}+3\right)}(6x-14) - 1 \end{cases}$$

черновик.

$$\begin{cases} a = b \\ \frac{1}{ab} = a-1 \end{cases} \quad \begin{cases} a = b \\ \frac{1}{a^2} = a-1 \end{cases} \quad \begin{cases} a = b \\ 1 = a^3 - a^2 \end{cases}$$

$a^3 - a^2 - 1 = 0$

$$\left(\log_{\left(\frac{x}{3}+3\right)}(6x-14)\right)^3 - \left(\log_{\left(\frac{x}{3}+3\right)}(6x-14)\right)^2 - 1 = 0$$

$\begin{cases} a > 1 \\ a < 2 \end{cases}$

$\frac{4}{3} \vee \frac{5}{4}$ $16 \vee 15$

$\frac{125}{64} - \frac{25}{16} - 1 =$ ~~$125 - 100 - 64$~~

$\log \quad \frac{x}{3}+3$

$$\left(\frac{x}{3}+3-1\right)\left(6x-14-\frac{x}{3}-3\right) > 0$$

$$(x+6)(18x-42-x-9) > 0$$

$$(x+6)(17x-51) > 0$$

$x \geq 5$

$-6 \quad 3 \quad x$

$5 \times 5 \times 7 + 5 \times 5 \times 7$

$\frac{4}{3}$

$2 = \frac{1}{b}$

$1 = 2b$

$x = \frac{5}{2}$

$\log_{\left(\frac{5}{6}+3\right)} 1$

$$\begin{array}{r|l} 2a^3 - a^2 - 1 & a-1 \\ -2a^3 - 2a^2 & 2a^2 + a + \\ \hline a^2 - 1 & \end{array}$$

$-9 \quad 1 \quad \frac{7}{3} \quad x$

$136 = 18 +$

$D: 1 <$

$\log_4 2$

$13 \cdot 6 = 78$

$13 + 45 = 58$

$\frac{13}{15} + 3 = \frac{58}{15}$

$\frac{78}{5} - 14 = \frac{8}{5}$

Чистовик. Лист. 1

№5.

$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)$, $\log_{(6x-14)}(x-1)^2$, $\log_{(x-1)}\left(\frac{x}{3}+3\right)$

Ограничения: $\begin{cases} \frac{x}{3}+3>0 \\ \frac{x}{3}+3\neq 1 \\ 6x-14>0 \\ 6x-14\neq 1 \\ x-1>0 \\ x-1\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-9 \\ x\neq -6 \\ x>\frac{7}{3} \\ x\neq\frac{5}{2} \\ x>1 \\ x\neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\frac{7}{3} \\ x\neq\frac{5}{2} \end{cases}$

На области ограничений верны равенства:

$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14) = 2\cdot\log_{\left(\frac{x}{3}+3\right)}(6x-14)$; $\log_{(6x-14)}(x-1)^2 = 2\cdot\log_{(6x-14)}(x-1)$

и $\log_{(x-1)}\left(\frac{x}{3}+3\right) = \log_{(x-1)}(6x-14)\cdot\log_{(6x-14)}\left(\frac{x}{3}+3\right) = \frac{1}{\log_{(6x-14)}(x-1)}\cdot\frac{1}{\log_{\left(\frac{x}{3}+3\right)}(6x-14)}$

Пусть $\log_{\left(\frac{x}{3}+3\right)}(6x-14)=a$; $\log_{(6x-14)}(x-1)=b$, тогда

$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)=2a$, $\log_{(6x-14)}(x-1)^2=2b$; $\log_{(x-1)}\left(\frac{x}{3}+3\right)=\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{a}$

Рассмотрим несколько случаев.

I) $\begin{cases} 2a=\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{a} \\ 2a-1=2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ 2a^2=\frac{1}{b} \\ 2a=2b+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a,b\neq 0 \\ b=\frac{1}{2a^2} \\ 2a=\frac{1}{a^2}+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a,b\neq 0 \\ b=\frac{1}{2a^2} \\ 2a^3-a^2-1=0 \end{cases}$

Решим отдельно ур-е $2a^3-a^2-1=0$: $a=1$ – решение данного ур-я, $\Rightarrow$ $2a^3-a^2-1$ делится на $a-1$, $2a^3-a^2-1=(a-1)(2a^2+a+1)=0$ $\Leftrightarrow$ $a=1$, т.к. $2a^2+a+1$ – не имеет реш., $a=1$, $\Leftrightarrow$ $\log_{\left(\frac{x}{3}+3\right)}(6x-14)=1$, $\Leftrightarrow$ (с уч. огр.) $6x-14=\frac{x}{3}+3$, $\Leftrightarrow$ $18x-42=x+9$, $\Leftrightarrow$ $x=3$. $\to$ подходит под огр.

лист.2 чистовик.

если $a=1$, то $b=\frac{1}{2}$, $\log_{(6x-14)}(x-1)=\frac{1}{2}$, при $x=3$ $\log_{(6x-14)}(x-1)$ равно $\log_4 2=\frac{1}{2}$.

$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, $\Rightarrow$ $x=3$ – подходит.

II) $\begin{cases} 2a=\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{a} \\ 2b-1=2a \end{cases}$, $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} a,b\neq 0 \\ 2b^2=\frac{1}{a} \\ 2b-1=2a \end{cases}$, $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} a,b\neq 0 \\ a=\frac{1}{2b^2} \\ 2b-1=\frac{1}{b^2} \end{cases}$, $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} a,b\neq 0 \\ a=\frac{1}{2b^2} \\ 2b^3-b^2-1=0 \end{cases}$, $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\begin{cases} b=1 \\ a,b\neq 0 \\ a=\frac{1}{2b^2} \end{cases}$, $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} b=1 \\ a=\frac{1}{2} \\ a,b\neq 0 \end{cases}$, $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} b=1 \\ a=\frac{1}{2}. \end{cases}$

Если $b=1$, то $\log_{(6x-14)}(x-1)=1$, $\overset{\text{с уч. Одз}}{\Leftrightarrow}$ $6x-14=x-1$, $\Leftrightarrow$ $5x=13$, $x=\frac{13}{5}$,

$\frac{13}{5}\overset{>}{\vee}\frac{7}{3}$, $39\overset{>}{\vee}35$, $\Rightarrow$ $x=\frac{13}{5}$ удовл Одз.

$a=\frac{1}{2}$, $\log_{(\frac{x}{3}+3)}(6x-14)=\frac{1}{2}$, при $x=\frac{13}{5}$, $\frac{x}{3}+3=\frac{13}{15}+3=\frac{13+45}{15}=\frac{58}{15}$,

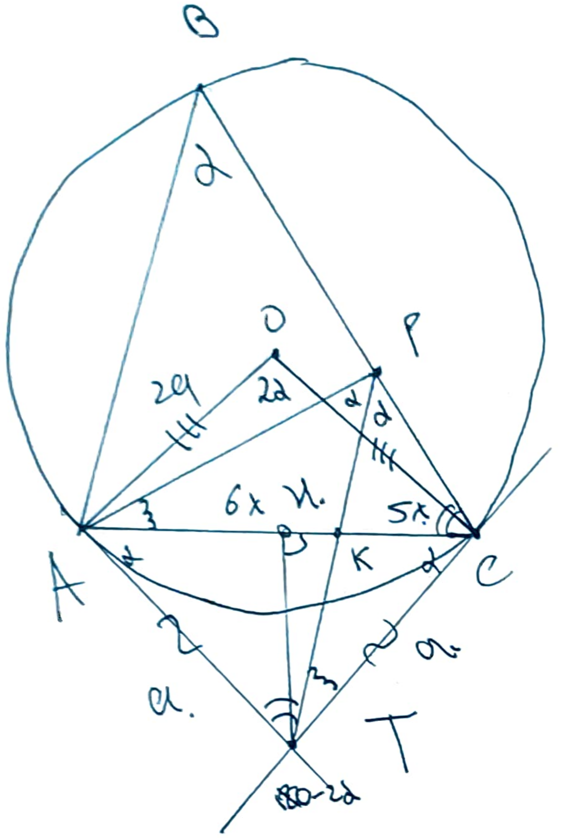
$6x-14=\frac{78}{5}-14=\frac{78-70}{5}=\frac{8}{5}$, $\log_{(\frac{58}{15})}(\frac{8}{5})\neq\frac{1}{2}$, $\Rightarrow$ $x=\frac{13}{5}$ – не явл. реш.

III) $\begin{cases} 2a=2b \\ 2a=\frac{1}{a\cdot b}-1 \end{cases}$, $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} a,b\neq 0 \\ a=b \\ 2a=\frac{1}{a^2}-1 \end{cases}$, $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} a,b\neq 0 \\ a=b \\ 2a^3-a^2-1=0 \end{cases}$, $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$,

$a=1$, $\Rightarrow$ $x=3$, при $x=3$ $\log_{(6x-14)}(x-1)$ равно $\log_4 2=\frac{1}{2}$, $\Rightarrow$ решений нет.

Ответ: $x=3$.

№6. Чистовик лист 3.



т.к. PT пересекает сторону AC, а не прямую AC, то т. P лежит тоже на стороне BC. У ΔAPK и ΔCPK общая вершина P и сторона против этой вершины лежат на одной прямой, =>, ΔAPK и ΔCPK имеют общую высоту из верш. P, =>

$\frac{S_{APK}}{S_{CPK}} = \frac{AK}{CK} = \frac{6}{5}$, пусть $AK = 6x$, а $CK = 5x$. Пусть ~~∠TPC = α~~ $\angle AOC = 2\alpha$. тогда $\angle ABC = \alpha$, т.к. AT и TC – касательные, то $\angle OAT = \angle OCT = 90°$, =>, 4-х уг. AOCT – вписан, =>, $\angle ATC = 180 - 2\alpha$, т.к. 4-х уг. AOPC – вписан, то $\angle APC = 2\alpha$, =>, 4-х уг APCT – тоже вписан, ~~т.к.~~ ΔACT – р/б, AT = CT как отрезки касательных, =>, $\angle ACT = \angle CAT = \alpha$ =>, $\angle APT = \angle ACT = \alpha$ и $\angle CPT = \angle CAT = \alpha$, $\angle CPT = \alpha$, $\angle CBA = \alpha$, =>, $PT \parallel AB$, =>, $\Delta CPK \sim \Delta CBA$, =>, $\frac{S_{ABC}}{S_{CPK}} = (\text{коэфф.})^2 = \left(\frac{AC}{CK}\right)^2 = \left(\frac{11x}{5x}\right)^2 = \frac{121}{25}$, откуда

$S_{ABC} = \frac{121}{25} \cdot S_{CPK} = \frac{121}{25} \cdot 5 = \frac{121}{5} = 24{,}2$.

а) Ответ: $\frac{121}{5}$.

б)

$\angle ABC = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$, $\cancel{tg\angle}$ $\angle ABC = \alpha$, $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$, $tg\alpha = \frac{1}{2}$, $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$,

$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$; в $\triangle AOT$ $\angle AOT = \alpha$, $\Rightarrow$ $\frac{AT}{AO} = \frac{1}{2}$, Пусть $AT = 2a$, тогда $AO = 2a$

По т. Синусов в $\triangle ABC$: $\frac{AC}{\sin\alpha} = 2 \cdot AO = 4a$, $AC = 4a\sin\alpha = \frac{4a}{\sqrt{5}}$,

$11x = \frac{4a}{\sqrt{5}}$; $\angle PAC = \angle PTC$; $\angle ATP = \angle ACP$, $\Rightarrow$ $\triangle APK \sim \triangle TPC$

и $\triangle CPK \sim \triangle TPA$,

1) $\frac{S_{APK}}{S_{TPC}} = \left(\frac{AK}{CT}\right)^2 = \left(\frac{6x}{a}\right)^2 = \left(\frac{6x}{\frac{11\sqrt{5}}{4}x}\right)^2 = \left(\frac{24}{11\sqrt{5}}\right)^2$, $S_{TPC} = \frac{S_{APK} \cdot 121 \cdot 5}{24^2}$,

$S_{TPC} = \frac{6 \cdot 121 \cdot 5}{6 \cdot 6 \cdot 16} = \frac{121 \cdot 5}{96}$; $S_{TCK} = S_{TPC} - S_{PCK} = \frac{121 \cdot 5}{96} - 5 =$

$= 5 \cdot \left(\frac{121 - 96}{96}\right) = 5 \cdot \frac{25}{96} = \frac{125}{96}$,

2) $\frac{S_{CPK}}{S_{TPA}} = \left(\frac{CK}{AT}\right)^2 = \left(\frac{5x}{a}\right)^2 = \left(\frac{5x}{\frac{11\sqrt{5}}{4} \cdot x}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{5} \cdot 4}{11}\right)^2 = \frac{5 \cdot 16}{121}$,

$S_{TPA} = \frac{121}{5 \cdot 16} \cdot 5 = \frac{121}{16}$, $S_{ATK} = S_{TPA} - S_{APK} = \frac{121}{16} - 6 = \frac{121 - 96}{16} = \frac{25}{16}$

$S_{ATK} + S_{TCK} = \frac{25}{16} + \frac{125}{96} = \frac{150 + 125}{96} = \frac{275}{96} = S_{ATC}$

Проведём в $\triangle ATC$ высоту TH, Пусть $TH = t$, тогда $AH = 2t$,

$t^2 + 4t^2 = a^2$, $5t^2 = a^2$, $t = \frac{a}{\sqrt{5}}$, $\Rightarrow$ $TH = \frac{a}{\sqrt{5}}$, $AH = \frac{2a}{\sqrt{5}}$,

$S_{ATC} = \frac{2a}{\sqrt{5}} \cdot 2 \cdot \frac{a}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2a^2}{5} = \frac{275}{96}$, $a^2 = \frac{1375}{192} = \frac{55 \cdot 5^2}{3 \cdot 8^2}$, $a = \sqrt{\frac{55}{3}} \cdot \frac{5}{8}$

$11x = \frac{4a}{\sqrt{5}} = \frac{4 \cdot \sqrt{55} \cdot 5}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{3} \cdot 8} = \frac{5\sqrt{11}}{2\sqrt{3}}$

Ответ: $\frac{5\sqrt{11}}{2\sqrt{3}}$

Ответ: а) $\frac{121}{8}$; б) $\frac{5\sqrt{11}}{2\sqrt{3}}$.