Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104471**

ID профиля: **168803**

Вариант 18

Чистовик   Математика, 11 класс

Вариант 18. Часть 1.

№1 [5 баллов]

1) Пусть S – сумма первых 7 членов возрастающей арифметической прогрессии $a_1, a_2 \dots$ состоящей из целых чисел, то есть

$d > 0$ – так как возрастающая

$d \in \mathbb{Z}$, так как $a_2 - a_1 \in \mathbb{Z}$; $(a_2, a_1 \in \mathbb{Z})$ $\Big| \Rightarrow d \in \mathbb{N}$

$\Downarrow$

$d \in \mathbb{Z}$

2) $S = \dfrac{(a_1 + a_1 + 6d)}{2} \cdot 7 = (a_1 + 3d)7 = 7a_1 + 21d$;

3) $\begin{cases} a_7 \cdot a_{12} > S + 20 \\ a_9 \cdot a_{10} < S + 44 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a_1+6d)(a_1+11d) > S+20 \ (1) \\ (a_1+8d)(a_1+9d) < S+44 \ (2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1^2 + 17a_1d + 66d^2 > S+20 \\ a_1^2 + 17a_1d + 72d^2 < S+44 \end{cases} \Rightarrow$

(1): $a_1^2 + 6da_1 + 11da_1 + 66d^2 > S+20$

$a_1^2 + 17a_1d + 66d^2 > S+20$

(2): $a_1^2 + 8da_1 + 9da_1 + 72d^2 < S+44$

$a_1^2 + 17a_1d + 72d^2 < S+44$

$\Rightarrow \begin{cases} a_1^2 + 17a_1d + 66d^2 > S+20 \ (I) \\ S+44 > a_1^2 + 17a_1d + 72d^2 \ (II) \end{cases}$

$(I)+(II)$: $\cancel{a_1^2} + \cancel{17a_1d} + \cancel{66d^2} + \cancel{S} + 44 > \cancel{S} + 20 + \cancel{a_1^2} + \cancel{17a_1d} + \cancel{72d^2}$

$24 > 6d^2$

$4 > d^2 \Rightarrow -2 < d < 2$

Так как $d \in \mathbb{N} \Rightarrow \boxed{d = 1.}$

Подставим $d = 1$:

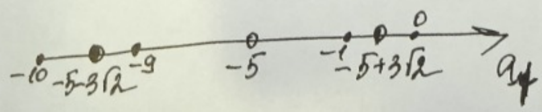
$\begin{cases} a_1^2 + 17a_1 + 66 > 7a_1 + 21 + 20 \\ a_1^2 + 17a_1 + 72 < 7a_1 + 21 + 44 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0 \\ a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a_1+5)^2 > 0 \\ a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0 \end{cases}$

$a_1^2 + 10a_1 + 7 = 0$;

$D = 100 - 4 \cdot 7 = 72 = (6\sqrt{2})^2$;

$a_{1,2} = \dfrac{-10 \pm 6\sqrt{2}}{2} = -5 \pm 3\sqrt{2}$

$\Rightarrow \begin{cases} (a_1+5)^2 > 0 \\ (a_1 + 5 - 3\sqrt{2})(a_1 + 5 + 3\sqrt{2}) < 0 \end{cases}$



$4 < 3\sqrt{2} < 5 \Rightarrow$

(так как $16 < 18 < 25$)

$\Rightarrow -5 - 3\sqrt{2} < -5 - 4 \leq a_1 \leq -5 + 4 < -5 + 3\sqrt{2} \Rightarrow$

(так как $a_1 \in \mathbb{Z}$)

$\Rightarrow -9 \leq a_1 \leq -1$

и исключаем 5

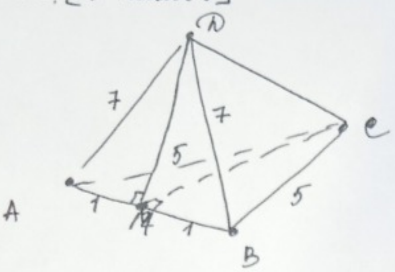
Ответ: $a_1 \in \{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1\}$

1

Чистовик. Математика, 11 класс

Вариант 18. Часть 1.

№2. [5 баллов]



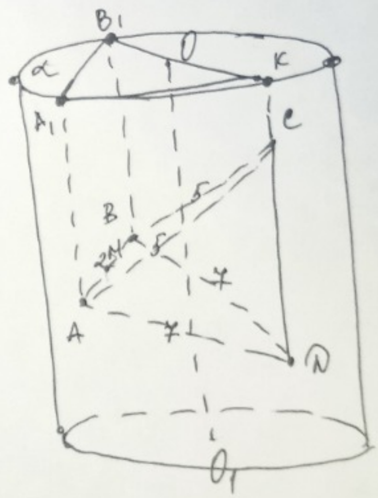
Дано: $ABCD$ – тетраэдр.
$AB=2$, $AC=CB=5$, $AD=DB=7$.

Решение:

1) Заметим, что $\triangle ADB$ и $\triangle ACB$ – равнобедренные $\Rightarrow$ высоты, проведенные ~~из~~ вершин к основанию будут медианами (по св-вам равнобедр. треугол.)

$\Rightarrow \angle$ M – середина AB $\Rightarrow$ DM – медиана $\Rightarrow$ DM – высота
CM – медиана $\Rightarrow$ CM – высота

2) Так как $AB \perp DM$ и $AB \perp CM \Rightarrow AB \perp$ пл. DCM (по пр-ку $\perp$-сти прямой и плоскости) $\Rightarrow$
$\Rightarrow CD \perp AB$.



3) Впишем тетраэдр в цилиндр, как написано в условии.
Так как $CD \parallel OO_1$, где OO_1 – ось цилиндра $\Rightarrow$
$\Rightarrow AB \perp OO_1$, так как $OO_1 \perp$ (пл. основания цил.) (по опр. цилиндра) $\Rightarrow$
$\Rightarrow AB \parallel$ (пл. основания цилиндра)

4) ~~При проекции~~ $\perp$ α – плоскость основания цилиндра.
При проекции тетраэдра на α,
так как $AB \parallel \alpha \Rightarrow A \mapsto A_1$, $B \mapsto B_1 \Rightarrow AB \mapsto A_1B_1$, причем $|AB| = |A_1B_1|$ так как $\alpha \parallel AB$

$C, D \mapsto K$ (так как $CD \perp \alpha$)

И все точки: A_1, B_1, K будут лежать на окружности, которая является основанием цилиндра.

5) Перейдем в α (рис. 1):
У нас известна только одна хорда $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ минимальный радиус тогда и только тогда, когда хорда – диаметр $\Rightarrow R = \frac{A_1B_1}{2} = 1$.

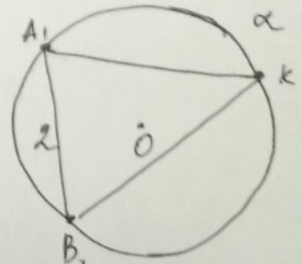


рис. 1

Продолжение на стр. 3

$\boxed{N2}$ Продолжение

б) ~~Так~~ Так как мы проецировали равнобедр треугольник с основанием $AB \parallel \alpha \Rightarrow \triangle A_1B_1K$ – равнобедр. и так как A_1B_1 – диаметр $\Rightarrow \angle A_1KB_1 = 90^\circ \Rightarrow A_1K = B_1K = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

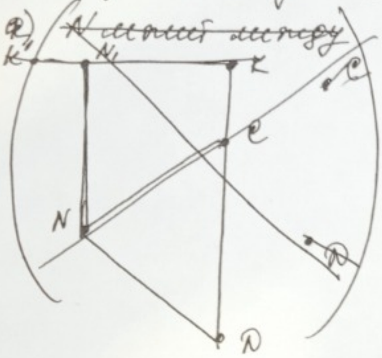
7) Теперь чтобы найти длину CD, спроецируем рисунок на плоскость CDO_1O:

~~Т~~Тогда $AB \perp CD$, $AB \perp OO_1 \Rightarrow AB \perp CDOO_1 \Rightarrow AB \longmapsto M$ (см. п. 1)

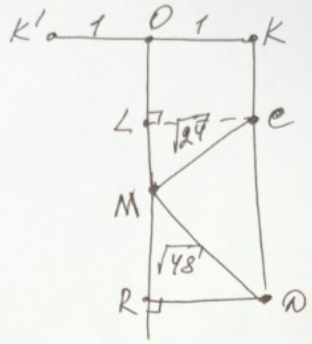
$A_1B_1 \longmapsto O$

Пусть K' – диаметрально противолож K в основании цилиндра $\alpha \Rightarrow \alpha \longmapsto KK'$

Возможны два случая:



а)



Из п. 1.:

$CM = \sqrt{25-1} = \sqrt{24}$ (по т. Пифагора)

$DM = \sqrt{49-1} = \sqrt{48}$ (по т. Пифагора)

$\rfloor CL \parallel OK \Rightarrow CL = OK = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow LM = \sqrt{24-1} = \sqrt{23}$ (по т. Пифагора)

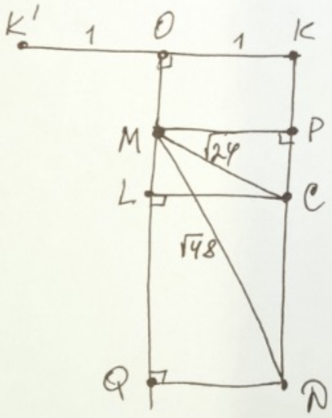
$\rfloor DR \parallel OK \Rightarrow DR = OK = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow RM = \sqrt{48-1} = \sqrt{47}$ (по т. Пифагора)

$CD = LM + MR$ (т.к. OM и KD) $\Rightarrow$

$\Rightarrow CD = \sqrt{47} + \sqrt{23}$.

б)



$MP \parallel OK$, $LC \parallel OK$, $DQ \parallel OK \Rightarrow$ т.к. $OM \parallel CD \Rightarrow$

$\Rightarrow MP = LC = QD = OK \Rightarrow$

$ML = \sqrt{24-1} = \sqrt{23}$ (по т. Пифагора)

$MQ = \sqrt{48-1} = \sqrt{47}$ (по т. Пифагора)

$CD = MQ - ML = \sqrt{47} - \sqrt{23}$.

Ответ: а) $CD = \sqrt{47} + \sqrt{23}$

б) $CD = \sqrt{47} - \sqrt{23}$

Черновик. Математика, 11 класс.

Вариант 18. Часть 1.

№3 [7 баллов]

Пусть M – фигура, состоящая из точек $(x; y)$: $\exists(a, b)$: удовлетвор. система:

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \leq 5 \quad (1)\\ a^2+b^2 \leq \min(4a-2b; 5) \quad (2)\end{cases}$$

Найти: S_M

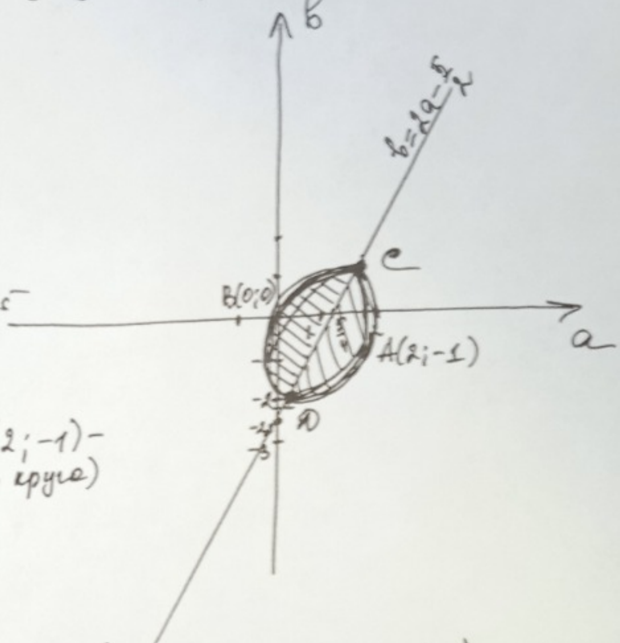
Решение:

1) (1) – круг с центром в (a, b) и радиусом 5,

Из (2) найдем ~~гом.~~ ГМТ (a, b)

2) $\begin{cases}a^2+b^2 \leq 4a-2b, \text{ при } 4a-2b<5\\ a^2+b^2 \leq 5, \text{ при } 4a-2b \geq 5\end{cases}$

Изобразим в системе координат a, b.



$\begin{cases}(a^2-4a+4)+(b^2+2b+1) \leq 5, \text{ при } 4a-2b<5\\ a^2+b^2 \leq 5, \text{ при } 4a-2b \geq 5\end{cases}$

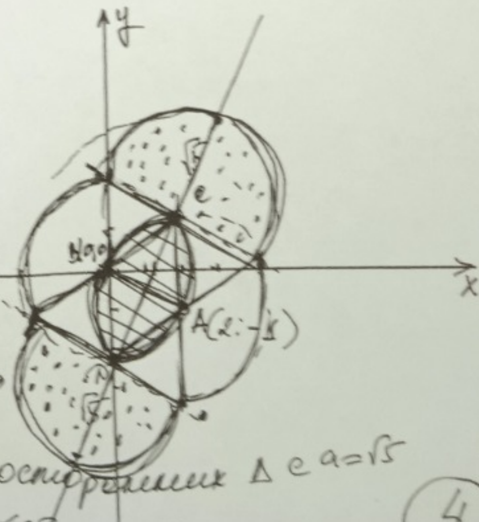
(I) $\begin{cases}(a-2)^2+(b+1)^2 \leq 5, \text{ при } 4a-2b<5, (A(2;-1) - \text{центр круга})\end{cases}$

(II) $a^2+b^2 \leq 5, \text{ при } 4a-2b \geq 5$

$B(0;0)$-центр круга

Из-за того что окружность, ограничивающая круг (I), проходит через B, а окр, ограничивающая круг (II), через A $\Rightarrow$ из-за симметрии (так как CADB-параллелограмм, (так как при $a=\frac{1}{2}$, $b=2a-\frac{5}{2}$ $b=-\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$) окружности ограничивающие круги пересекаются в C, D на прямой, $b=2a-\frac{5}{2}$

3) Теперь перенесем на плоскость xOy:



Фигура M, представляет объединение кругов с центрами в заштрихованной области и радиусом $\sqrt{5}$, ~~то есть фигура ограниченная линией, которая гомотетична жирно-выделенной линией~~

Область в точку – два полукруга с радиусом $\sqrt{5}$ $\Rightarrow S_1=\pi\cdot 5=5\pi$

Оставшуюся плоскость разбивается на 6 равносторонних Δ с $a=\sqrt{5}$ и 2 области в трети от круга.

$S_M=5\pi+6\cdot 5\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}+2\cdot\frac{1}{3}\pi\sqrt{5}^2=5\pi+\frac{30\sqrt{3}}{4}+\frac{10}{3}\pi=\frac{25}{3}\pi+\frac{15}{2}\sqrt{3}$

Ответ: $\frac{25}{3}\pi+\frac{15}{2}\sqrt{3}$

4

21104471 (U168803 M1300783)

~~Чистовик~~. Черновик. Математика, 11 класс.

Вариант 18. Часть I.

$\boxed{№3}$ [7 баллов] $\exists (a, b)$:

Пусть M состоит из точек $(x; y)$: $(x; y)$ удовлетвор системе

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 5 \quad (1) \\ a^2+b^2 \le \min(4a-2b, 5) \quad (2) \end{cases}$$

Найти S_M.

Решение:

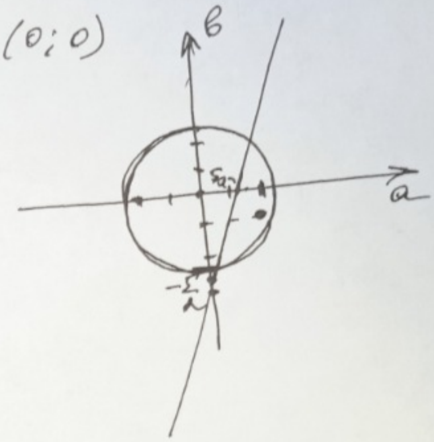
1) Из (1) неравенства, мы видим, что это г.м.т неравенства — круг с центром $B(a, b)$ и $R=\sqrt{5}$.

Найдем из (2) все возможные (a, b)

2) (2) — тоже ~~окружность~~ круг с центром $(0; 0)$

а) Когда $4a-2b<5$
~~все~~ $b>2a-\frac{5}{2}$;

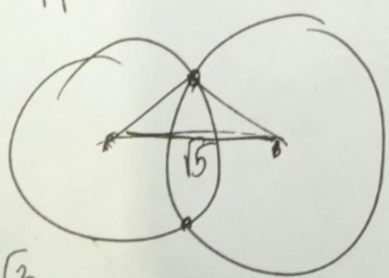
$a^2+b^2 \le 4a-2b$
$a^2-4a+b^2+2b \le 0$
$(a^2-4a+4)+(b^2+2b+1) \le 5$
$(a-2)^2+(b+1)^2 \le 5$ —
— окружно



$2b=4a-5$
$b=2a-\frac{5}{2}$.

$4-\frac{5}{2}$ $4a=2b+5$
$a=+\frac{5}{4}$

$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ $1,5$

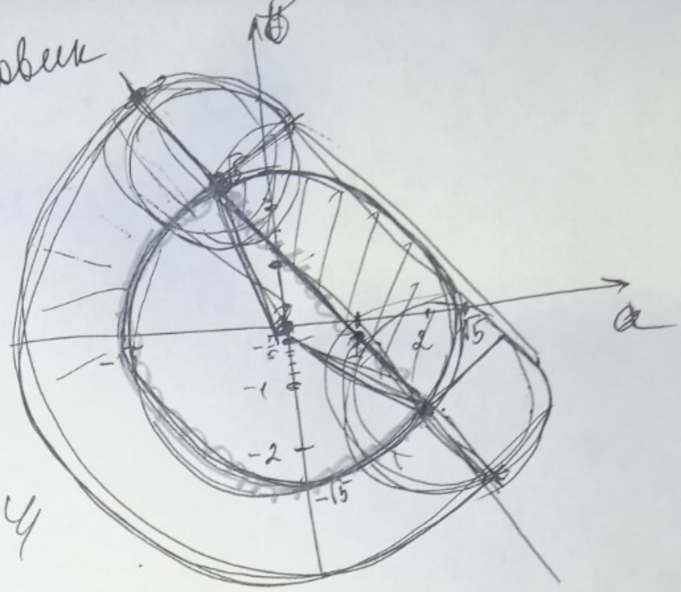


$\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

a·a.

21104471 (U168803 M1300783)

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 5\\ a^2+b^2\le \min(4a-5b+5)\end{cases}$$ Черновик



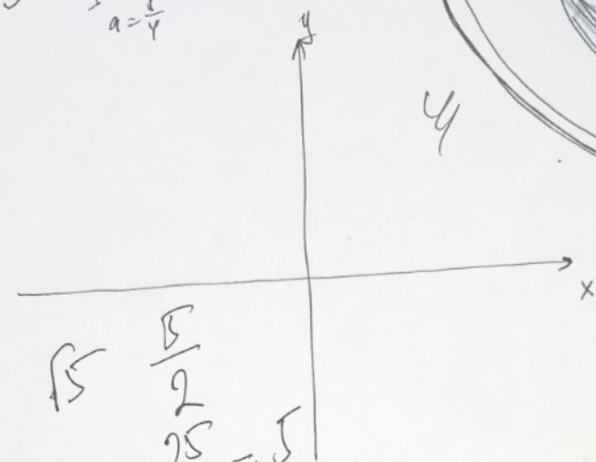
$4a-5b\le 5$

$b\ge \frac{4a-5}{5}=\frac{4}{5}a-1$

$\frac{4}{5}a=1$

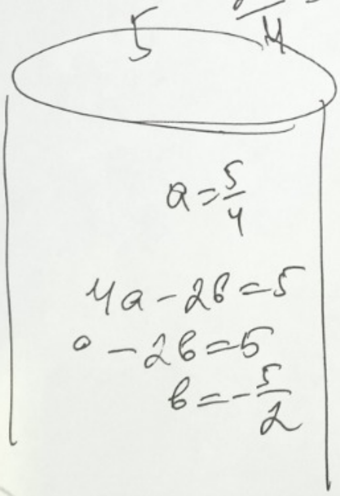
$a=\frac{5}{4}$

$0\le a^2+b^2\le 5$



$\sqrt{5}$ $\quad \frac{\sqrt{5}}{2}$

$\frac{25}{4}=5$

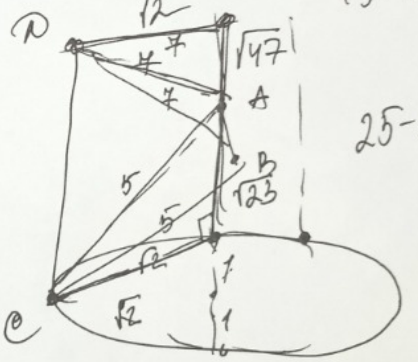


$a=\frac{5}{4}$

$4a-2b=5$

$0-2b=5$

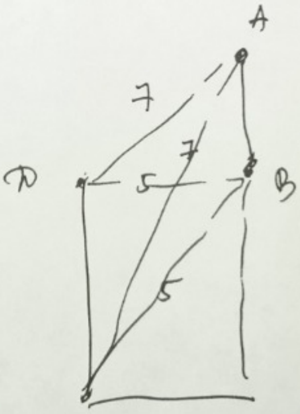
$b=-\frac{5}{2}$



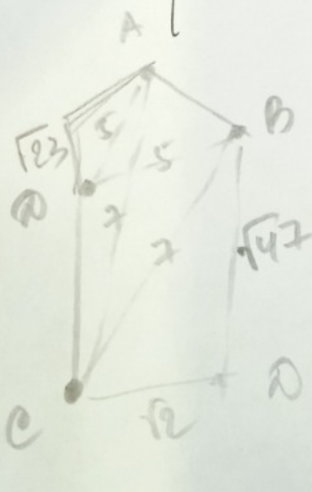
$49-2$

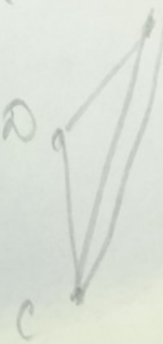
$\sqrt{23}+\sqrt{47}.$

$25-2$



$\sqrt{47}-\sqrt{23}$





21104471 (U168803 M1300783)

Черновик

① . S_7 $\quad d>0 \Rightarrow \cancel{a_7=a_1+d6}$ $\quad S=\frac{a_1+a_1+6d}{2}\cdot 7=(a_1+3d)7=$
$=7a_1+21d$

$$\begin{cases} a_7\cdot a_{12} > S_7+20 \\ a_9\cdot a_{10} < S_7+44 \end{cases}$$

$$\cancel{a_7\cdot a_{12}} \begin{cases} (a_1+6d)(a_1+11d) > 7a_1+21d+20 \\ (a_1+8d)(a_1+9d) < 7a_1+21d+44 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2+11da_1+6da_1+66d^2 > 7a_1+21d+20 \\ a_1^2+8da_1+9da_1+72d^2 < 7a_1+21d+44 \end{cases}$$

$$+\begin{cases} a_1^2+17da_1+66d^2 > 7a_1+21d+20 \\ a_1^2+17da_1+72d^2 < 7a_1+21d+44 \end{cases}$$

$\cancel{6d^2}$

$$\cancel{a_1^2}+\cancel{17da_1}+66d^2+\cancel{7a_1}+\cancel{21d}+44 > \cancel{7a_1}+\cancel{21d}+20+\cancel{a_1^2}+\cancel{17da_1}+72d^2$$

$$24>6d^2$$

$$4>d^2 \Rightarrow -2<d<2$$

При этом $d\in\mathbb{N} \Rightarrow d=1.$

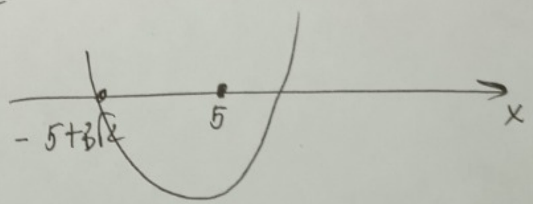
$$a_1^2+17a_1+66 > 7a_1+41$$
$$a_1^2+17a_1+72 < 7a_1+65$$

$$\begin{array}{r} 72 \\ -65 \\ \hline 7 \end{array}$$

$$\begin{cases} a_1^2+10a_1+25>0 \\ a_1^2+10a_1+7<0 \\ (a_1+5)^2>0 \\ (a_1+5+3\sqrt{2})(a_1+5-3\sqrt{2})<0 \end{cases}$$

$D=100-28=72=(6\sqrt{2})^2$ $\quad 3\sqrt{2}$

$\frac{-10\pm6\sqrt{2}}{2}$ и. $\Rightarrow -5\pm3\sqrt{2}$



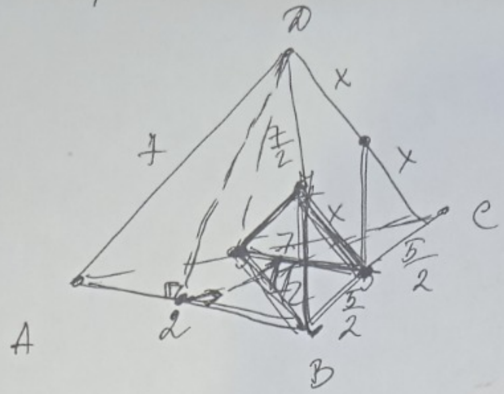
72
-65

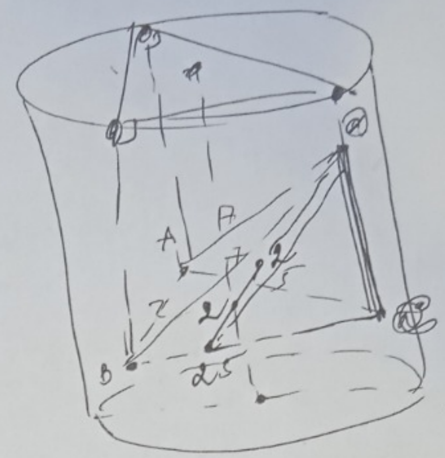
21104471 (U168803 M1300783)

② Черновик

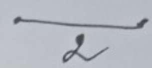
ор – ?

При каком R цилиндра – минимален.





1.



$4m^2 = 2\cdot 4 + 2\cdot 25 - 25$

$4m^2 = 8 + \cancel{50} - 25$

$m^2 = \frac{7}{4} + \frac{25}{4}$

$m^2 = \frac{29}{4}$

$m = \frac{\sqrt{29}}{2}$

$$m_1^2 = \frac{2\cdot 49 + 2\cdot 4x^2 - 25}{4} = 49 + \frac{29}{4} - 2\cdot\frac{\sqrt{29}}{2}\cdot 7\cdot\cos\alpha.$$

$$-\cancel{2}\sqrt{29}\cdot 7\cos\alpha = \frac{2\cdot 49 + 8x^2 - 25 - 4\cdot 49 - 29}{4} =$$

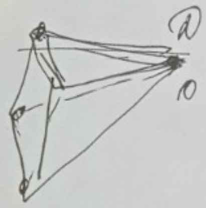
$$= \frac{8x^2 - 25 - 29 - 2\cdot 49}{4} = \frac{8x^2 - 152}{4}$$

$$= 2x^2 - 38.$$

$25 + 29 = 54$

$54 + 98 = 152$

$152 : 4 = 38$



$$\cos\alpha = \frac{38 - 2x^2}{\sqrt{29}\cdot 7}$$

$$y = 1 + \frac{49}{4} - \cancel{2}\cdot\frac{\cancel{7}}{\cancel{2}}\cdot 1\cdot\frac{38 - 2x^2}{\sqrt{29}\cdot\cancel{7}} = 1 + \frac{49}{4} - \frac{38 - 2x^2}{\sqrt{29}} =$$

$$= \frac{53}{4} - \frac{38 - 2x^2}{\sqrt{29}}.$$

$\sqrt{1 + x^2}$

$\perp$ – есть док-зана

$2R = \frac{a}{\sin\alpha}$

a – максимальная сторона

α – максимальный угол.

Ч.

Н

21104471 (U168803 M1300783)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104471**

ID профиля: **168803**

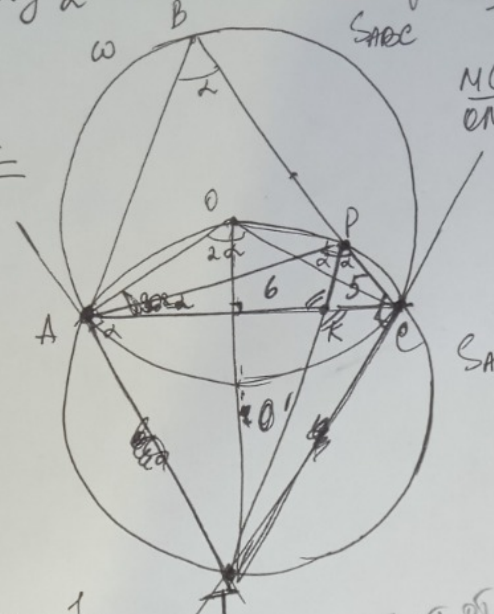
Вариант 18

Черновик

$\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$ ΔS_{ABC}

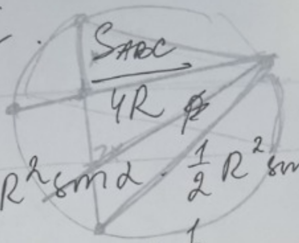
$S_{APK} = 6$; $S_{CPK} = 5$;

$\frac{133}{49}$



$\frac{MC}{OM} = \frac{1}{2}$.

$OM^2 =$



$\frac{S_{ABC}}{4R}$

$\frac{1}{2}R^2 \sin\alpha \cdot \frac{1}{2}R^2 \sin\beta$..

$S_{ABC} = AB \cdot BC \cdot \sin\alpha \cdot \frac{1}{2}$.

619
133
$\cdot 49$
1197
532
6517

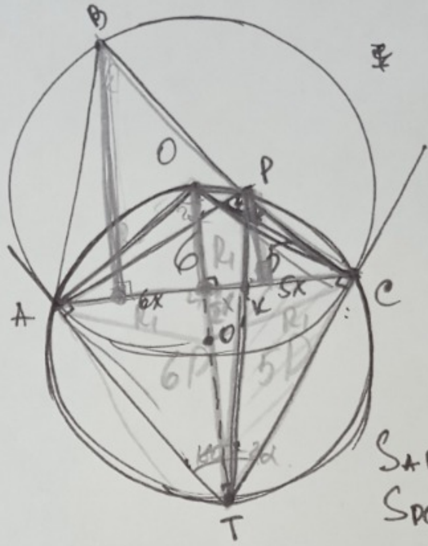
$S_{ABC} - ?$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$.

$AT^2 = TC^2 = KT \cdot PT$

$\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$.

$\operatorname{tg}2\alpha = \frac{4}{3}$

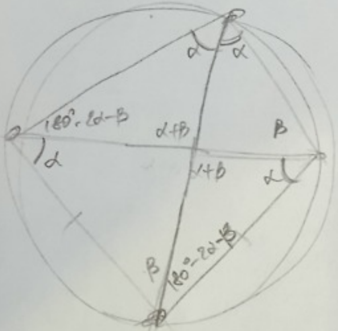


KP - биссектриса

$S_{APK} = h \cdot \frac{1}{2} \cdot AK$

$S_{PCK} = h\frac{1}{2} \cdot KC$

$\frac{S_{APK}}{S_{PCK}} = \frac{AK}{KC} = \frac{6}{5}$.



$\frac{TC}{AP} = \frac{PK}{KC} = A$

$\frac{AP}{TC} = \frac{PK}{CK} = \frac{KA}{KT}$ $\frac{PC}{TC}$ $\frac{PC}{AT} = \frac{CK}{TK} = \frac{KP}{KA}$

$\frac{PC}{AT} = \frac{CK}{TK}$ A

$\frac{PC}{TC} = \frac{CK}{TK} \Rightarrow \frac{TK}{TC} = \frac{CK}{PC}$

$\frac{AP}{CT} = \frac{AK}{KT}$ $\frac{KT}{TC} = \frac{AK}{AP} = \frac{CK}{PC}$

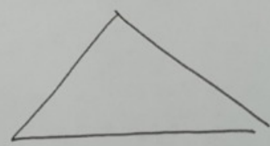
AK

$\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha = 1$

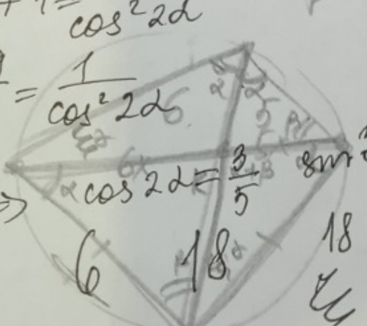
$\operatorname{tg}^2 2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 2\alpha}$

P

$\frac{AK}{KC} = \frac{6}{5}$.



$\frac{16}{9} + \frac{9}{9} = \frac{1}{\cos^2 2\alpha}$



$\frac{25}{9} \Rightarrow \cos 2\alpha = \frac{3}{5}$ $\sin 2\alpha = \frac{3}{5}$. $\Delta AKT \sim \Delta PAT$

$\frac{AK}{PA} = \frac{KT}{AT} = \frac{AT}{PT}$

6 18 18|3

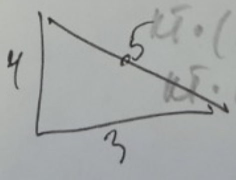
$6 \cdot 3 = 18 + 9$ $PT = TC^2$

$KT \cdot KP = 30x^2$ 6 2,5

$KT \cdot (PT - KT) = 30x^2$

$KT \cdot PT - KT^2 = 30x^2$ $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

$\frac{S_{ABC}}{4R} =$



Черновик.

4. (a,b,c) : $\begin{cases}(a,b,c)=15=3\cdot5\\ [a,b,c]=3^{15}\cdot5^{18}\end{cases}$ a

$3^{15}\cdot5^{18}$ $3^{15}\cdot5^{18}$ $3^{15}\cdot5^{18}$

от 1 до 15 18

$3^x\,5^y$ $3^a\cdot5^b$ $3^i\,5^j$

НОК$(x,a,i)=15$ * НОК$(y,b,j)=18$.

1 3 5

$x=1$ $a=3$ $i=5$ (б)

$x=3$ a

13 5 15.

~~1~~	~~3~~	~~5~~
1	1	15
1	3	5
1	3	15
1	15	

1

1	15
15	1
3	5
5	3
15	5
5	15
3	15
15	3
15	15

$\log_a b=\log_b c$

$\log_c a+1=\log_a b=\log_b c$.

$\log_a b=\frac{\log_a c}{\log_a b}=\log$

$\frac{1}{\log}$

$\log_a b=\frac{1}{\log_a b\cdot\log_c a}$

$\log_a^2 b=\frac{1}{\log_a b-1}$.

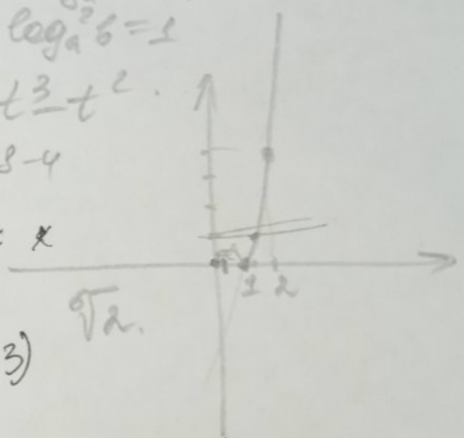
$\log_a^3 b-\log_a^2 b=1$

t^3-t^2.

3–4

$\sqrt[6]{2}$

При каких x



$\sqrt{2}$.

$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)$, $\log_{6x-14}(x-1)^2$; $\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)$

$\log_{\sqrt{a}} b$; $\log_b c^2$; $\log_c a$

1) $\log_{\sqrt{a}} b=\log_b c^2=(\log_c a)+1$
$\log_c ac$

$\frac{1}{2}\log_a b=2\log_b|c|=\log_c ac$.

$\frac{1}{2}\log_a b-2\log_b|c|=0$

$b=a^{\frac{1}{2}\log_b c^2}$

$b=a^{\log_b|c|}$

$\log_c ac=\log_b c^2$

$a=c^{\log_b c^2-1}=c^{\log_b\frac{c^2}{b}}=\left(\frac{c}{b}\right)^{2\log_b c}$

$b=c^{\log_b c^2}$

$t^3-t^2=1$.

$1+\sqrt{\frac{1}{2}}$ $1-\sqrt{\frac{1}{2}}$.

$t^2(t-1)=1$.

21104471 (U168803 M1300784)

$\log_{\sqrt{a}} b$ $\log_b c^2$ $\log_c a$ Черновик $\frac{x}{3}$ $-3>0$ $\log_{\sqrt{a}} b = \log_b c^2$

$6x-14>0$ $\log_a b = \log_b c$ $\log_c a \cancel{+1} = \log_b b$

$x-1>0$

$\log_a b = \log_b c$

$\log_a b = \frac{1}{\log_c b}$.

$\log_{\sqrt{a}} b = \log_b c^2$

$b^{\log_{\sqrt{a}} b} = c^2$

$\sqrt{a}^{\log_b c^2} = b$

$a^{\log_b |c|} = b$

$\log_c a + 1 = \log_b c^2$

$\log_c a + 1 = \log_{\sqrt{a}} b$

$b^{\log_c ac} = c^2$

$\cancel{c^{\log_a b-1} = a}$ $\sqrt{a}^{\log_c ac} = b$.

$\sqrt{a}^{\log_c^2 ac} = c^2$

$b^{\log_{\sqrt{a}} b} = \sqrt{a}^{\log_c^2 ac}$

$\log_b c^2 + 1 = \log_{\sqrt{a}} b$

$\log_{\sqrt{a}} b = \log_c a$

$\sqrt{a}^{\log_c a} = b \Rightarrow \log$ $a^{\log_c \sqrt{a}} = b$

$\cancel{b = \sqrt{a}^{\log_b c^2 + 1}}$ $a = c^{\log_b c^2 + 1}$

$\log_b c^2 + 1 = \log_c a$

$c^{\log_b c^2 \cdot \log_c \sqrt{a} + \log_c \sqrt{a}} = b$

$c^{\log_c \sqrt{a}} \cdot c^{\log}$

$\log_b c^2 \cdot \log_c \sqrt{a} =$

$\cancel{= 2\log}$ $2\log_b c \cdot \log_c \sqrt{a}$

$2\log_b c \cdot \frac{\log_b \sqrt{a}}{\log_b c} =$

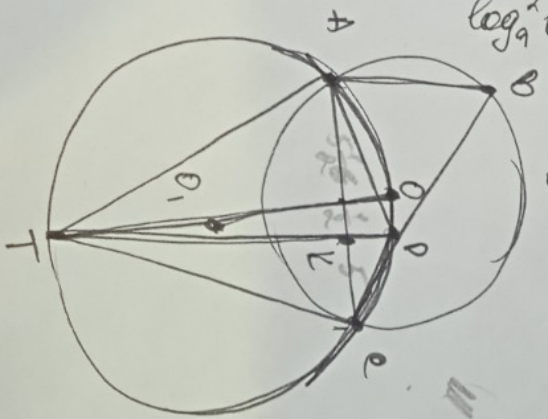
$= 2\log_b \sqrt{a}$

$\log_a b = \frac{\log_a c}{\log_a b}$

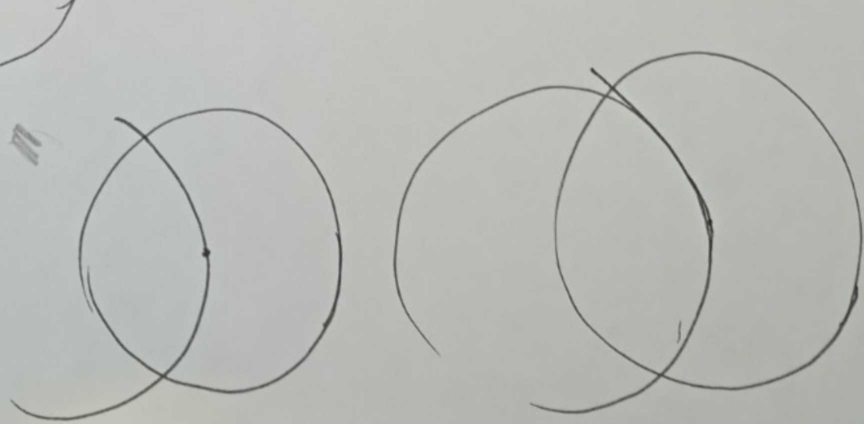
$\log_a^2 b = \frac{1}{\log_a b - 1}$.

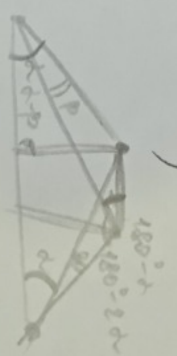
$\sqrt{a} \cdot c^{\log_b a} = b$

$\frac{b}{\sqrt{a}} = \cancel{c^{\log_b}} c^{\log_b a}$



$\log_a^2 b = \log_{\frac{b}{a}} a$





$\log_a^3 b - \log_a^2 b - 1 = 0$

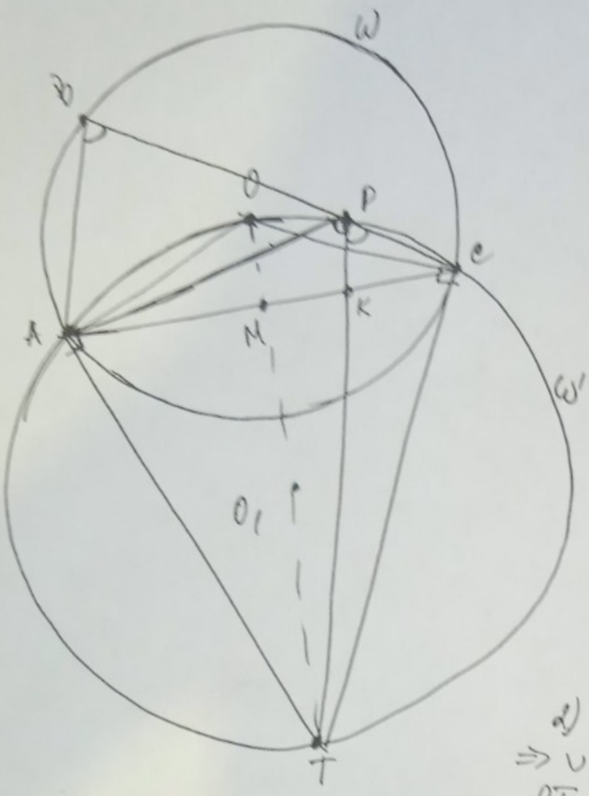
$t^3 - t^2 - 1 = 0$.

$t^2(t-1) = 1$.

Чистовик. Математика, 11 класс.

Вариант 18. Часть 2.

№6 [7 баллов]



Дано: $\triangle ABC$ – остроугольный

ω – описанная окр. $\triangle ABC$

O – центр оп-ой окр.

ω' – описанная окр $\triangle AOC$

O_1 – центр ω'

$\omega' \cap BC = P$

касат. к ω в A, C пересекаются в T.

$TP \cap AC = K$.

$S_{APK} = 6$, $S_{CPK} = 5$

а) Найдите S_{ABC}

б) Найдите AC, если $\angle ABC = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$;

Решение:

1) Так как AT, CT – касательные $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle OCT = \angle OAT = 90° \Rightarrow$

O, C, T, A лежат на одной окружности, по теореме принадлежности точек окружности, при чем OT – диаметр $\Rightarrow$

$\Rightarrow O_1 \in OT$

2) $AT = TC$ (отрезки касательных) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \smile AT = \smile TC$ (не содерж. O) $\Rightarrow$

PT – биссектриса $\angle APC \Rightarrow \frac{S_{APK}}{S_{PKC}} = \frac{AK}{KC} = \frac{6}{5}$

3) $\angle AOC = \angle APC$ (т.к. опираются на одну дугу)

$\angle AOC = 2\angle ABC$ (центральный угол) $\Rightarrow \frac{1}{2}\angle APC = \angle CPT = \frac{1}{2}\angle AOC = \angle ABC \Rightarrow$

$\Rightarrow$ так как $\angle ABC = \angle CPT \Rightarrow AB \parallel PK$ (соответственные углы равны) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle KPC$:

$k = \frac{AC}{KC} = \frac{BC}{PC} = \frac{AB}{PK} \Rightarrow S_{ABC} = k^2 S_{CPK} = \frac{AC^2}{KC^2} \cdot S_{CPK} = \left(\frac{11}{5}\right)^2 \cdot 5 = \frac{121}{5} = \underline{24,2}.$

4) $\angle ABC = \alpha \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{\cos^2 2\alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha \Rightarrow \cos^2 2\alpha = \frac{1}{\frac{9}{9}+\frac{16}{9}} = \frac{1}{\frac{25}{9}} = \frac{9}{25} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos 2\alpha = \frac{3}{5}$ (так как ABC – остроугольный)

$\sin 2\alpha = \frac{4}{5}$;

Ответ: $24,2 = S_{ABC}$.

Черновик Математика, 11 класс.

Вариант 18. Часть 2.

$\boxed{N4}$ Продолжение.

I $a_2=3 \Rightarrow b_2=1$ $c_2 \in \{[illegible]18\}$
$b_2=2$ $c_2 \in \{9;18\}$
$b_2=3$ $c_2 \in \{[illegible]18\}$
$b_2=6$ $c_2 \in \{9;18\}$
$b_2=9$ $c_2 \in \{2;6;18\}$
$b_2=18$ $c_2 \in \{1;2;3;6;9;18\}$
| 15 способов

I $a_2=6 \Rightarrow b_2=1$ $c_2 \in \{9;18\}$
$b_2=2$ $c_2 \in \{9;18\}$
$b_2=3$ $c_2 \in \{9;18\}$
$b_2=6$ $c_2 \in \{9;18\}$
$b_2=9$ $c_2 \in \{1;2;3;6;9;18\}$
$b_2=18$ $c_2 \in \{1;2;3;6;9;18\}$
| 20 способов.

I $a_2=18 \Rightarrow b_2=\{1,2;3,6;9,18\}$, $c_2\{1,2,3,6,9,18\}$ | 36 способов

Σ способов $=2\cdot 15+2\cdot 20+27+36=30+40+27+36=97+36=103+30=133$

Ответ: $133\cdot 49 = 6517$.

Чистовик. Математика, 11 класс.

Вариант 18. Часть 2.

№4. [5 баллов] Найдите количество троек (a, b, c), удовлетворяющих системе:

$$\begin{cases} НОД(a, b, c) = 15; \\ НОК(a, b, c) = 3^{15} \cdot 5^{18}; \end{cases}$$

Так как $НОД(a, b, c) = 15 \Rightarrow a \vdots 15,\ b \vdots 15,\ c \vdots 15$

И так как $НОК(a, b, c) = 3^{15} \cdot 5^{18}$, значит, что

$a = 3^{a_1} \cdot 5^{a_2};\ b = 3^{b_1} \cdot 5^{b_2};\ c = 3^{c_1} \cdot 5^{c_2};$

где $НОК(a_1, b_1, c_1) = 15$
$НОК(a_2, b_2, c_2) = 18$, при этом $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \geq 1$, так как $НОД(a, b, c) = 15$.

Независимо найдем кол-во (a_1, b_1, c_1): $НОК(a_1; b_1; c_1) = 15$
и кол-во (a_2, b_2, c_2): $НОК(a_2, b_2, c_2) = 18$
И по правилу умножения перемножим.

1) (a_1, b_1, c_1): $15 = 3 \cdot 5 \Rightarrow$ 4 делителя: 1, 3, 5, 15.

] $a_1 = 1 \Rightarrow НОК(b_1, c_1) = 15 \Rightarrow$] $b_1 = 1 \Rightarrow c_1 = 15$ (1 вариант)
] $b_1 = 3 \Rightarrow c_1 \in \{5; 15\}$ (2 варианта)
] $b_1 = 5 \Rightarrow c_1 \in \{3; 15\}$ (2 варианта)
] $b_1 = 15 \Rightarrow c_1 \in \{3; 5, 15, 1\}$ (4 варианта)
$\Sigma = 9$

] $a_1 = 3 \Rightarrow$] $b_1 = 1 \Rightarrow c_1 \in \{5; 15\}$ (2 способа)
] $b_1 = 3 \Rightarrow c_1 \in \{5; 15\}$ (2 способа)
] $b_1 = 5 \Rightarrow c_1 \in \{1; 3; 5; 15\}$ (4 способа)
] $b_1 = 15 \Rightarrow c_1 \in \{1; 3; 5; 15\}$ (4 способа)
$\Sigma = 12$

] $a_1 = 5 \Rightarrow$] $b_1 = 1 \Rightarrow c_1 \in \{3; 15\}$ (2 способа)
] $b_1 = 3 \Rightarrow c_1 \in \{1; 3; 5; 15\}$ (4 способа)
] $b_1 = 5 \Rightarrow c_1 \in \{3; 15\}$ (2 способа)
] $b_1 = 15 \Rightarrow c_1 \in \{1; 3; 5; 15\}$ (4 способа)
$\Sigma = 12$

] $a_1 = 15 \Rightarrow b_1 \in \{1; 3; 5; 15\} \times c_1 \in \{1; 3; 5; 15\}$ (16 способов)

Σ(способов) $= 9 + 12 + 12 + 16 = 25 + 24 = 49$ способов.

2) $(a_2, b_2; c_2)$ $\div$ $18 = 2 \cdot 3^2 \Rightarrow$ 6 делителей: 1, 2, 3, 6, 9, 18

] $a_2 = 1 \Rightarrow$] $b_2 = 1 \Rightarrow c_2 = 18$ (1 способ)
] $b_2 = 2 \Rightarrow c_2 \in \{9; 18\}$ (2 способа)
] $b_2 = 3 \Rightarrow c_2 \in \{\cancel{?}; 18\}$ (1 способа)
] $b_2 = 6 \Rightarrow c_2 \in \{\cancel{?}; 9; 18\}$ (2 способа)
] $b_2 = 9 \Rightarrow c_2 \in \{2, 6, 18\}$ (3 способа)
] $b_2 = 18 \Rightarrow c_2 \in \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$ (6 способов)
15 способов

] $a_2 = 2 \Rightarrow$] $b_2 = 1$ $c_2 \in \{9; 18\}$
] $b_2 = 2$ $c_2 \in \{9; 18\}$
] $b_2 = 3$ $c_2 \in \{\cancel{?}; 9; 18\}$
] $b_2 = 6$ $c_2 \in \{9; 18\}$
] $b_2 = 9$ $c_2 \in \{1; 2; 3; 6; 9; 18\}$
] $b_2 = 18$ $c_2 \in \{1; 2; 3; 6; 9; 18\}$
20 способов.

] $a_2 = 9 \Rightarrow$] $b_2 = 1$ $c_2 = \{2, 6; 18\}$
] $b_2 = 2$ $c_2 = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$
] $b_2 = 3$ $c_2 = \{2; 6; 18\}$
] $b_2 = 6$ $c_2 = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$
] $b_2 = 9$ $c_2 = \{2, 6, 18\}$
] $b_2 = 18$ $c_2 = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$
27

Продолжение на стр. 2.