Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104467**

ID профиля: **298016**

Вариант 18

Вариант 18 чистовик Лист N 1.

1. $a_7=a_1+6d$, $a_{12}=a_1+11d$, $a_9=a_1+8d$, $a_{10}=a_1+9d$

$$\begin{cases}(a_1+6d)(a_1+11d)>S+20\\(a_1+8d)(a_1+9d)<S+44\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_1^2+17da_1+66d^2>S+20\\a_1^2+17da_1+72d^2<S+44\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1^2+17da_1+66d^2>S+20\\S+44>a_1^2+17da_1+72d^2\end{cases}$$

Сложим неравенства.

$6d^2<24$

$d^2<4$

$(d-2)(d+2)<0$ $\quad d\in(-2;2)$

a_1 - целое число, a_2 - целое число $\Rightarrow d\in\mathbb{Z}$

Прогрессия возрастает $\Rightarrow d>0\Rightarrow d=1$

$\cancel{a_1^2+17+66>}$ $S=\frac{2a_1+d\cdot(n-1)}{2}\cdot7=$

$=\frac{2a_1+6}{2}\cdot7=(a_1+3)7=7a_1+21$.

1) $a_1^2+17a_1+66>7a_1+41$

$a_1^2+10a_1+25>0$.

$D=100-100=0\Rightarrow a_1\neq-5$

2) $a_1^2+17a_1+72<7a_1+65$

$a_1^2+10a_1+7<0$

$D=100-28=72=36\cdot2$

$$\left[\begin{array}{l}a_1=\frac{-10-6\cdot\sqrt2}{2}=-5-3\sqrt2\\a_2=-5+3\sqrt2\end{array}\right.\Rightarrow a\in(-5-3\sqrt2;-5+3\sqrt2)$$

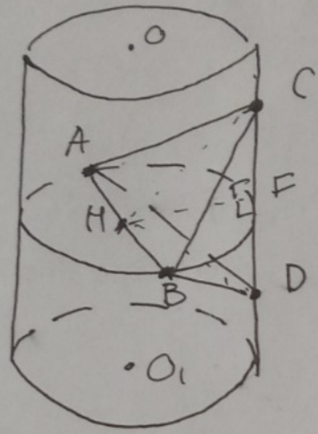
$-5-3\sqrt2>-10$; $-5+3\sqrt2<0\Rightarrow$

$\Rightarrow a_1=-9,-8,-7,-6,\cancel{-5},-4,-3,-2,-1$

Ответ: -9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1.

Варчант 18 чистовик лист N 2.

2.



Дано: $AB=2$; $AC=CB=5$, $AD=DB=7$
$CD \parallel OO_1$; R - min из возможных.
CD - ?

Решение:

1. т.к $CD \parallel OO_1$ и A, B лежат на боковой поверхности, то AB - диметр окружности параллельной основанию (и равной основанию)

2. Логично, что минимальный радиус основания будет в том случае, когда AB - диаметр окр $(H; R)$ (равной основанию) т.е. $R=1$

3. В $\triangle AHC$ $\angle AHC = 90°$ т.к. $\triangle ACB$ - р/б $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ по т. Пифагора $HC = \sqrt{25-1} = \sqrt{24}$

4 в $\triangle DHB$ аналогично $\angle DHB = 90 \Rightarrow$ по т. Пифагора
~~$\triangle DHB \Rightarrow$~~ $DH = \sqrt{49-1} = \sqrt{48}$

5. $HF \perp CD$ т.к. $CD \parallel OO_1$ и $HF = R$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ В $\triangle HFC$ по т. Пифагора $CF = \sqrt{\cancel{48}\,24-1} =$
$= \sqrt{23}$

6. В $\triangle DFH$ ($\angle DFH = 90°$) по т. Пифагора
$DF = \sqrt{48-1} = \sqrt{47}$

7. $DC = DF + FC = \sqrt{47} + \sqrt{23}$.

Ответ: $\sqrt{47} + \sqrt{23}$.

21104467 (U298016 M1297371)

Вариант 18 Чистовик лист №3.

3.

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 5\\ a^2+b^2\le \min(4a-2b,5)\end{cases}$$

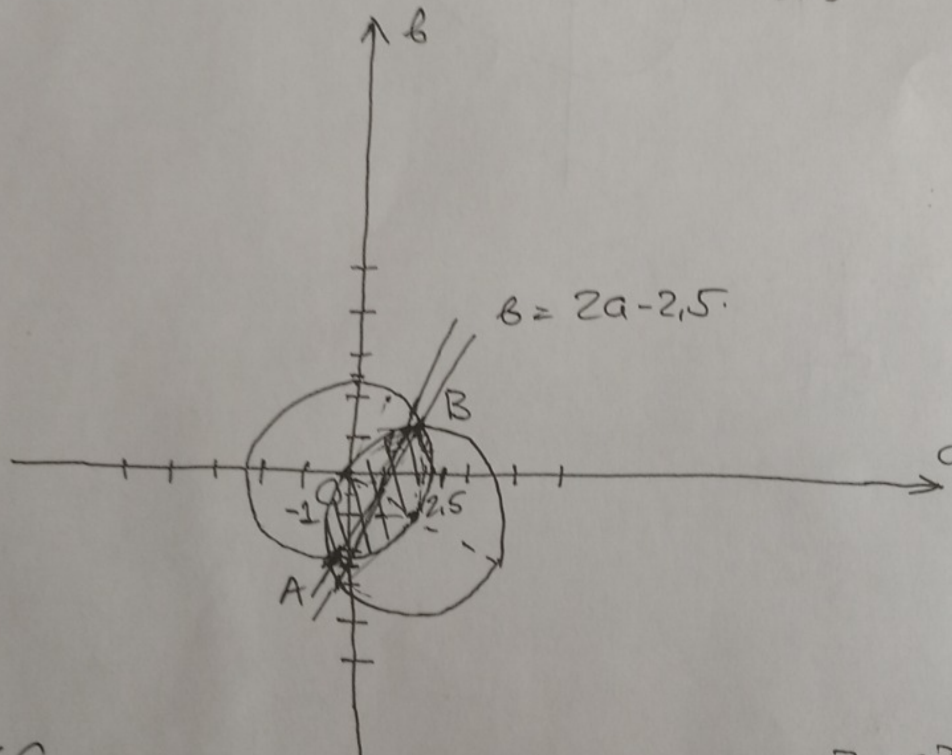
1) $(x-a)^2+(y-b)^2\le 5$ — ~~окружность~~ круг с радиусом $\sqrt{5}$ и центром $O(a;b)$.

2) $a^2+b^2\le \min(4a-2b,5)$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a^2+b^2\le 5\\ 5<4a-2b\end{cases}\\ \begin{cases}a^2+b^2\le 4a-2b\\ 4a-2b\le 5\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a^2+b^2\le \sqrt{5}^2\\ b<2a-2{,}5\end{cases}\\ \begin{cases}(a-2)^2+(b+1)^2\le \sqrt{5}^2\\ b\ge 2a-2{,}5\end{cases}\end{array}\right.$$

— круг с $O_1(0;0)$ и $R_1=\sqrt{5}$

— круг с $O_2(2;-1)$ и $R_2=\sqrt{5}$



Точка пересечения окр. $a^2+b^2=5$ и прямой $b=2a-2{,}5$

$$\begin{cases}b=\sqrt{5-a^2}\\ b=2a-2{,}5\end{cases} \Rightarrow 2\sqrt{5-a^2}=4a-5 \Rightarrow 20-4a^2=16a^2-40a+25 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 20a^2-40a+5=0$$

$$4a^2-8a+1=0.$$

21104467 (U298016 M1297371)

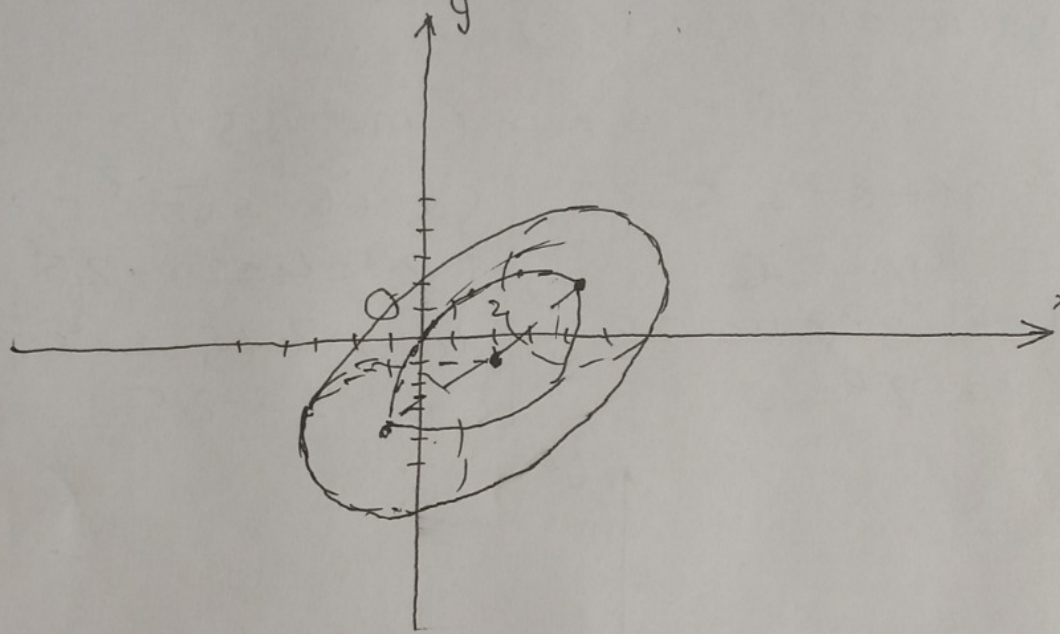
~~А и В точки пересеч. окружностей~~

Вариант 18 Чистовик Лист №4

А и В - точки пересеч. окружностей и прямой $в = 2а - 2,5$.

Множество точек $(а; в)$ заштриховано мною на рисунке.

Получившаяся фигура М:



$S = 15\pi$.

Ответ: 15π.

21104467 (U298016 M1297371)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104467**

ID профиля: **298016**

Вариант 18

Вариант 18 Чистовик лист №1.

4. $\begin{cases} НОД(a; b; c) = 15 \\ НОК(a; b; c) = 3^{15} \cdot 5^{18} \end{cases}$

1) НОД чисел $= 15 \Rightarrow$ можно представить числа, как: $a = 15x$, $b = 15y$, $c = 15z$, где x, y, z – ~~простые числа~~ не имеют общих делителей отличных от 1.

$НОК = 3^{15} \cdot 5^{18} \Rightarrow \frac{НОК}{a} = \frac{3^{15} \cdot 5^{18}}{15 \cdot x} = \frac{15^{14} \cdot 5^3}{x} = \frac{3^{14} \cdot 5^{17}}{x}$

Аналогично,

$\frac{НОК}{b} = \frac{15^{14} \cdot 5^3}{y} = \frac{3^{14} \cdot 5^{17}}{y}$

$\frac{НОК}{c} = \frac{15^{14} \cdot 5^3}{z} = \frac{3^{14} \cdot 5^{17}}{z}$.

x, y, z не должны имет общий делитель, отлич. от 1. $\Rightarrow$ рассмотрим случаи:

1) $x \in \{3, 9, \dots 3^{14}\}$ (одно из чисел, дел. на 3)

$y \in \{5, 25 \dots 5^{17}\}$, тогда

$z \in \{15, 15^2 \dots 15^{14}\}$ или $z \in \{3, 9, \dots 3^{14}\}$ или $z \in \{5, 25 \dots 5^{17}\}$

В $\{3, \dots 3^{14}\}$ – 14 чисел

В $\{5, 25 \dots 5^{17}\}$ – 17 чисел $\Rightarrow$

В $\{15, 15^2 \dots 15^{14}\}$ – 14 чисел

кол-во троек: $(14 \cdot 17 \cdot 14 + 14 \cdot 14 \cdot 17 + 17 \cdot 17 \cdot 14) \cdot 3$

2) одно из чисел $(x, y, z) = 1$, тогда остальные два числа могут быть любыми из $14 + 14 + 17 = 45$ чисел

$\Rightarrow$ кол-во троек: $3 \cdot 45 \cdot 45$

21104467 (U298016 M1297372)

Вариант 18 чистовик лист №2

Всего троек:

$(14^2\cdot 17\cdot 2+17^2\cdot 14+45^2)3=$

$=(14\cdot 17(14\cdot 2+17)+45^2)3=$

$=45(14\cdot 17+45)\cdot 3=135(238+45)=$

$=135\cdot 283=38205$

Еще тройки: $(1;1;1)$ и тройки в которых 2 единицы (их кол-во $=$ $=45\cdot 3=135$)

Итого: $38205+135+1=38341$

Ответ: 38341.

5.

Обозначим числа, как:

$2\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)=a$, $2\log_{6x-14}(x-1)=b$,

$\log_{x-1}(\frac{x}{3}+3)=c$.

1) рассмотрим $a\cdot b$:

$2\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)\cdot 2\log_{6x-14}(x-1)=$

$=4\log_{\frac{x}{3}+3}(x-1)=\frac{4}{c}$.

$a\cdot b=\frac{4}{c} \Rightarrow a\cdot b\cdot c=4$.

Аналогично, если мы будем рассматривать $a\cdot c$ и $b\cdot c$, получим равенство $a\cdot b\cdot c=4$.

Какие-то из трех чисел a,b,c равны, а другое меньше двух на 1. Следовательно, из нашего уравнения получаем три случая:

Вариант 18 Чистовик лист №3

$$\begin{cases} a^2(a-1)=4 \\ b^2(b-1)=4 \\ c^2(c-1)=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^3-a^2-4=0 \\ b^3-b^2-4=0 \\ c^3-c^2-4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=2 \\ c=2 \end{cases}$$

I $a=2$

$2\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)=2$

$\frac{x}{3}+3=6x-14$

$x+9=18x-42$

$17x=51$

$x=3$

$b=\log_{18-14}(2)^2$, $c=\log_2(4) \Rightarrow$

$\Rightarrow b=1$, $c=2$ - условия выполняются

II. $b=2$

$\log_{6x-14}(x-1)^2=2$

$6x-14=x-1$

$5x=13 \quad x=\frac{13}{5}$

$a=2\log_{\frac{13}{15}+3}\left(\frac{6\cdot 13}{5}-14\right)=2\log_{3\frac{13}{15}}\left(\frac{78-70}{5}\right)\neq 2\neq b$

$c=\log_{\frac{8}{5}}\left(\frac{13}{15}+3\right)\neq 2\neq b.$

III $c=2$

$\log_{(x-1)}\left(\frac{x}{3}+3\right)=2$

$(x-1)^2=\frac{x}{3}+3$

$x^2-2x+1=\frac{x}{3}+3$

$x^2-2\frac{1}{3}x-2=0$

$D=\frac{49}{9}+8=\frac{49+72}{9}=\frac{121}{9}$

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{\frac{7}{3}+\frac{11}{3}}{2} \\ x_2=\dfrac{\frac{7}{3}-\frac{11}{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=3 \\ x_2=-\frac{2}{3} \end{cases}$$

Вариант 18 Чистовик лист № 4.

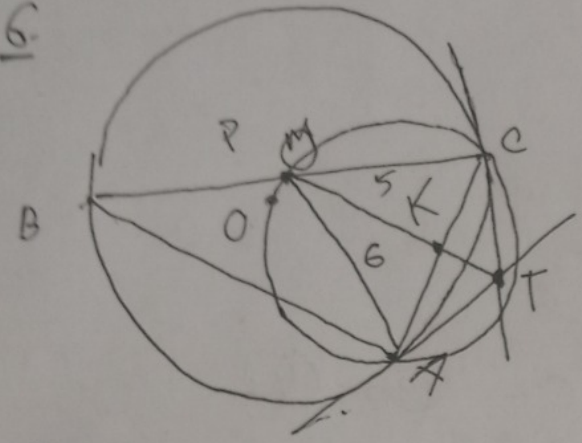
При $x = 3$ $a = c$, как мы уже выяснили

При $x = -\frac{2}{3}$ $c \neq a \neq b$ — не подходит

Получился один ответ: $x = 3$

Ответ: 3.

6.



a) 1. $S_{ABC} = \sin\angle BCA \cdot BC \cdot CA$
$S_{PCA} = \sin\angle BCA \cdot PC \cdot CA$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow S_{ABC} = 11 \frac{BC}{PC}$

2. $\frac{BC}{PC} = \cancel{\ } \frac{11}{5} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{121}{5} = 24{,}2$

Ответ: 24,2.

21104467 (U298016 M1297372)

$2^1; 4^2$ Черновик лист №1.

4.

$28+17=45$

НОД$(a, b, c) = 15$. 14, 17, 14 $14+17+14$.

НОК$(a; b; c) = 3^{15} \cdot 5^{18}$ 14, 14, 17 $28+17$ 47

$15 \cdot x$ $15 \cdot y$ $15 \cdot 6z$. 17, 17, 14 $\frac{3^{15} \cdot 5^{18}}{15} = 3^{15} \cdot 5^{3}$

$\frac{3^{15} \cdot 5^{18}}{15x}$ $3^{15} \cdot 5^{15} = \frac{15^{15} \cdot 5^3}{15x}$ $15^{14} \cdot 5^3$ $15^{14} \cdot 5^{3}$ $3^{14} \cdot 5^{17}$

$14 \cdot 17 \cdot 14$ $\frac{15^{14} \cdot 5^3}{y}$ $15^{14} \cdot 5^3 \cdot 15x$ $\frac{5^{17} \cdot 3^{14}}{y}$ 5^{17} 17 14

$14 \cdot 14 \cdot 17$. $\frac{5^{17} \cdot 3}{}$ $15, 15^{14} \cdot 5^x$ 14 - 3. 17 14 3^{14} 15

$17 \cdot 17 \cdot 14$. 1, 3, 5, 9, 15, 25 17 14 $17 \cdot 14$

5^3 5 5 5 31 вар $17 \cdot 14$

5 $2 \cdot 3$

555 333

$3 \cdot 47$ $5 \cdot 3$ $5^2 \cdot 3$ $5 \cdot 3^2$ $15 \cdot 45$ $25 \cdot 3$ $5^3 \cdot 3$ $75 \cdot 9$

$(17+14+17 \cdot 14)^3$ $5^3 \cdot 9$

$14^2 \cdot 17 \cdot 2 +$ 31+ $\times\begin{array}{r}17\\14\end{array}$

$+17^2 \cdot 14 + 3 \cdot 47$. $(269)^3$ 269^3 $+\begin{array}{r}68\\17\end{array}$ 238 $11 + 45 \cdot 3/11$

$11 \cdot 45$

$(\cdot 45 \cdot 1$

$45 \cdot 1 \cdot 1$

5. $\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)$, $\log_{6x-14}(x-1)^2$; $\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)$.

$2\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)$, $\frac{1}{2}\log_{6x-14} x-1$

$\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)$

$\frac{1}{2\log_{x-1}(6x-14)} - \log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right) = 0$.

$\frac{1 - 2\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right) \log_{x-1}(6x-14)}{2\log_{x-1}(6x-14)} = 0$. $2^3=8$

$2^4=16$

$a=b$ $a+b+c=$ $2^5=32$

$c=b-1$ $3a-1=0$. $2^6=$

$3 \cdot \frac{1}{2} \log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14) = 1$. $3a=1$

$64 \cdot 3$ $2 \cdot 3$ $a=\frac{1}{3}$

$x+9 = 12(3x-7)^6$ $\sqrt[6]{\frac{x}{3}+3} = (6x-14)^{36}$

$3^6 - 1$ $6^6 - 1$ $64 \cdot 3$ $\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14) = \frac{1}{3}$

6^5 $64(3x-7)^6$ $6x-14 = \left(\frac{x}{3}+3\right)^{\frac{1}{6}}$

черновик лист №2

$\log_{x-1}(\frac{x}{3}+3) = \frac{\cancel{8}}{3}$

$(x-1)^{\cancel{8}} = (\frac{x}{3}+3)^{8}$ $\quad x^3+27x^2+81\cdot 3x+81\cdot 9$

$(x-1) = (\frac{x+9}{27})^3$

$27x-27 = x^3+27x^2+81\cdot 3x+81\cdot 9$

$27\cdot 27$ $\quad 27\cdot 9$

$x^3+27x^2+\cancel{27\cdot 8x+27\cdot 28}=0.$

$27(x^2+8x+28)=0$ $\quad a-b=0$

$a=b$ $\quad a-b=0$

$c=b-1$ $\quad b-c=b-b+1$

$b+b+b-1$ $\quad b-c=1\cdot b-c=1$

$3b-1.$ $\quad b-a=0.$

$4\, 2\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)\quad 2\log_{6x-14}(x-1)$

$\cancel{4}\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)\cdot\log_{6x-14}(x-1)=$

$\log_3 2\cdot\log_5 3=\log_3 3\cdot\log_5 2=\log_5 2$

$\cancel{\log_2 4\cdot\log_3 9=}$

$=4\log_{\frac{x}{3}+3}(x-1)$

$a\cdot b=\frac{4}{c}$ $\quad b-2$

$2\log_{6x-14}(x-1)=2$ $\quad a\cdot b\cdot c=4.$?

$b^3-b^2-4 \,|\, b-2$

$-b^3-2b^2 \quad b^2+b$

b^2-4

$-b^2-2b.$

$6x-14=x-1$ $\quad a=b$

$c=b-1$

$5x=13$ $\quad b^2(b-1)=4$ $\quad b=2.$

$x=\frac{13}{5}.$ $\quad \frac{x}{3}+3=6x-14$

$b^3-b^2=4$

$b^3-b^2-4=0.$

$2 \quad 2 \quad \log\frac{5}{3}$

$2\log_{6x-14}(x-1)\cdot$

$\cdot\log_{x-1}(\frac{x}{3}+3) =$

$=2\log_{6x-14}(\frac{x}{3}+3)=\frac{\cancel{5x}}{c}$

~~log~~

$(x-1)^2=\frac{x}{3}+3$ $\quad 2\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)=\frac{2}{\log}$

$x^2-2x+1=\frac{x}{3}+3$ $\quad 87\ 49$

$D=\frac{11}{3}-\frac{3}{3}=\frac{9}{3}\cdot 7\ 8=\ 49+72=$

$x^2-2\frac{1}{3}x-2=0$

$\frac{\frac{11}{3}+2\frac{1}{3}}{2}=\frac{71+7}{3\cdot 2}=\frac{18}{3\cdot 2}=\frac{9}{3}=3 \quad \frac{121}{9}\ \frac{9}{2}\ \frac{11}{3}$

21104467 (U298016 M1297372)

Черновик лист №3

$2\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)=a \qquad 2\log_{6x-14}(x-1)=b$

$\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)=c.$

$a\cdot b=4\log_{\frac{x}{3}+3}(x-1)=\frac{4}{c}$

$a\cdot c=2\log_{x-1}(6x-14)=\frac{4}{b}$ $\qquad x=3$

$c=2 \quad a=2 \quad (x-1)^2=\left(\frac{x}{3}+3\right)= \qquad a^2(a-1)=4$

$x^2-2x+1=\frac{x}{3}+3 \qquad a^3-a^2=4$

$a=2$

$x^2-2\frac{1}{3}x-2=0 \quad D=\frac{49}{9}+8=\frac{49+72}{9}=$

$=\frac{121}{9}$

$2\frac{1}{3}+\frac{11}{3} \quad \frac{\frac{7}{3}+\frac{11}{3}}{2}=\frac{18}{3\cdot 2}=3$

$\frac{x}{3}+3=6x-14 \quad \frac{\frac{7}{3}-\frac{11}{3}}{2}=-\frac{1}{2} \qquad 6x-14=x-1$

$-3-14$

$x+9=18x-42$ $\qquad$ 1 2 3 4

$17x=51$ $\qquad$ 2

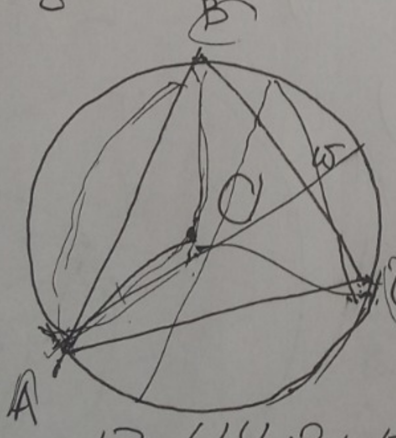
$x=\frac{51}{17}=3$ $\qquad$ 16

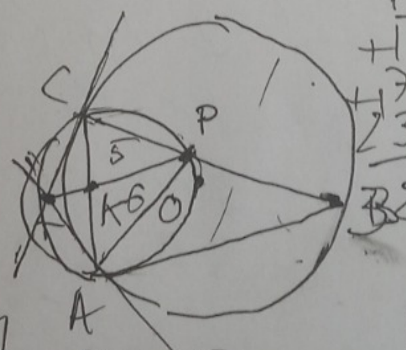
$\log_2(18-14) \quad \log_4 2 \quad \log_2 4$

$\log_2 4 \quad \log_2 4 \quad \log_4 4 \quad \frac{1}{2} \quad 2$

$x=3$

6.





$\times\begin{array}{r}238\\135\\\hline 1190\\714\\238\\\hline 32130\end{array}$

32130

135

$\times 14$

$17(14\cdot 2+17\cdot 14)$ $\quad$ $28+17=45$

$\times\begin{array}{r}17\\14\\\hline 68\\17\\\hline 238\end{array}$

$17\cdot 14(14\cdot 2+17)$ $\quad$ $45(17-14+45)\cdot 3$

$238\cdot 45\cdot 3$ $\quad$ $+\begin{array}{r}238\\45\\\hline 283\end{array}$

21104467 (U298016 M1297372)

черновик лист №4

$$\begin{array}{r} \times\ 283 \\ 135 \\ \hline 1415 \\ +849 \\ 283 \\ \hline 38205 \end{array}$$

$38205+135+1=$

$=38340+1$

$\log_3 9 =$ $a^3 a^2-4=0$

$\frac{13}{15}+3=3\frac{13}{15}$ $\frac{13\cdot 6}{5}-14=$

$=\frac{78}{5}-14=$

$C=\frac{13}{5}-1=\frac{8}{5}$ $1\frac{1}{5}$

$=\frac{78-70}{5}=\frac{8}{5}$

$7-11=-4$

$-1\frac{3}{5}$

$-\frac{4}{2\cdot 3}=$

$\frac{13}{15}+3=$

$=3\frac{13}{15}$

$3\frac{13}{5}$ $\frac{8}{5}$

$15+13=$

$\frac{28}{5}$

$-\frac{2}{3}$

$a=2\log-\frac{2}{9}+3=\frac{27-2}{9}$

$\log_2\frac{7}{9}\left(-\frac{6\cdot 2}{3}-14\right)$ $2\frac{7}{9}$ $-18.$

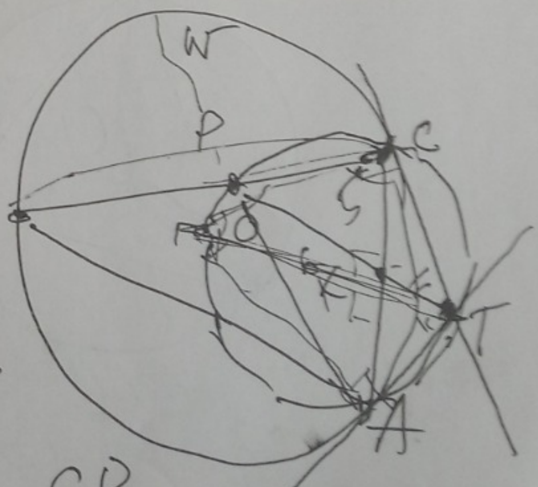
$2\log_{-18}\left(\frac{7}{9}\right)$

$\angle CFA=\angle CPA$

$11=\sin C\cdot CA\cdot \frac{CP}{B}$

$S=\sin C\cdot CA\cdot CB$

$\frac{9}{11}=\frac{CP}{CB}$



$S=11\cdot\frac{CP}{CB}$

21104467 (U298016 M1297372)