Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104356**

ID профиля: **865839**

Вариант 18

Чистовик №1

№1)

Пусть $d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 \ldots \Rightarrow d > 0$ т.к. $a_2 > a_1$ (прогрессия возрастающая); $a_1, a_2, a_3 \ldots \in \mathbb{Z} \Rightarrow d = a_2 - a_1 \in \mathbb{Z}$

Тогда:

$$S = \frac{2a_1 + 6d}{2} \cdot 7 = (a_1 + 3d) \cdot 7 = 7a_1 + 21d$$

$$a_7 = a_1 + 6d$$

$$a_{12} = a_1 + 11d$$

$$a_9 = a_1 + 8d$$

$$a_{10} = a_1 + 9d$$

$$\Rightarrow a_7 \cdot a_{12} > S + 20 \Leftrightarrow (a_1 + 6d)(a_1 + 11d) > 7a_1 + 21d + 20$$

$$\Leftrightarrow a_1^2 + 17a_1 d + 66d^2 > 7a_1 + 21d + 20$$

$$a_9 \cdot a_{10} < S + 44 \Leftrightarrow (a_1 + 8d)(a_1 + 9d) < 7a_1 + 21d + 44$$

$$\Leftrightarrow a_1^2 + 17a_1 d + 72d^2 < 7a_1 + 21d + 44$$

Заметим, что $a^2 + 17a_1 d + 72d^2 > a^2 + 17a_1 d + 66d^2$ т.к. $d > 0$,

$S + 44 > S + 20 \Rightarrow \begin{cases} a_9 \cdot a_{10} > a_7 \cdot a_{12} \\ S + 44 > S + 20 \\ a_7 \cdot a_{12} > S + 20 \\ a_9 \cdot a_{10} < S + 44 \end{cases}$ $\Rightarrow a_9 \cdot a_{10} - a_7 \cdot a_{12} < S + 44 - S - 20$ (из меньшего числа вычли большее, чем из большего, поэтому знак сохраняется)

$$\Rightarrow a_1^2 + 17a_1 d + 72d^2 - a_1^2 - 17a_1 d - 66d^2 < 24$$

$$\Leftrightarrow 6d^2 < 24 \Leftrightarrow d^2 < 4 \Leftrightarrow \begin{cases} d > -2 \\ d < 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d > 0 \\ d > -2 \\ d < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d > 0 \\ d < 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow d = 1$ т.к. $d \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_7 \cdot a_{12} > S + 20 \\ a_9 \cdot a_{10} < S + 44 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + 17a_1 + 66 > 7a_1 + 21 + 20 \\ a_1^2 + 17a_1 + 72 < 7a_1 + 21 + 44 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0 & (1) \\ a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0 & (2) \end{cases}$$

Чистовик №2

№1) (продолжение)

(1) $a_1^2+10a_1+25>0$

$\Leftrightarrow (a_1+5)^2>0 \Leftrightarrow a\neq -5$

(2) $a_1^2+10a_1+7<0$

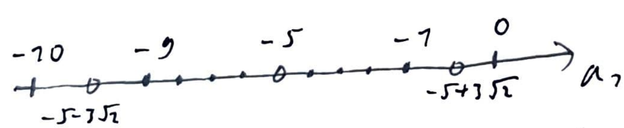
$D=100-28=72$

$\Rightarrow \left(a_1-\frac{-10+6\sqrt{2}}{2}\right)\left(a_1-\frac{-10-6\sqrt{2}}{2}\right)<0$

$\Leftrightarrow (a_1-(-5+3\sqrt{2}))(a_1-(-5-3\sqrt{2}))<0$

$\Rightarrow a_1\in(-5-3\sqrt{2};-5+3\sqrt{2})$

$\begin{cases}(1)\\(2)\\a_1\in\mathbb{Z}\end{cases} \Rightarrow$



$-5-3\sqrt{2} \overset{>}{\vee} -10$

$-3\sqrt{2} \overset{>}{\vee} -5$

$-\sqrt{18} > -\sqrt{25}$

$-5-3\sqrt{2} \overset{<}{\vee} -9$

$-3\sqrt{2} \overset{<}{\vee} -4$

$-\sqrt{18} < -\sqrt{16}$

$-5+3\sqrt{2} \overset{<}{\vee} 0$

$3\sqrt{2} \overset{<}{\vee} 5$

$\sqrt{18} < \sqrt{25}$

$-5+3\sqrt{2} \overset{>}{\vee} -1$

$3\sqrt{2} \overset{>}{\vee} 4$

$\sqrt{18} > \sqrt{16}$

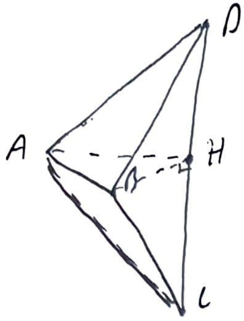
$\Rightarrow a_1\in\{-9;-8;-7;-6;-4;-3;-2;-1\}$

Ответ: $a_1\in\{-9;-8;-7;-6;-4;-3;-2;-1\}$

Чистовик №3

№2)

Рассмотрим произвольный тетраэдр $ABCD$:



$\Delta ADB = \Delta ADC$ по трём сторонам

DC – общ.

$AD = BD = 7$ по усл.

$AC = BC = 5$ по усл.

Проведём $BH \perp DC$ и $AH_1 \perp DC$,

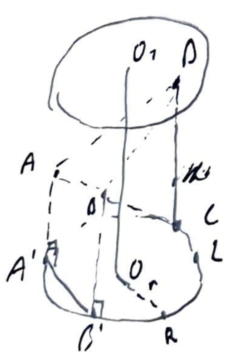
т.к. DC – общая сторона, $\Delta ADC = \Delta BDC \Rightarrow H \equiv H_1$

$\Rightarrow (ABH) \perp DC$ т.к. $AH \perp DC$ и $BH \perp DC \Rightarrow DC \perp AB$

В описанном цилиндре $DC \parallel OO_1$, где OO_1 – ось цилиндра

$\Rightarrow AB \perp OO_1$, т.к. A и B лежат на боковых сторонах,

можно опустить AA' и $BB' \perp (OCL) \Rightarrow AA' \parallel BB' \parallel OO_1$



$\Rightarrow AA' \perp AB$ и $BB' \perp AB \Rightarrow A'ABB'$ –

– прямоугольник $\Rightarrow AB = A'B'$

Тогда $2r \geq AB$, где r – радиус окр. O

т.к. $A'B' \in (OCL)$ и $A'B' = AB$

Тогда, наименьший радиус цилиндра равен $\frac{AB}{2} = 1$ и $A'B'$ совпадает с диаметром цилиндра

Возможны два варианта:

I)

O – сер. AB, проведём CO и DO

CO – мед. в $\Delta ACB \Rightarrow$ по формуле медианы:

$$CO^2 = \frac{2 \cdot AC^2 + 2 \cdot CB^2 - AB^2}{4} \Rightarrow CO^2 = \frac{2 \cdot 25 + 2 \cdot 25 - 4}{4} =$$

$$= 25 - 1 = 24 \Rightarrow CO = 2\sqrt{6}$$

Аналогично DO в ΔADB – мед.

$$\Rightarrow DO^2 = \frac{2 \cdot 49 + 2 \cdot 49 - 4}{4} = 48 \Rightarrow DO = 4\sqrt{3}$$

Чистовик № 4

№2) (продолжение)

I) $DO_1 = r = 7$ и $OO_1 \perp O_1D$

$\Rightarrow \triangle OO_1D$ - прямоуг.

$\Rightarrow$ по Т. Пиф.: $DO^2 = OO_1^2 + O_1D^2$

$\Rightarrow OO_1 = \sqrt{48-7} = \sqrt{47}$

Проведём $CK \parallel DO_1 \Rightarrow CK \perp OO_1$ и $CK = DO_1 = r = 7$

$\Rightarrow \triangle OKC$ - прямоуг.

$\Rightarrow KO^2 + KC^2 = OC^2$

$\Rightarrow KO = \sqrt{24-7} = \sqrt{23}$

$\begin{cases} O_1K \parallel DC \\ O_1D \parallel KC \end{cases} \Rightarrow KO_1DC$ - паралл. $\Rightarrow O_1K = DC$

$O_1K = OO_1 - OK = \sqrt{47} - \sqrt{23} \Rightarrow DC = \sqrt{47} - \sqrt{23}$

II)

$AB \cap OO_1 = M \Rightarrow AM = MB = r = 7$

DM - мед. в $\triangle ADB \Rightarrow DM = 4\sqrt{3}$ из (I)

Аналогично $CM = 2\sqrt{6}$

$OO_1 \perp O_1D$ и $OO_1 \perp OC$; $OC = O_1D = 7 = r$

$\Rightarrow$ из прямоуг. $\triangle OMC$: $MC^2 = OM^2 + OC^2$

$\Rightarrow OM = \sqrt{24-7} = \sqrt{23}$

$O_1M = \sqrt{41}$ из $\triangle DO_1M$ с $\angle DO_1M = 90°$

$DC = OO_1$, иначе цилиндр не опис. $\Rightarrow DC = MO + MO_1 =$

$= \sqrt{47} + \sqrt{23}$

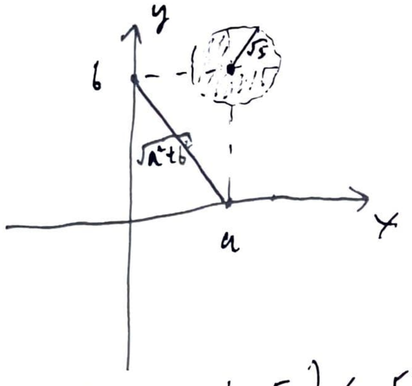
Ответ: $\sqrt{47} - \sqrt{23}$ или $\sqrt{47} + \sqrt{23}$

Чистовик №5

№3)

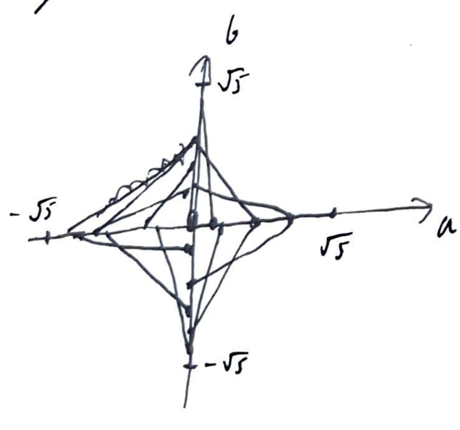
$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 5\\ a^2+b^2 \le \min(4a-2b, 5)\end{cases}$$

Заметим, что $\min(4a-2b, 5) \le 5$



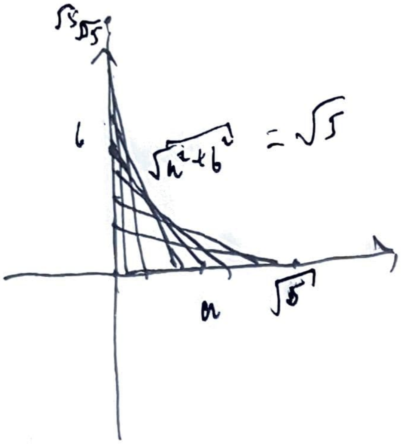
т.к. $\min(4a-2b, 5) \le 5 \Rightarrow \begin{cases} a \in [-\sqrt{5}; \sqrt{5}] \\ b \in [-\sqrt{5}; \sqrt{5}]\end{cases}$

Тогда $a^2+b^2 \le \min(4a-2b, 5)$:



– это семейство прямоугольных треугольников с катетами a и b, где a и $b \in [0; \sqrt{5}]$, а гипотенуза ≤ 5.

Черновик



$$a^2 + b^2 = 5$$

$$4a - 2b < 5$$

$$4a - 2b < a^2 + b^2$$

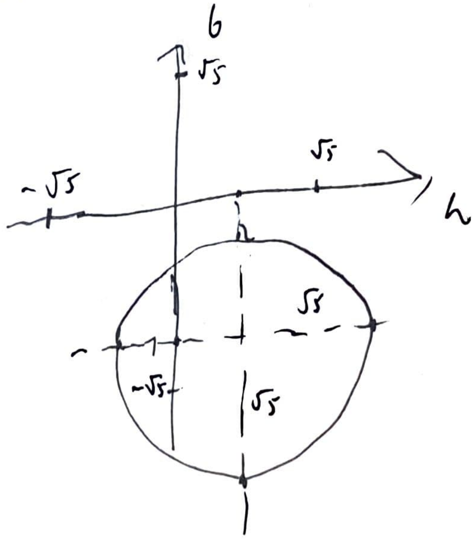
$$a^2 - 4a + 4 - 4 + b^2 + 2b + 1 - 1 > 0$$

$$(a-2)^2 + (b+1)^2 - \cancel{5} > 0$$

$$> 5$$

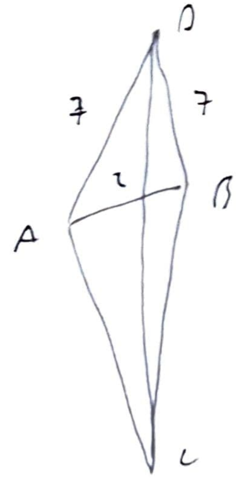
$$a \in [-\sqrt{5}; \sqrt{5})$$

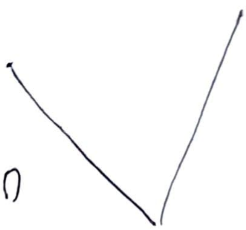
$$b \in [-\sqrt{5}; \sqrt{5})$$

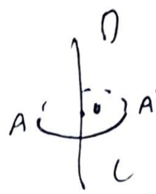


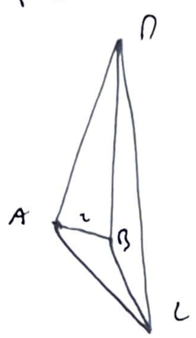
Черновик

$\sqrt{72} =$
$= 4 \cdot 8 \cdot 9$
$= 6\sqrt{2}$

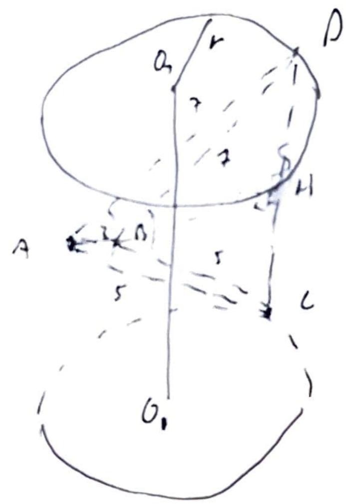


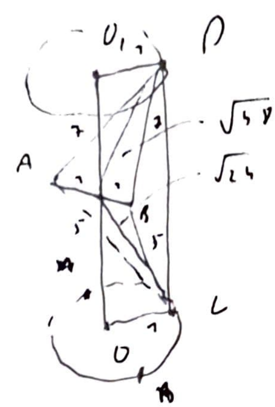






r - наим. CD - ? $\sqrt{48-1} + \sqrt{24-1} = \sqrt{47} + \sqrt{23}$





$\underline{\underline{AB \perp DC}}$

$\Rightarrow AB \perp OO_1$

$AB = 2$
$\Rightarrow 2r$

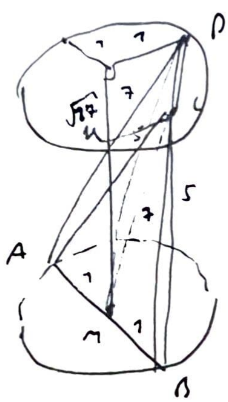
$2r$

r - наим.: $r = 1$

$48 - 1 = 47$

$DM^2 = \frac{2 \cdot 49 + 2 \cdot 49 - 4}{4} = 49 - 1$

$DM = \sqrt{49-1} = 2\sqrt{12} = 4\sqrt{3}$



$CM^2 = \frac{2 \cdot 25 + 2 \cdot 25 - 4}{4} =$
$= 25 - 1 = 24 = 2\sqrt{6}$

$CM = \sqrt{25-1} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

$KM = \sqrt{24-1} = \sqrt{23}$
$\Rightarrow DC = \sqrt{47} - \sqrt{23}$

Черновик

№3) $\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 5 \\ a^2+b^2 \le \min(4a-2b, 5) \end{cases}$

$\min(4a-2b; 5) \le 5$

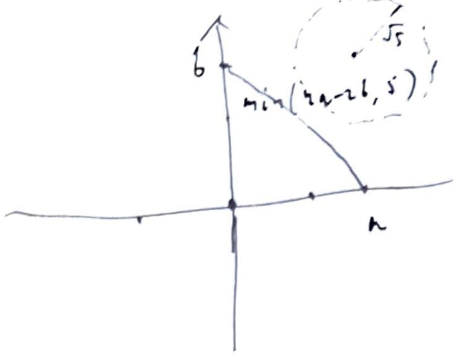
$2(2a-b)$

$4a-2b \ge 5$

$4a \ge 5+2b$

RI

INZV



$22+44$
$=65$
$72-65=7$

$\Rightarrow a^2+b^2 \le 5$

$a^2 \in [0;5] \Rightarrow a \in [-\sqrt{5};\sqrt{5}]$

$\sqrt{a^2+b^2} \le \sqrt{\min}$

$b^2 \in [0;5] \Rightarrow b \in [-\sqrt{5};\sqrt{5}]$

№7) $S - \Sigma$ 7 ч.

$S = \frac{2a_1+6d}{2} \cdot 7 = (a_1+3d)\cdot 7 = 7a_1+21d$

$a_1\ a_2\ a_3 \ldots$

$a_7 = a_1+6d$

$a_{12} = a_1+11d$

$a_8 = a_1+7d$ (?)

$a_9 = a_1+8d$

$a_{10} = a_1+9d$

$\begin{cases} a_7 \cdot a_{12} > S+20 \\ a_9 a_{10} < S+44 \end{cases}$

$a>b$

$c<d \Rightarrow$

$c>a$

$d>b$

$\Rightarrow a_7 \cdot a_{12} = (a_1+6d)(a_1+11d) = a_1^2 + \overset{17}{\cancel{33}}a_1 d + \overset{66}{\cancel{72}}d^2 > 7a_1+21d \overset{\wedge}{+20}$

$a_9 \cdot a_{10} = (a_1+8d)(a_1+9d) = a_1^2+17a_1 d+72d^2 < \cancel{8}\,7a_1+21d+44$

$a_1 d < 24$

$6d^2 < 24$

$d^2 < 4$

$a_1^2+17a_1 d+66-7a_1-21-20>0 \Rightarrow d \notin \cancel{1}$

$d=1$

$d \ne 2$

$a_1^2+10a_1+25>0$

$(a_1+5)^2>0 \Rightarrow a \ne -5$

$a_1^2+17a_1+72-7a_1-21-44<0$

$a_1^2+10a_1+7<0$

$100-28=72$

$\frac{-10\pm\sqrt{72}}{2} = -5\pm 3\sqrt{2}$

$-5-3\sqrt{2} \overset{?}{\vee} -10$

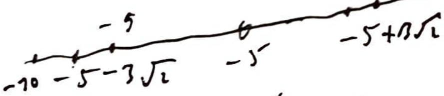
$-3\sqrt{2} \overset{?}{\vee} -5$

$-\sqrt{18} \overset{?}{\vee} -\sqrt{25}$

$-5+3\sqrt{2} \overset{<}{\vee} 0$

$-5+3\sqrt{2} \overset{?}{\vee} -1$

$\{-9;-8\ldots-6;-4;\ldots-1\}$



$a \in$

$-5-3\sqrt{2} \overset{<}{\vee} -9$

$-3\sqrt{2} \overset{<}{\vee} -4$

$-\sqrt{18} \vee -\sqrt{16}$

$3\sqrt{2} \overset{<}{\vee} 5$

$3\sqrt{2} \overset{>}{\vee} 4$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104356**

ID профиля: **865839**

Вариант 18

Чистовик №1

№1)

НОД $(a;b;c) = 15 \Rightarrow a \vdots 15;\ b \vdots 15;\ c \vdots 15$

~~НОД~~ НОК $(a;b;c) = 3^{15} \cdot 5^{18}$

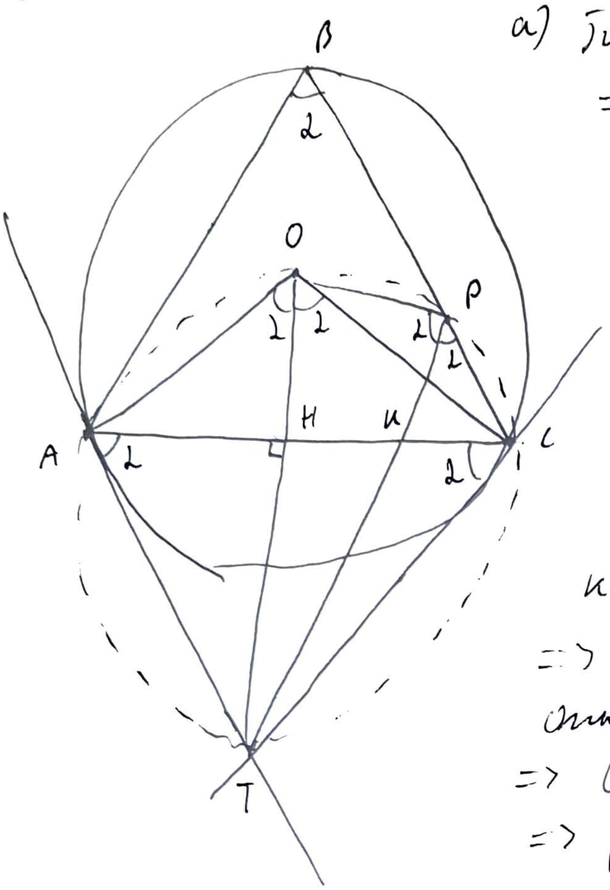
~~Решение:~~ Так как НОД $(a;b;c) = 15 \Rightarrow$ в разложении ~~$a = 3 \cdot 5 \cdot k$~~ на множители каждого из чисел есть 3 и 5, но во всех трёх не может быть 9 или 25, так как и тогда НОД $(a;b;c) \geq 45$ или 75 соответственно. При этом, т.к. НОК $(a;b;c) = 3^{15} \cdot 5^{18} \Rightarrow$ в разложении a, b или c есть только множители 3^k и 5^n, ~~хотя~~ хотя бы одно из чисел должно при этом содержать 3^{15} ~~или~~ 5^{18} в разложении, иначе НОК $(a;b;c) = 3^l \cdot 5^m$, где $l < 15$ или $m < 18$, k и n не могут быть больше 15 и 18 соответственно в разложении какого-~~то~~-либо числа, иначе $l > 15$ или $m > 18$.

Пусть a имеет 1 тройку в разложении, тогда b 15 троек, а c от 1 до 15 троек, включая 1 и 15, всего 15 вариантов, для c, содержащем 15 троек, аналогично 15 вариантов, но 15 троек в b и c мы учли 2 раза, тогда всего 29 вар. троек в разложении при одной в разложении a; Аналогично для b и c, но вариант когда одна тройка в разложении двух из чисел посчитан 2 раза, тогда всего $87 - 3 = 84$ наборов для троек для $(a;b;c)$. Аналогично получаем $(18+18-1) \cdot 3 - 3$ набора для 5 в разложении ~~чисел~~, a, b и c. Для каждого ~~одн~~ набора троек в $(a;b;c)$ подойдёт любой из наборов пятёрок. Тогда всего: $84 \cdot 102$ набора таких $(a;b;c)$: $84 \cdot 102 = 8568$

Ответ: 8568

Чистовик №2

№5)



а) Пусть $\angle ABC = \alpha$

$\Rightarrow \angle AOC = 2\alpha$

$\Rightarrow \angle AOH = \alpha = \angle HOC$

($AO = OC \Rightarrow \triangle AOC$ – р/б.; TH – выс. в р/б $\triangle ATC$ ($AT = TC$) $\Rightarrow H$ – сер. $AC \Rightarrow OH$ – медиана $\Rightarrow OH$ – ~~*~~ выс.)

$\angle OAT = \angle OCT = 90^\circ$, как радиусы к касательным

$\Rightarrow$ Около $AOCT$ можно описать окр. Она проходит через A, O и C $\Rightarrow$ Совпадает с окр. около AOC $\Rightarrow P$ лежит на ней

$\Rightarrow \angle TAC = \angle ACT = \angle TOC = \angle AOT = \alpha$, опир. на ~~равные~~ одни хорды и равные. $\angle OPT = \underset{=\alpha}{\angle ACT}$ (опир. на одну дугу);

$\angle TPC = \angle TAC = \alpha$ (опир. на одну дугу)

$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle KPC$ ($\angle ACB$ – общ.; $\angle ABC = \angle TPC = \alpha$)

$\Rightarrow \dfrac{S_{ABC}}{S_{KPC}} = \left(\dfrac{AC}{KC}\right)^2$

$S_{AKP} = KP \cdot AK \cdot \frac{1}{2} \sin\angle AKP$; $S_{KPC} = \dfrac{KP}{\cancel{\ }} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot KC \cdot \sin(180 - \angle AKP)$

$\Rightarrow \dfrac{S_{AKP}}{S_{KPC}} = \dfrac{AK}{KC}$ ($\sin\angle AKP = \sin(180 - \angle AKP)$)

$\Rightarrow \dfrac{AK}{KC} = \dfrac{6}{5} \Rightarrow 5AK = 6KC$; ~~у~~ пусть $KC = 5x \Rightarrow AK = 6x$

$\Rightarrow AC = 11x \Rightarrow \dfrac{S_{ABC}}{S_{KPC}} = \left(\dfrac{11x}{5x}\right)^2 \Rightarrow S_{ABC} = \dfrac{121}{5 \cdot \cancel{5}} \cdot \cancel{5} = \dfrac{121}{5}$

Ответ: $\dfrac{121}{5}$

Черновик №3

№5) (продолжение)

$\angle ABC = arctg\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = arctg\frac{1}{2}$

TH – дис. в $\triangle ACT \Rightarrow TH$ высота ($AT = TC \Rightarrow \triangle ACT$ – р/б.)

$\Rightarrow \frac{HT}{AH} = tg\,\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow AH = 2HT$

$\Rightarrow AC = 4HT$; пусть $TH = a \Rightarrow AH = HC = 2a$

$OH \cdot HT = AH \cdot HC \Rightarrow OH = 4a$

Черновик

№5

$AC^2 = 2R^2 - 2R^2 \cdot \cos 2\alpha$

$\frac{AC}{\sin\alpha} = 2R \qquad R = \frac{AC}{2\sin\alpha}$

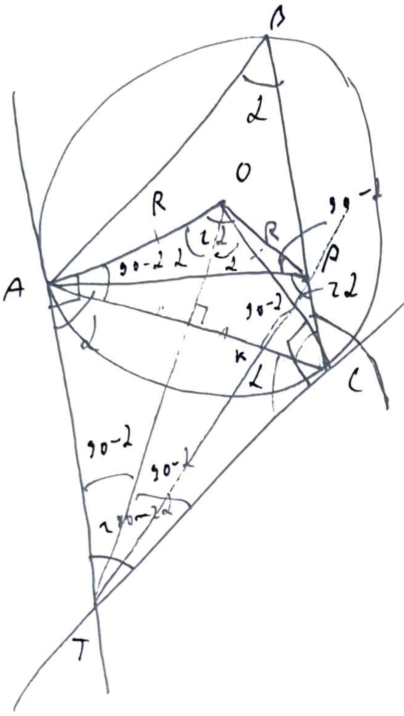
$\frac{AC}{\sin 2\alpha} = \frac{R}{\sin(90-\alpha)} = \cos\alpha$

$2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$

$AC =$

$\sin\alpha = \frac{AC}{2} \cdot \frac{1}{R}$

$\sin\alpha = \frac{AC}{2R}$



$180 - 90 + \alpha - 2\alpha = 90 - \alpha$

$S_{ABC} = AB \cdot BC \cdot \sin\alpha \cdot \frac{1}{2}$

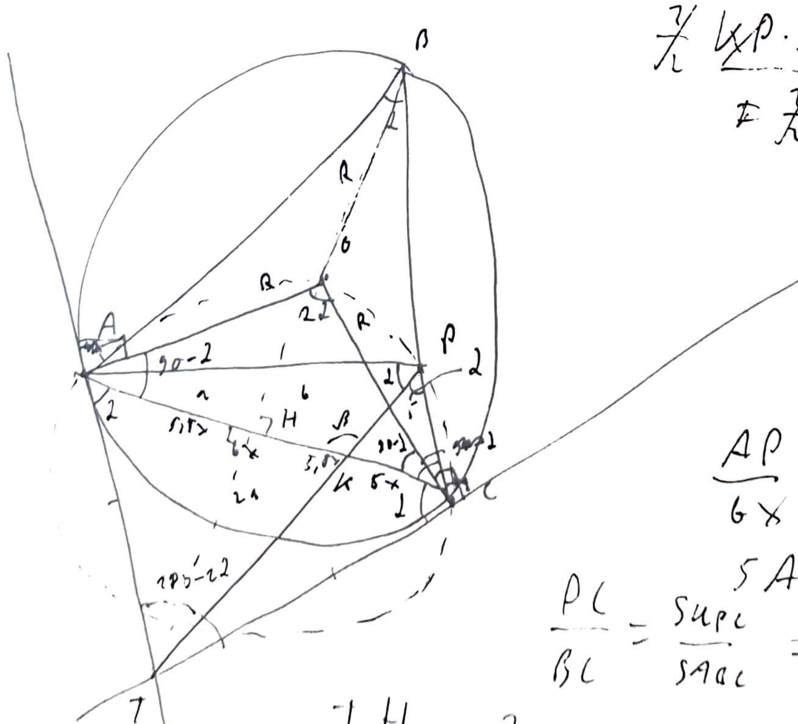
$\sin\alpha = \frac{AC}{2R}$

$\angle ABC = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$

$\frac{\cancel{\frac{1}{2}} \cancel{KP} \cdot \cancel{\sin\beta} \cdot AK}{\cancel{\frac{1}{2}} \cancel{KP} \cdot \cancel{\sin\beta} \cdot KC} = \frac{6}{5}$

$\frac{AK}{KC} = \frac{6}{5}$

$5AK = 6KC$



$\frac{AP}{6x} = \frac{PC}{5x}$

$5AP = 6PC$

$\frac{PC}{BC} = \frac{S_{KPC}}{S_{ABC}} = \frac{S_{KPC}}{S_{ABC}} = \frac{KC}{AC} = \left(\frac{5}{11}\right)^2$

$\frac{TH}{AH} = \frac{1}{2} \qquad 2TH = AH$

$\Rightarrow S_{ABC} = \left(\frac{11}{5}\right)^2 S_{KPC}$

$\frac{121 \cdot 6}{5} = 6,$

$121 \cdot 2 =$

242

$\frac{121}{5}$

№4) Черновик $\frac{HC}{OH} = \frac{1}{2}$ $OH = 2HC$

$a; b; c$ $c; b; a : 3 : 5$

$$\begin{cases} НОД(a; b; c) = 15 \\ НОК(a; b; c) = 3^{75} \cdot 5^{78} \end{cases}$$

$a : 15;\ b : 15;\ c : 15$

$a = 3^{7}$ $b = 3^{7-75}$ $c = 3^{7-75}$

$\frac{AC}{\sin\alpha} = 2R$

$R = OC$

$$\begin{cases} a = 3 \cdot 5 \cdot \\ b = 3 \cdot 5 \cdot \\ c = 3 \cdot 5 \cdot \end{cases}$$

$\sin\alpha = \frac{2a}{\cancel{OC}R}$

$a = 3 \cdot 5 \cdot$

$\frac{AC}{\sin 2\alpha} = 2OT$

$1\ 2\ 3 \ldots 78$

$n\ [1; 75]$

$76\ 76\ 76$

$1976 \cdot (3 \cdot 76 - 3)$

$(3 \cdot 75 - 3) \cdot (3 \cdot 78 - 3) \cdot 3$

$= 3 \cdot 74 \cdot 3 \cdot 77$

$= 7 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 77 =$

$= 119 \cdot 3 = 357 \cdot 3 \cdot 2 = 1071 \cdot 2 = 2142$

$3 \cdot 74 \cdot 75 \cdot 3 - 3$

№5) I $\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+x}}(6x-14) = 2\log_{\frac{x}{3}+x}(6x-14)$

$6x - 14 > 0$ $x > \frac{14}{6}$ $x > \frac{7}{3}$

$\frac{x}{3} + x > 0$ $x > 0$

I $\log_{6x-14}(x-1)^2 = 2\log_{6x-14}(x-1)$

$\frac{x}{3} + x \neq 1$ $x \neq \frac{3}{4}$

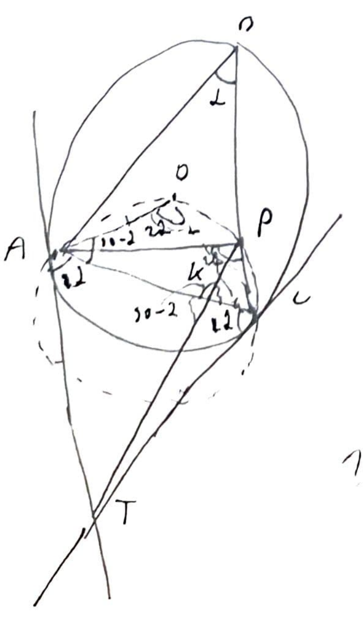
$\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right) = \log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)$

$6x - 14 \neq 1$ $x \neq \frac{5}{2}$

II) $\log_{\frac{x}{3}+x} 6x-14 = \log_{6x-14} x-1$

$(x-1) > 0$ $x > 1$

$x - 1 \neq 1$ $x \neq 2$



$S_{APK} = 6$

$S_{CPK} = 5$

$\alpha =$

$x > \frac{17}{2}$

$1\ 2\ 3 \ldots 75$

$1\ 2\ 3\ 4 \ldots 78$

$118 \cdot 19$

$2360 - 118$

2242

$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9$

$10\ 11\ 12\ 13\ 14\ 15$

8568

8400

$+168$