Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21104326**

ID профиля: **801895**

Вариант 18

Чистовик 1

№1

$S = 7a_1 + 21q$

$a_7 \cdot a_{12} = a_1^2 + 17a_1q + 66q^2$

$a_9 \cdot a_{10} = a_1^2 + 17a_1q + 72q^2$

$\begin{cases} a_1^2 + 17a_1q + 66q^2 > S + 20 \\ a_1^2 + 17a_1q + 72q^2 < S + 44 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow 6q^2 < 24$ (промежуток между $S+44$ и $S+20$)

$q^2 < 4$

$q \in (-2; 2)$

Так как по условию $q > 0$ и $q \in \mathbb{Z} \Rightarrow q = 1$

Тогда $S = 7a_1 + 21$

$\begin{cases} a_1^2 + 17a_1 + 66 > 7a_1 + 41 \\ a_1^2 + 17a_1 + 72 < 7a_1 + 65 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0 \\ a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0 \end{cases}$ (*)

21104326 (U801895 M1302558)

(*) $a_1^2+10a_1+7<0$ Чистовик 2

(корни) $D=100-28=72$

$$\left[\begin{array}{l} a_1=\frac{-10-\sqrt{72}}{2} \ (=-5-3\sqrt{2}) \\ a_1=\frac{-10+\sqrt{72}}{2} \ (=-5+3\sqrt{2}) \end{array}\right.$$

(реш) $a_1 \in (-5-3\sqrt{2}; -5+3\sqrt{2}) \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1 \in [-9; -1]$

Вернёмся к системе:

$$\begin{cases} a_1 \neq -5 \\ a_1 \in [-9; -1] \end{cases}$$

Ответ: $a_1 \in \{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1\}$

21104326 (U801895 M1302558)

Чистовик 3

$\boxed{№3}$

I $(x-a)^2+(y-b)^2 \le 5$ – круг с центром в $(a;b)$ и радиусом $\sqrt{5}$.

II $a^2+b^2 \le \min(4a-2b;5)$

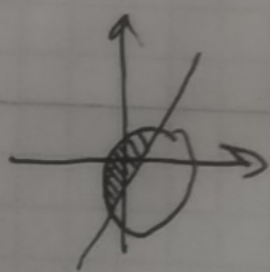
① При $4a-2b<5$:

$$\begin{cases} a^2+b^2 \le 4a-2b \\ 4a-2b<5 \end{cases}$$

$(a;b)$ можно считать как $(x_0;y_0)$

$$\begin{cases} x_0^2-4x_0+4+y_0^2+2y_0+1 \le 5 \\ y_0 > 2x_0-2,5 \end{cases}$$

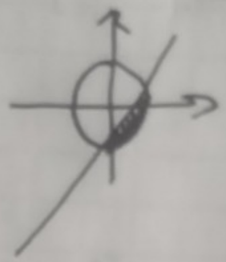
$$\begin{cases} (x_0-2)^2+(y_0+1)^2 \le 5 \\ y_0 > 2x_0-2,5 \end{cases} \rightarrow$$



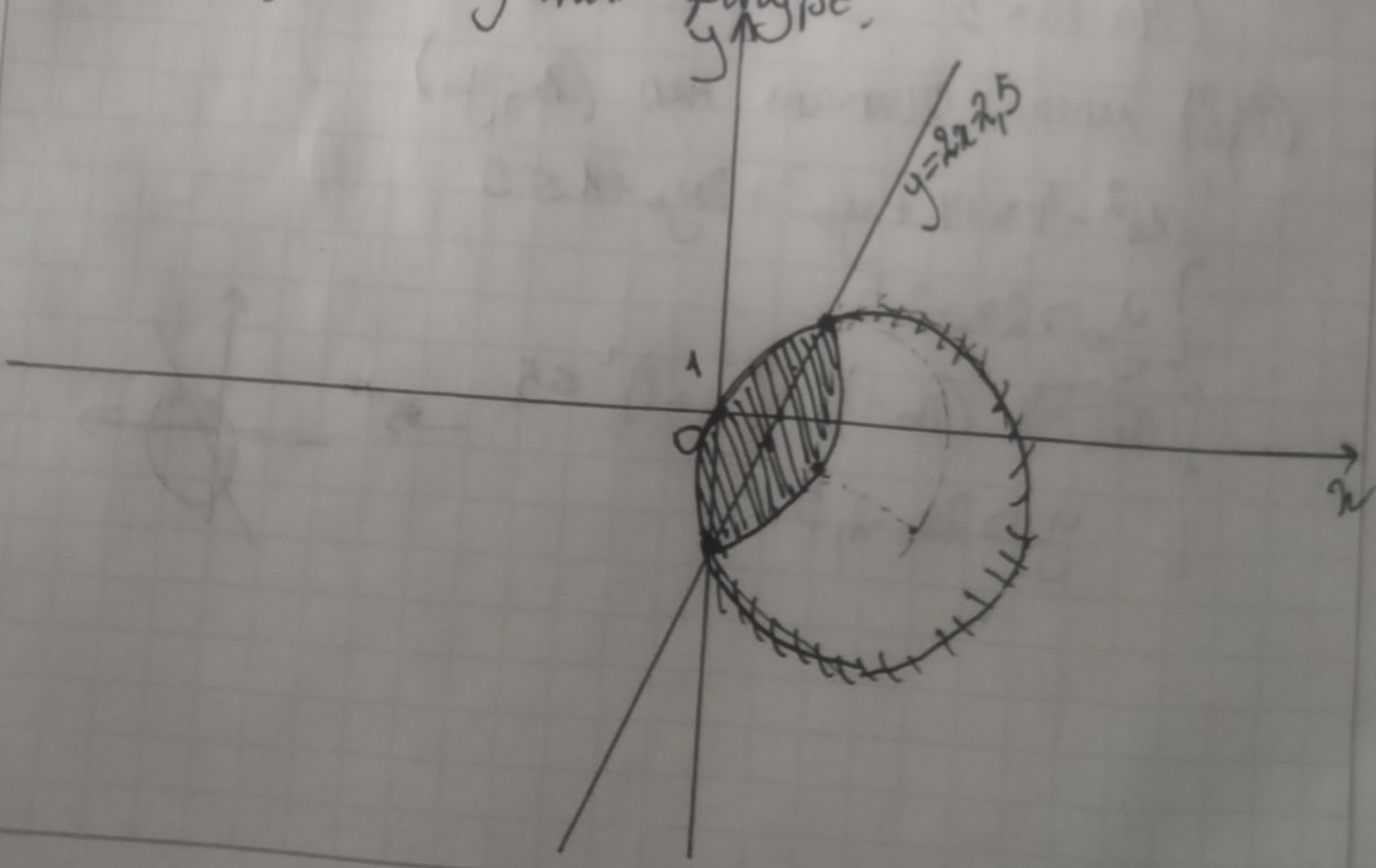
Чистовик 4

② При $4a-2b \geq 5$:

$$\begin{cases} a^2+b^2 \leq 5 \\ b < 2a-2{,}5 \end{cases} \rightarrow$$



Тогда вся фигура будет состоять из кругов радиуса $\sqrt{5}$, ~~[illegible]~~ центры которых принадлежат данной фигуре.



Черновик

$S_7 = 7a_1 + 21q$

$a_7 \cdot a_{12} = (a_1+6q)(a_1+11q) = a_1^2 + 17a_1q + 66q^2$

$a_9 \cdot a_{10} = (a_1+8q)(a_1+9q) = a_1^2 + 17a_1q + 72q^2$

$a_1^2 + 17a_1q + 66q^2 > S + 20$

$a_1^2 + 17a_1q + \cancel{72}q^2 < S + 44$

$a_1; q \in \mathbb{Z}$

$6q^2 < 22$

43-21

$q^2 < \frac{22}{6}$

$q < \sqrt{\frac{22}{6}} < \sqrt{\frac{24}{6}} = \sqrt{4} = 2 \Rightarrow q = 1$

$S_7 = 7a_1 + 21$

$a_1^2 + 17a_1 + 66 > 7a_1 + 21 + 20$

$a_1^2 + 17a_1 + 72 < 7a_1 + 21 + 44$

$\cancel{a_1^2+17a_1+}$ $\begin{cases} a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0 \\ a_1^2 + 10a_1 + \cancel{7} < 0 \end{cases}$

~~Д<0~~ $(a_1+5)^2>0$ Черновик

$a_1 \neq -5$

$a_1^2+10a_1+7<0$

$D = 100-28 = 72$

$a_1 = \frac{-10+\sqrt{72}}{2} = \frac{-10+6\sqrt{2}}{2} = -5+3\sqrt{2}$

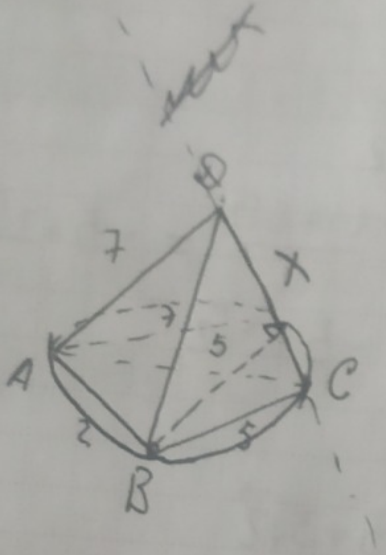
$a_2 = \frac{-10-\sqrt{72}}{2} = -5-3\sqrt{2}$

$-5-3\sqrt{2} < a_1 < -5+3\sqrt{2}$

$-5,25 < -5-\sqrt{18} < -9 \leq a_1 \leq -1 < -5+3\sqrt{2} < 0$

$a_1 \in \{ \cancel{-10}; -9; -8; -7; -6; \cancel{-5}; -4; -3; -2; -1 \}$

Черновик



$S_{BCD} = \frac{1}{2} h \cdot x$

$S_{BCD} = \sqrt{\left(6+\frac{x}{2}\right)\left(\frac{x}{2}-1\right)\left(\frac{x}{2}+1\right)\left(6-\frac{x}{2}\right)} =$

$= \sqrt{\left(36-\frac{x^2}{4}\right)\left(\frac{x^2}{4}-1\right)} =$

$= \sqrt{-\frac{x^4}{16}-36+\frac{36x^2}{4}+\frac{x^2}{4}}$

$-\frac{x^4}{16}+\frac{37x^2}{4}-36=\frac{1}{4}h^2x^2$

$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 5$

$a^2+b^2 \le \min(4a-2b, 5)$

$x < 12$

При $4a-2b<5$:

$a^2+b^2 \le 4a-2b$

$-x^4+148x^2-4h^2x^2-36=0$

$x^4-(4h^2-148)x^2+36=0$

$x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2 \le 5$

$x^2-2ax+y^2-2by+4a-2b \le 5$

$(a;b)$

$37 \times 4 = 148$

$h \in (0;\sqrt{34}) \cup (2\sqrt{10};$ [illegible]$)$

$(4h^2-148)^2-144>0$

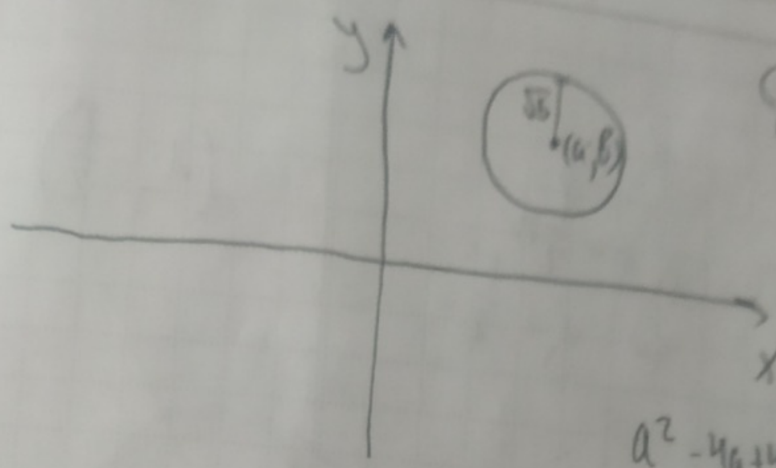
$36 \times 4 = 144$

$4h^2-148>12$ $\quad 4h^2>160$

$4h^2-148<-12$ $\quad h^2>40$

$h^2<136$

$h^2<34$



Черновик

$a^2-4a+4+b^2+2b+1 \le 5$

$y_0 > 2x_0 - 2,5$

$(a-2)^2+(b+1)^2 \le 5$

$\begin{cases} 4a-2b>5 \\ a^2+b^2 \le 5 \end{cases}$ или $\begin{cases} 4a-2b<5 \\ a^2+b^2 \le 4a-2b \end{cases}$

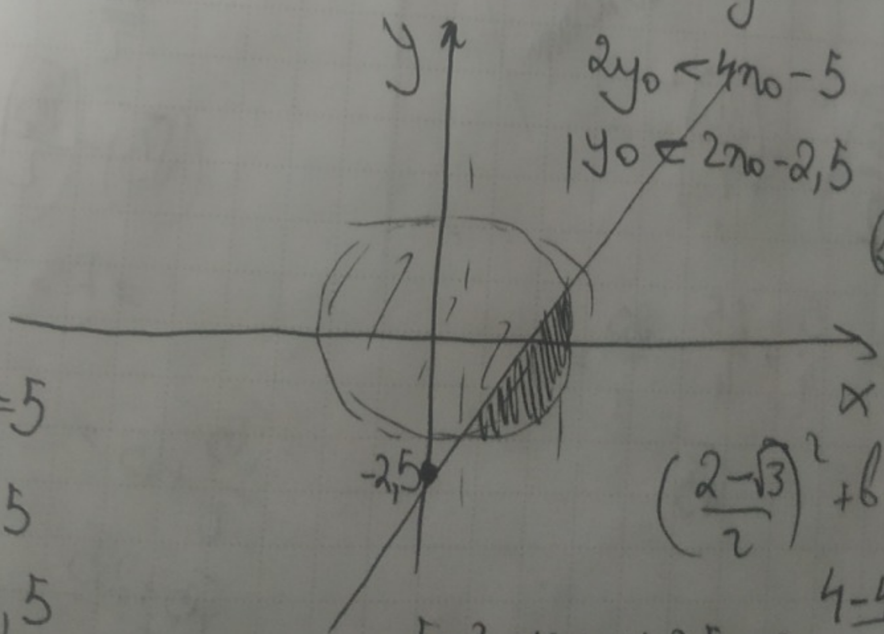
$4a > 2b+5$

$4x_0 > 2y_0 + 5$

$2y_0 < 4x_0 - 5$

$y_0 < 2x_0 - 2,5$

$b^2=$



$\begin{cases} a^2+b^2=5 \\ 4a-2b=5 \end{cases}$

$b=2a-2,5$

$a^2+4a^2-10a+6,25=5$

$5a^2-10a+1,25=0$

$20a^2-40a+5=0$

$4a^2-8a+1=0$

$D=64-16=48$

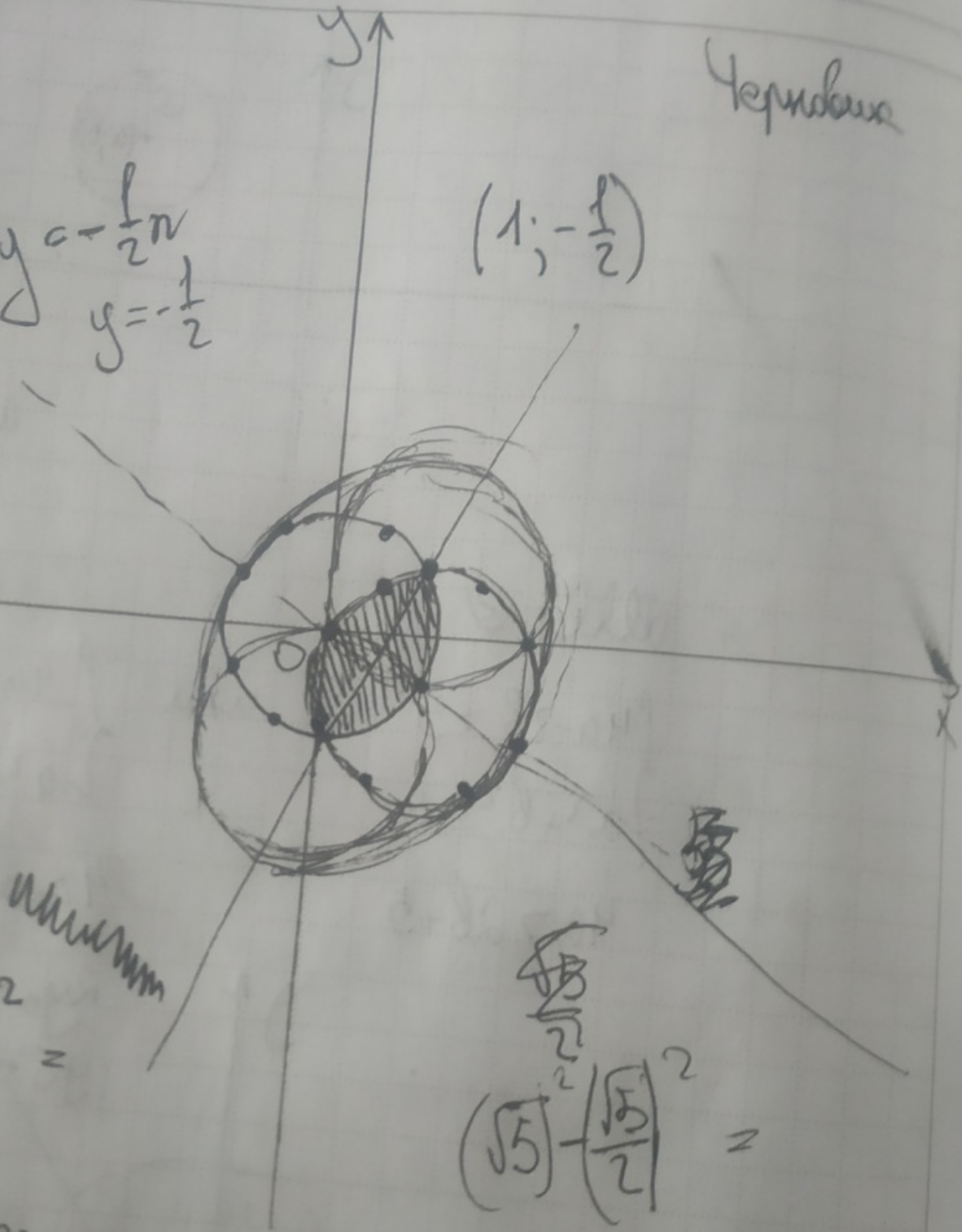
$\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)^2+b^2=5$

$\frac{4-4\sqrt{3}+3}{4}+b^2=5$

$a_1=\frac{8-4\sqrt{3}}{8}=\frac{2-\sqrt{3}}{2}$ $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$

21104326 (U801895 M1302558)

Черновик



$2\sqrt{5}+\sqrt{15}$

$3\sqrt{5}$

$\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2=$

$=\frac{5}{4}+\frac{15}{4}=\frac{20}{4}=5$

$\sqrt{5}$

$\cancel{\frac{\sqrt{15}}{2}}$

$(\sqrt{5})^2-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2=$

$=5-\frac{5}{4}=\frac{15}{4}$

$\frac{\sqrt{15}}{2}+\sqrt{5}=$

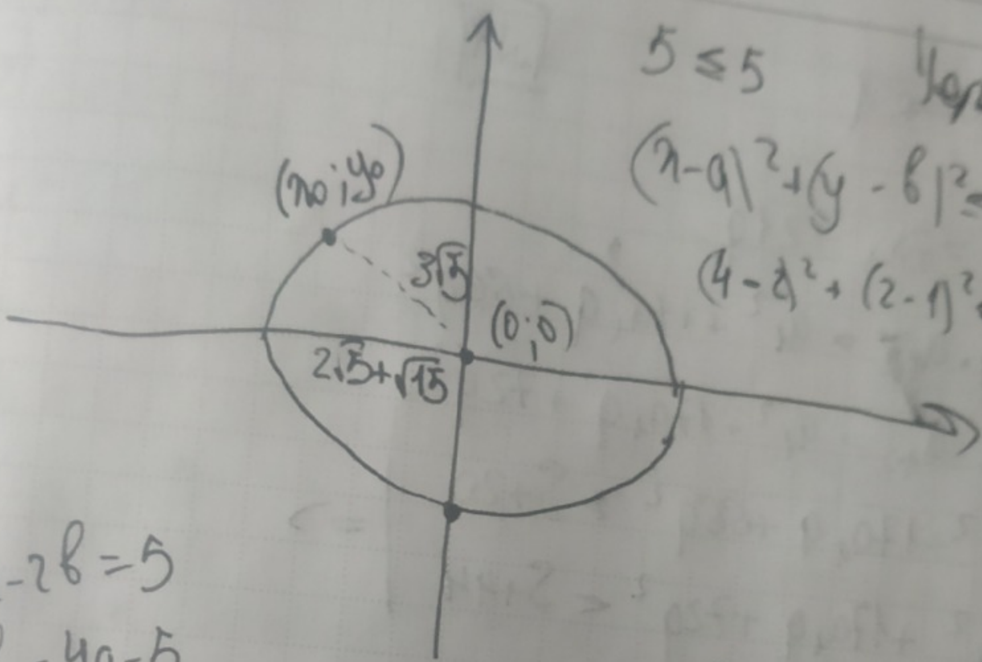
$\frac{\sqrt{15}}{2}$

$\frac{\sqrt{15}+2\sqrt{5}}{2}$

$5 \le 5$ Чернетка

$(x-a)^2+(y-b)^2=5$

$(4-2)^2+(2-1)^2=5$



$4a-2b=5$

$2b=4a-5$

$b=2a-2,5$

$(x-2)^2+(y+1)^2=5$

$y=x^2-3\sqrt{5}$

$35+20\sqrt{3}$

$2\sqrt{5}+\sqrt{15}=$

$4+(y+1)^2=5$

$=20+15+4\sqrt{75}=$

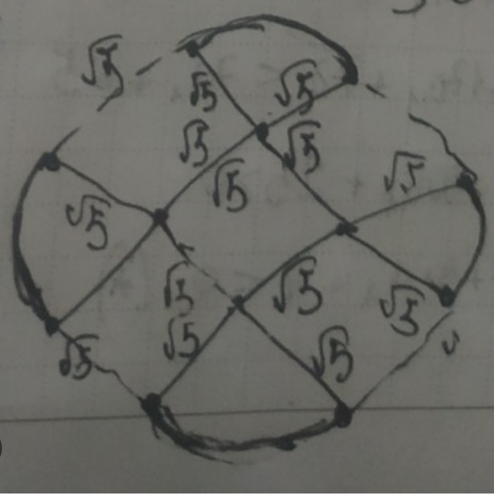
$(y+1)^2=1$

$=35+20\sqrt{3}$

$y+1=1$

$y+1=-1$

$y=-2$



21104326 (U801895 M1302558)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21104326**

ID профиля: **801895**

Вариант 18

Чистовик 1

$\boxed{№5}$

Найдём произведение данных чисел:

$$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)\cdot\log_{6x-14}(x-1)^2\cdot\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)=$$

$$=4\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)\cdot\log_{6x-14}(x-1)\cdot\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)=$$

$$=4\cdot\frac{1}{\log_{6x-14}\left(\frac{x}{3}+3\right)}\cdot\log_{6x-14}(x-1)\cdot\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)=$$

$$=4\cdot\log_{\frac{x}{3}+3}(x-1)\cdot\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)=4$$

Обозначим за n равные числа. Тогда верно:

$$n^2(n-1)=4$$

$$n^3-n^2-4=0$$

При $n=2$: $8-4-4=0$ - ист

$n=2$ явл корнем

$$\begin{array}{l|l} n^3-n^2+0n-4 & n-2 \\ \hline -(n^3-2n^2) & n^2+n+2 \\ \quad n^2+0n & \\ \quad -(n^2-2n) & \\ \qquad 2n-4 & \\ \qquad -(2n-4) & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

21104326 (U801895 M1302559)

Чистовик 2 · $\boxed{№5 \text{ (прод)}}$

$(x-2)(x^2+x+2)=0$

$$\left[\begin{array}{l} x^2+x+2=0 \quad (D=1-8<0 \Rightarrow \text{корней нет}) \\ x=2 \end{array}\right.$$

$x=2$

Тогда ~~один~~ два из логарифмов ~~равен~~ 2; а третий 1:

(I) $2\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)=2$

$\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)=1$

$\frac{x}{3}+3=6x-14$

$\frac{17x}{3}=17$

$x=3$

Тогда $\log_{6x-14}(x-1)^2=\log_4 4=1$
$\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)=\log_2 4=2$ — удовл. условию

Чистовик 3

№5 (прод)

(II) $2\log_{6x-14}(x-1)=2$

$\log_{6x-14}(x-1)=1$

$x-1=6x-14$

$5x=13$

$x=2,6$

Тогда $\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)=2\log_{\frac{11,6}{3}}1,6$, что не равно 1 или 2

III $\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)=2$

$x^2-2x+1-\frac{x}{3}-3=0$

$3x^2-7x-6=0$

$D=49+72=121$

$x_1=\frac{7-11}{6}=-\frac{2}{3}$

$x_2=3$

$x=3$ уже разобран, а $x=-\frac{2}{3}$ не удовл ОДЗ: $6x-14=$
$=-18<0$

Ответ: при $x=3$

21104326 (U801895 M1302559)

Чистовик 4

$\boxed{№4}$

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=15=3\cdot5 \\ НОК(a;b;c)=3^{15}\cdot5^{18} \end{cases}$$

Заметим, что в разложении чисел a; b и c на простые множители не могут встречаться другие простые числа, кроме 3 и 5.

Также, в каждом числе должна быть и 3 и 5, иначе оно не будет делиться на НОД

Далее заметим, что среди разложения чисел обязательно встретятся $3^1; 5^1; 3^{15}; 5^{18}$;

Рассмотрим все случаи:

I) $3^{15}\cdot5^{18}; \ 3\cdot5; \ 3^x\cdot3^y$

$1\le x\le15; \ 1\le y\le18$

Тогда таких случаев с учётом перестановок чисел: $6\cdot15\cdot18=90\cdot18=1620$ троек

Чистовик 5 №4 (прод)

II $3^{15}\cdot 3^{18}$; $3\cdot 5^{x}$; $5\cdot 3^{y}$

Также $6\cdot 15\cdot 18 = 1620$ чисел троек

III $3\cdot 5$; $3^{15}\cdot 5^{x}$; $5^{18}\cdot 3^{x}$

Также $6\cdot 15\cdot 18 = 1620$ чисел троек

IV $3^{15}\cdot 5$; $5^{18}\cdot 3$; $3^{x}\cdot 5^{y}$

Также $6\cdot 15\cdot 18 = 1620$ чисел троек

V $3^{15}\cdot 5$; $5^{18}\cdot 3^{n}$; $5^{y}\cdot 3$

Также $6\cdot 15\cdot 18 = 1620$ чисел троек

VI $5^{18}\cdot 3$; $3^{15}\cdot 5^{n}$; $3^{y}\cdot 5$

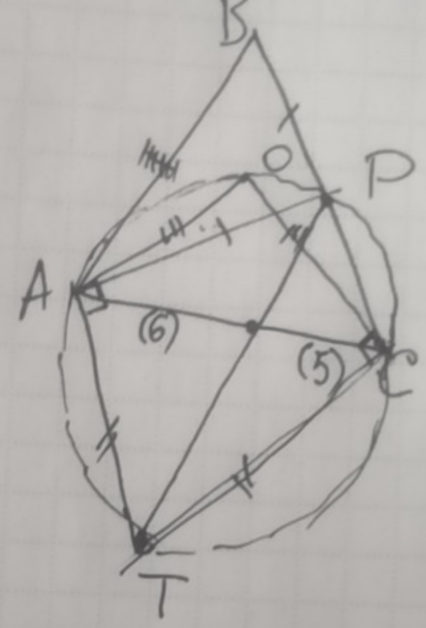
Также $6\cdot 15\cdot 18 = 1620$ чисел троек

Значит всего: $6\cdot 1620 = 9720$ троек

Ответ: 9720 троек

Чистовик 6

№6



Решение:

1) $OA \perp AT$; $OC \perp CT$ (по опр. кас) $\Rightarrow$ AOCT – вписанный $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ T лежит на окр, описанной около APC

2) Пусть $\angle ABC = \alpha$, тогда $\angle AOC = 2\alpha \Rightarrow \angle APC = 2\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BAP = \alpha$ и $\triangle APB$ – равнобедренный

$3^{15} \cdot 5$ Черновик

$3^{18} \cdot 3$ $3^{15} \cdot 3^{17}$ $3 \cdot 5^{1-18}$ $5 \cdot 3^{1-18}$

$15 \cdot 18$

НОД$(a; b; c) = 15$ $\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)=1$

НОК$(a; b; c) = 3^{15} \cdot 5^{18}$ $6x-14=\frac{x}{3}+3$

$\frac{17x}{3}=17$

$\log_{6x-14}(x-1)=1$

$3^{15} ; 5^{18}$ $x; x$ и $(x-1)$

$x=3$

$6x-14=x-1$

$5x=13$

$x=2,6$

$3 \cdot 5$ $3 \cdot 5$ $3 \cdot 5$ $x^2(x-1)=4$

$(3 \cdot 5) \cdot 3^{14} \cdot 5^{17}$

$x^3-x^2-4=0$

$3 ; 5$

$x^3-x^2-4 \,\underline{|\,x-2}$ $3 \cdot 5$

$-x^3-2x^2$ x^2

x^2-4

$3^{15} \cdot 3^{18}$

$\log_{1,6}\frac{11,6}{3}$ 1620

При $x=2$ реш сущ-вует

$x^3-x^2+0x-4 \,\underline{|\,x-2}$

$-x^3-2x^2$ x^2+x+2

x^2+0x

$-x^2-2x$

$2x-4$

$-2x-4$

0

$15 \cdot 18 \cdot 6 =$

$= 90 \cdot 18 = 1620$

$x=2$

$x-1=1$

$4\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = 4 \cdot \log_a b \cdot 1$

1620

$2\log_a b$

$2\log_b c$

$\log_c a$

$x^2+x+2=0$

$D=1-8$

$4 \cdot \frac{\log_b c}{\log_b a} \cdot \log_c a =$

$=4\log_a c \cdot \log_c a =$

$=4 \cdot \frac{1}{\log_c a} \cdot \log_c a = 4$

21104326 (U801895 M1302559)

Черновик

abc
acb
bac
cbа
cab
bca

$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)$

$\log_{6x-14}(x-1)^2$

При $x=3$

$\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)$

3: $\begin{cases} 6x-14>0 \\ x\neq 1 \\ \frac{x}{3}>-3 \\ \frac{x}{3}+3>0 \\ \frac{x}{3}+3\neq 1 \\ 6x-14>0 \\ x-1>0 \\ x\neq \frac{15}{6} \\ x\neq 2 \end{cases}$

$\frac{14}{6}$

$x>-9$

$x>1$

$2\log_4 4=2$

$2\log_4 2=1$

$\log_2 4=2$

$2\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)$

$2\log_{6x-14}(x-1)$

$\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)$

$2{,}6+9=11{,}6$

$x-1=\frac{x}{3}+3$

$\frac{2x}{3}=4$

$\Rightarrow$

$2x=12$

$x=6$

$2\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)=\frac{1}{\log_{\frac{x}{3}+3}(x-1)}$

$\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)=\frac{\log_{\frac{x}{3}+3}\left(\frac{x}{3}+3\right)}{\log_{\frac{x}{3}+3}(x-1)}$

$6x-14=\frac{\frac{x}{3}+3}{x-1}$

$(6x-14)(x-1)=\frac{x}{3}+3$

$6x^2-20x+14-\frac{x}{3}-3$

$18x^2-61x+11=0$

18 × 44 = 72, 72, 792

61 × 61 = 61, 366, 3721

$3721-792=$

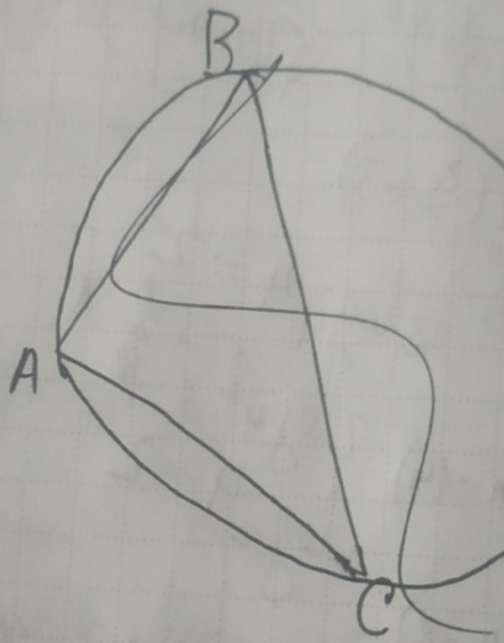
$=2929$

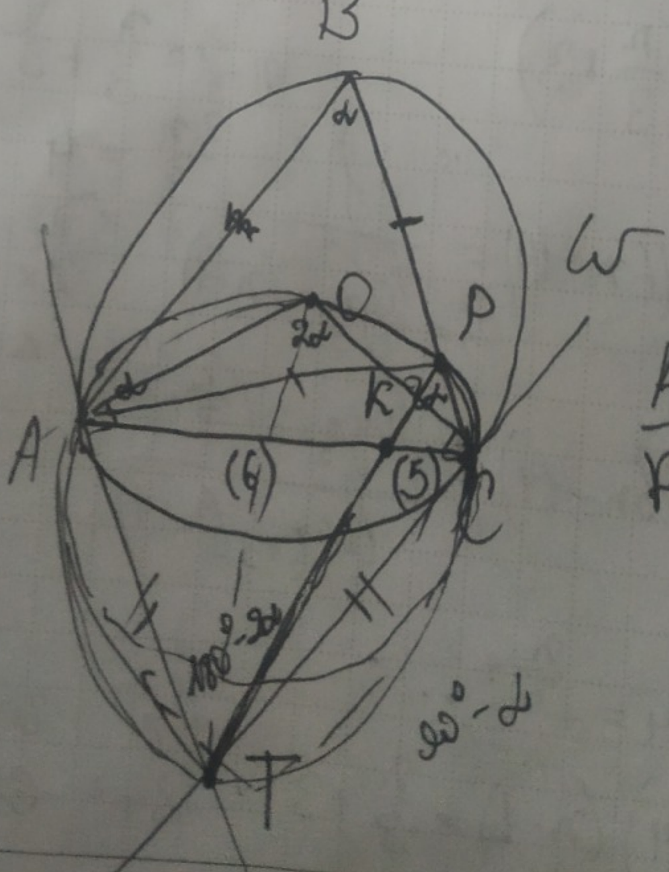
21104326 (U801895 M1302559)

Черновик

$\boxed{№6}$

$$\begin{array}{r} 18 \\ \times 4 \\ \hline 72 \end{array}$$

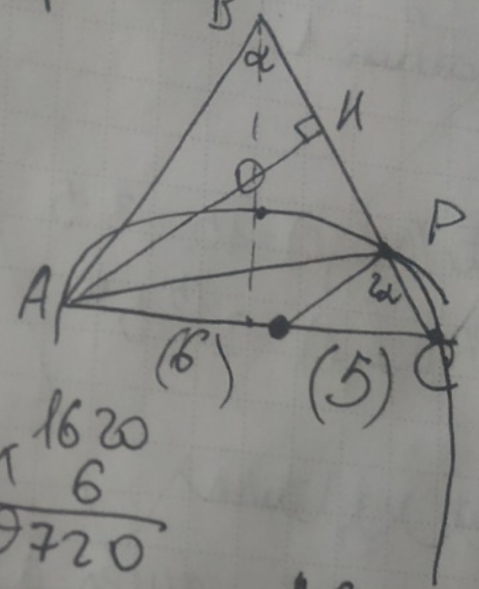




$$\frac{AB}{BC} = \frac{6}{5}$$

$$\frac{\sin\angle APK}{\sin\angle KPC} = \frac{5}{6}$$

Черновик



$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{x}{y}$$

BO

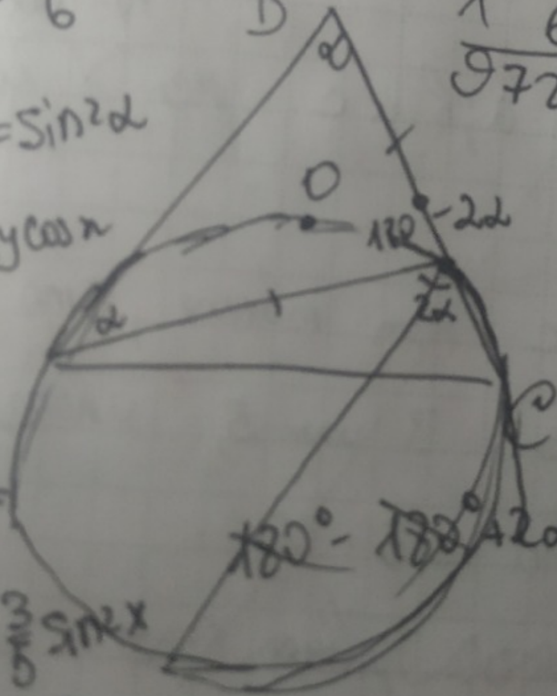
$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{5}{6}$$

$\sin(x+y) = \sin 2\alpha$

$\sin x\cos y + \sin y\cos x$

$\frac{5}{6}\sin y\cos y + \frac{6}{5}\sin x\cos x = \frac{5}{12}\sin 2y + \frac{3}{5}\sin 2x$

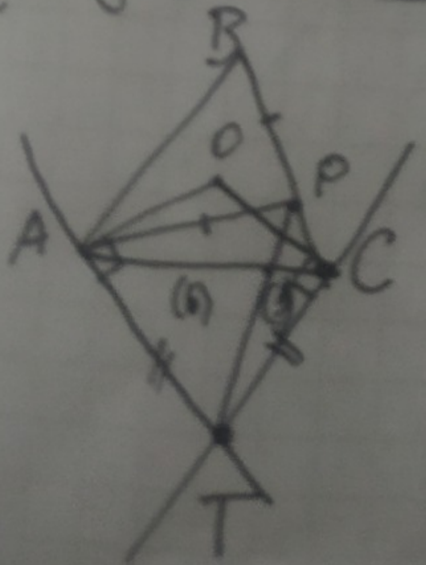
$$\begin{array}{r} 1620 \\ \times\ \ 6 \\ \hline 9720 \end{array}$$



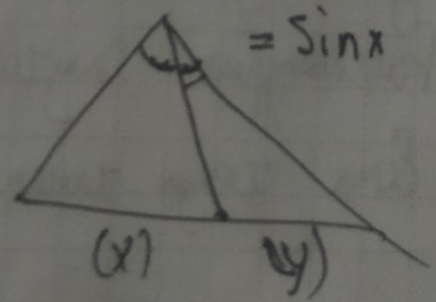
$\cancel{180°} - \cancel{180°} + 2\alpha - \alpha = \alpha$

$$\frac{AC}{\sin\alpha} = BC$$

$\alpha = 180° - 2\alpha$



$\sin(\pi - x) = \sin x$



$$\frac{n}{\sin\alpha} = \frac{x}{\sin(180° - \alpha - \beta)}$$

$$\frac{n}{\sin\beta} = \frac{y}{\sin(180° - \alpha - \beta)}$$