Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103564**

ID профиля: **873786**

Вариант 18

Чистовик

N1.

Перепишем систему через арифм.прогр. $a_i = a_1 + (i-1)d$

$$\begin{cases}(a_4+3b)(a_4+8b) > 7a_4+20 \\ (a_4+5b)(a_4+6b) < 7a_4+44\end{cases}$$

(1) $\Rightarrow \ldots + 24b^2 > 7a_4 + 20 \Rightarrow$

(2) $\Rightarrow$ -//-// $+30b^2 < 7a_4 + 44$

$\Rightarrow 6b^2 < 24$

$b < 2$

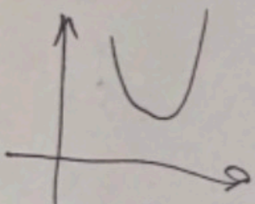
(1) $a_4^2 + a_4(-7+11b) + (24b^2 - 20) > 0$

парабола ветви вверх

$D = (49 + 121b^2 - 154b) - 96b^2 + 80 =$

$= 25b^2 - 154b + 129 = (5b - 15{,}4)^2 - (15{,}4^2 - 129) \Rightarrow$

$108{,}16 \; (10{,}4)^2$



$\Rightarrow 5b - 15{,}4 > 10{,}4$

$5b > 25{,}8$, но это невозм. т.к $b < 2$ (*)

(2) $a_4^2 + 11a_4 b + 30b^2 < 7a_4 + 44$ $\quad (a_1+3b)^2 + 11(a_1+3b)b + 30b^2 < 7(a_1+3b) + 44$

$a_1^2 + a_1(17b - 7) + (72b^2 - 21b - 44) < 0$

$D = (17b-7)^2 - 4\cdot 72b^2 + 84b + 176 > 0$

$289b^2 - 2\cdot 17\cdot 7b + 49 - 4\cdot 72b^2 + 84b + 176$

$(b-77)^2 - 77^2 + 225 > 0$

$b - 77 > -75{,}525$

$b > 1{,}475$

$\Rightarrow a_{1,2} = \dfrac{7 - 17b \pm \sqrt{b^2 - 154b + 225}}{2}$

$b \in (1{,}475; 2)$

$a_1 >$

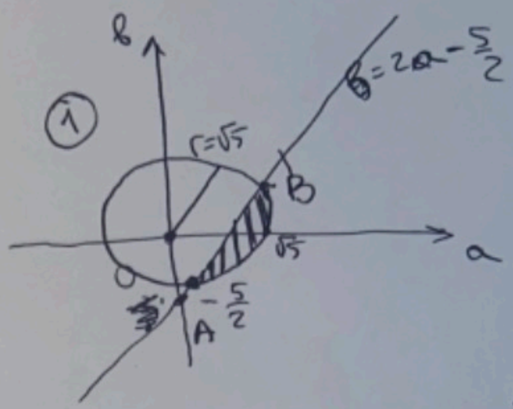
Ответ: $\left(\dfrac{7 - 17\cdot 2 - \sqrt{4 - 154\cdot 2 + 225}}{2} ; \dfrac{7 - 17\cdot 1{,}475 + \sqrt{1{,}475 - 154\cdot 1{,}475 + 225}}{2} \right)$

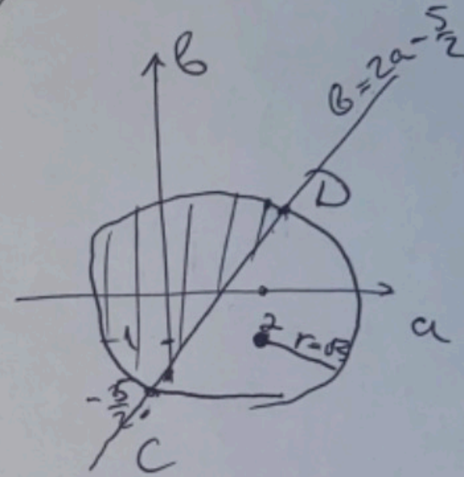
это равн. $[-13, -9]$ а, все целые

Чистовик

3. $\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 5 & (*)\\ a^2+b^2<\min(4a-2b,5)\end{cases}$

$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 5\\ a^2+b^2<5\\ 5\le 4a-2b \quad b\le 2a-\frac{5}{2}\end{cases} \quad (1)\\ \begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2<5\\ a^2+b^2\le 4a-2b\\ 5\geqslant 4a-2b\end{cases} \quad (2)\end{array}\right.$





(2) $a^2-4a+4+b^2+2b+1\le 5$

$(a-2)^2+(b+1)^2\le 5$

Покажем, что точки A и C совп.
B и D

(1) $\begin{cases}a^2+b^2=5\\ b=2a-\frac{5}{2}\end{cases}$

$a^2+\left(2a-\frac{5}{2}\right)^2=5$

$a^2+4a^2-10a+\frac{25}{4}=5$

$5a^2-10a+\frac{5^2}{4}=5$ $\quad a^2-2a+\frac{5}{4}-1=0$

$4a^2-8a+1=0$

$D=64-16=48 \quad a_{12}=\frac{8\pm 4\sqrt{3}}{8}=$

$=1\pm 0.5\sqrt{3}$

$b_{12}=-0.5\pm\sqrt{3}$

(2) $\begin{cases}(a-2)^2+(b+1)^2=5\\ b=2a-\frac{5}{2}\end{cases}$ $\quad 2a-\frac{3}{2}$

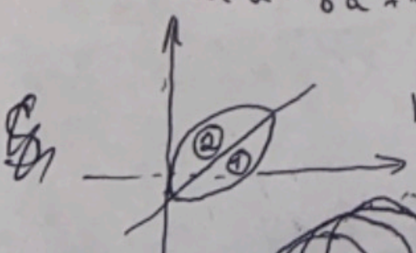
$a^2-4a+4+4a^2-\cancel{\ldots}\frac{5}{2}-6a+\frac{9}{4}=5$

$5a^2-10a+\frac{5}{4}=0$

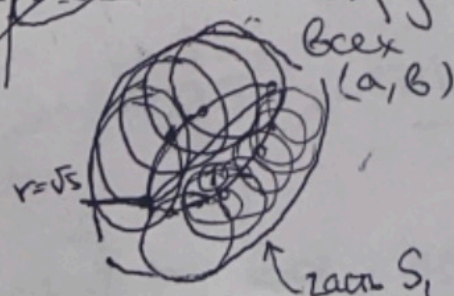
$4a^2-8a+1=0$

тоже самое => корни те же

$\Downarrow$ точки совп.-т



каждая точки (a,b) является центром окружности для реш. (*) то совокупность всех возм. (x,y) для которых сущ. (a,b) удовл. системе

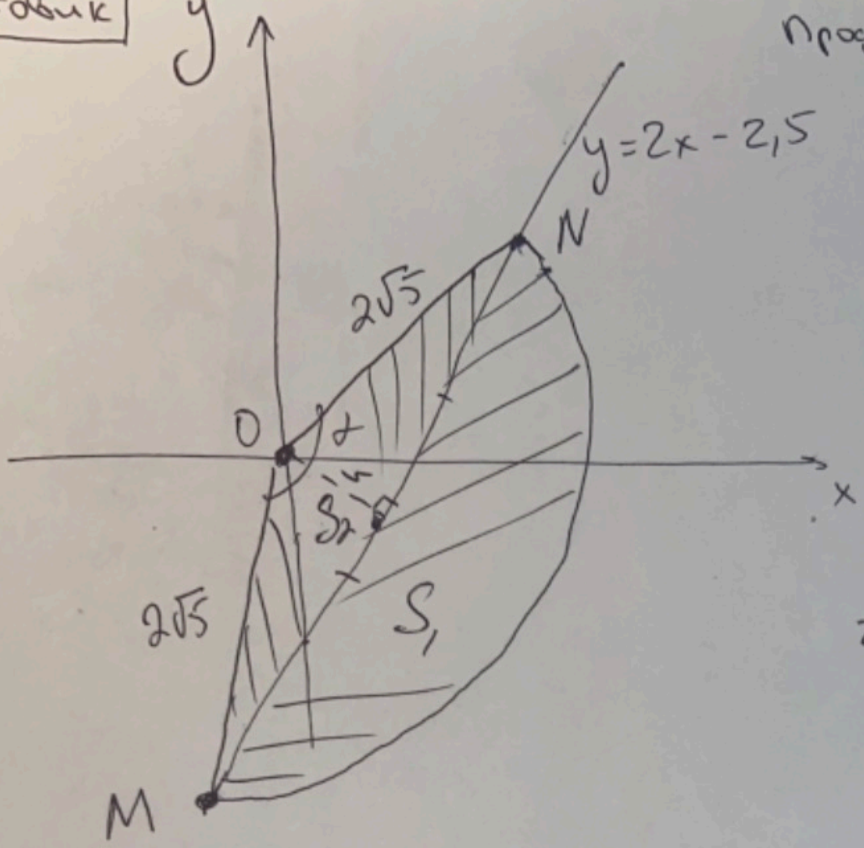


(2)

21103564 (U873786 M1297793)

Чистовик

Продолжение №3.



Координаты точек M и N:

1) $x^2+y^2=20$

$y=2x-\frac{5}{2}$

$x^2+4x^2-10x+\frac{25}{4}=2$

$20x^2-40x+25=80$

$4x^2-8x-11=0$

$\frac{D}{4}=16+4\cdot 11=60$

$x_{12}=1\pm\frac{\sqrt{15}}{2}$

$y_{12}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{15}$

$\overrightarrow{ON}\cdot\overrightarrow{OM}=|ON|\,|OM|\cdot\cos\alpha=$

$=2\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{5}\cdot\cos\alpha=20\cos\alpha$

$(\overrightarrow{ON}\cdot\overrightarrow{OM})=\left(\left(1+\frac{\sqrt{15}}{2}\right)\left(1-\frac{\sqrt{15}}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{15}\right)\left(-\frac{1}{2}-\sqrt{15}\right)\right)=$

$=1-\frac{15}{4}+\frac{1}{4}-15=-14-\frac{14}{4}=-\frac{5}{4}\cdot 14=-\frac{35}{2}=-17,5$

$\cos\alpha=-\frac{17,5}{20}=\cancel{\ldots}-\frac{7}{8}$ $\alpha=\arccos\left(-\frac{7}{8}\right)\Rightarrow$

$\Rightarrow S_1+S_2=\arccos\left(-\frac{7}{8}\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot 20=10\arccos\left(-\frac{7}{8}\right)$

$S_2=\frac{1}{2}\cdot h\cdot MN=$ ⊜.

$h=$

$\overrightarrow{MN}=\left(1+\frac{\sqrt{15}}{2}-1+\frac{\sqrt{15}}{2};-\frac{1}{2}+\sqrt{15}+\frac{1}{2}+\sqrt{15}\right)$
$(\sqrt{15};2\sqrt{15})$

⊜ $\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot 5\sqrt{3}=$
$=\frac{25\sqrt{3}}{8}$

$|MN|=\sqrt{5\cdot 15}=5\cdot\sqrt{3}$

$20-\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2=h$

$20-\frac{25\cdot 3}{4}=h\Rightarrow h=\frac{80-75}{4}=\frac{5}{4}$

$\boxed{S_1=10\arccos\left(-\frac{7}{8}\right)-\frac{25\sqrt{3}}{8}}$

в силу симметрии ответ равен $2S_1$

Ответ: $20\arccos\left(-\frac{7}{8}\right)-\frac{25\sqrt{3}}{4}$

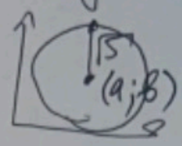
3

21103564 (U873786 M1297793)

Черновик

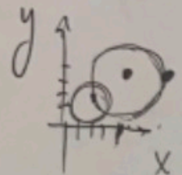
$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 5\\ a^2+b^2 \le \min(4a-2b, 5)\end{cases}$$

$(x;y)$

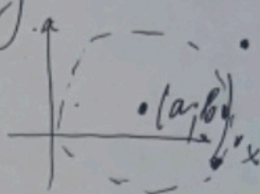


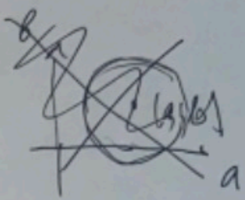
$S_M = ?$

$4a-2b$



$(a;b)$ $(a;2)$



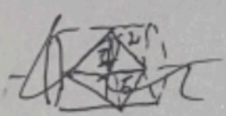


Н: $S_M = ?$

$M - (x;y)$

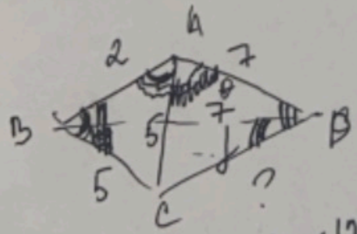
a, b – пара чисел

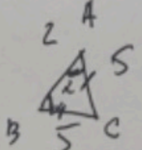
CD ∥ OO_1

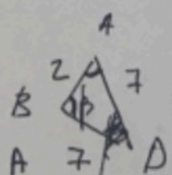


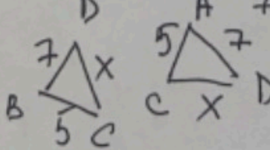
$V_ц = h \cdot \pi r^2$ min

$V_т = \frac{1}{3} h \cdot a$





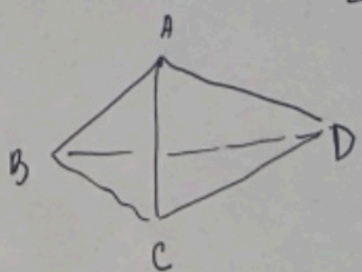




CD < 12

$\angle ACB = 180 - 2\alpha$

$\angle ADB = 180 - 2\beta$



Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103564**

ID профиля: **873786**

Вариант 18

Чистовик

№4

$$\begin{cases} \text{НОД}(a;b;c)=15 \\ \text{НОК}(a;b;c)=3^{15}\cdot 5^{18} \end{cases}$$

т.к в НОК используется только 3 и 5 в степ., то у a, b и c нет др. делителей, отличных от $3^k \cdot 5^l$

⇓ пусть

$a=3^{a_1}\cdot 5^{a_2}$

$b=3^{b_1}\cdot 5^{b_2}$

$c=3^{c_1}\cdot 5^{c_3}$

⇒ таким образом наборы (a_1, b_1, c_1) и (a_2, b_2, c_2) единств. образом образуют набор (упорядочный) (a, b, c)

чтобы выполн. усл-е ~~сколько~~ сто

$\min(a_1; b_1; c_1)=1$

$\min(a_2, b_2, c_2)=1$

$\max(a_1, b_1, c_1)=15$

$\max(a_2, b_2, c_2)=18$

I

Сколько способов для (a_1, b_1, c_1) – ?

Среди них 1 число „1"
1 числа „15"
третье любое от 1 до 15 вкл.

т.е а) если числа разные:

$3\cdot 2\cdot 13$

выбрать 1 место; выбр. место 15; на ост. место число целое [2; 14]

б) если 2 од. и одно разл.

1 1 15 – таких 3

или 15, 1, 1 ← таких тоже 3

$3+3=6$

$\boxed{а)+б) = 6\cdot 14}$

II

Сколько способов для (a_2, b_2, c_2) – ?

„18" и „1" обязательно в наборе

а) разные

$3\cdot 2\cdot 16$

место „18"; место „1"; любое целое число между 1 и 18

б) 2 од. и 1 разл.

~~2~~ 3 сл., где две „1" и одна „18"

3 сл. где две „18" одна „1"

$3+3=6$

$\boxed{а)+б) = 6\cdot 17}$

(a_1, a_2, a_3) — этих способов $6\cdot 14$

(a_2, b_2, c_2), (a_2, b_2, c_2) … $6\cdot 17$

поэтому перемножаем ~~…~~ (т.к для каждого набора „I" есть 6·17 вар-в II)

Ответ: $6^2\cdot 14\cdot 17$

№5 Чистовик

$$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14) \quad \log_{6x-14}(x-1)^2 \quad \log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)$$

$$2\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14) \quad 2\log_{6x-14}(x-1) \quad \log_{(x-1)}\left(\frac{x}{3}+3\right)$$

$\cancel{\frac{x}{3}+3=a}$ $\cancel{6x-14=b}$ $\cancel{2\log_a b}$ $\cancel{2\log_b a}$

Перемножим лог-мы:

$$\cancel{2}\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)\cdot\frac{\log_{(x-1)}\left(\frac{x}{3}+3\right)}{\frac{1}{\cancel{2}\log_{x-1}(6x-14)}}\cancel{\cdot 4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)\cdot\log_{6x-14}\left(\frac{x}{3}+3\right)\cdot 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)\cdot\cancel{4}}{\log_{\left(\frac{x}{3}+3\right)}(6x-14)}\cdot 4 = 4$$

тогда по усл-ю:

$$l\cdot l\cdot(l-1)=4$$

$$l^3-l^2-4=0$$

ОДЗ:

$$\begin{cases}\frac{x}{3}+3\neq 1\\ \frac{x}{3}+3>0\\ 6x-14>0\\ 6x-14\neq 1\\ x\neq 1\\ x\neq 2\\ x>1\\ \cancel{\frac{x}{3}>}\end{cases} \quad \begin{matrix}x\neq -6\\ x>-9\\ x>\frac{7}{3}\\ x\neq\frac{15}{6}\\ x\neq 1\\ x\neq 2\\ x>1\end{matrix} \Rightarrow \quad \Rightarrow \begin{cases}x>\frac{7}{3}\\ x\neq\frac{15}{6}\end{cases}$$

$l=2$, т.е два лог-ма 2

2, 2 и 1

$l=2$

$$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)=2$$

$$\frac{x}{3}+9=18x-42$$

$$17x=51$$

$$\boxed{x=3}$$

$$\log_{6x-14}(x-1)^2=2$$

$$6x-14=x-1$$

$$5x=13$$

$$x=2{,}6$$

$$\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)=2$$

$$(x-1)^2=\left(\frac{x}{3}+3\right)$$

$$x^2-\frac{7}{3}x-2=0$$

$$D=\frac{49}{9}+8=\frac{121}{9}$$

$$x_{1,2}=\frac{7}{3}\pm\frac{11}{3}$$

$$\boxed{x_1=\frac{18}{6}=3}$$

$$x_2=-\frac{2}{3}$$

При $x=3$ два логарифма равно 2,

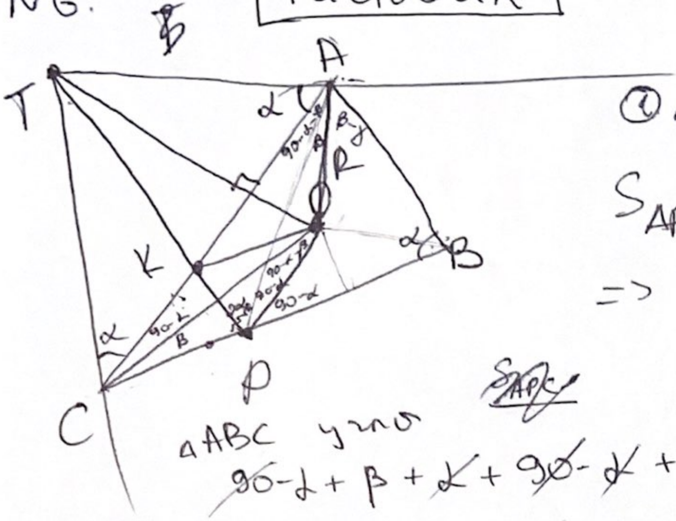
а $\log_{18-14}(2)^2=1 \Rightarrow \log_4 4=1$

условие выполнено $3>\frac{7}{3}$

и $3\neq\frac{15}{6}$ ОДЗ тоже

Ответ: при $x=3$

N6. Чистовик



① $\angle TAC = \angle ACT = \angle ABC = \overset{\smile}{AC} \cdot \frac{1}{2} = \alpha$

$S_{APK} + S_{CPK} = 11$

$\Rightarrow S_{ABC} = 11 \cdot \frac{CB}{CP}$

~~S_{APK}~~

$\triangle ABC$ углы

$\cancel{90} - \alpha + \beta + \cancel{\alpha} + \cancel{90} - \cancel{\alpha} + x = \cancel{180}$

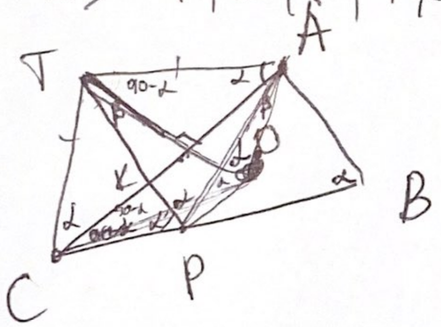
$x = \beta - \gamma$

$\angle AOC = 2\alpha$ т.к центр.

$\angle AOC = \angle APC = 2\alpha$ (т.к в 1й окр.)

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \angle CTA = 180 - 2\alpha \text{ из ①} \\ \angle CPA = 2\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ T, C, P, A, O – лежат на 1й окр.



~~$BP = PA$~~

Черновик

$6x-14 = \frac{x}{3}+3$

$6x-\frac{x}{3} = 14+3$

$\frac{17x}{3} = 17$

$x=3$

$6x-14 = x-1$

$\cancel{5x = 13}$

$|x+1|$

ОДЗ

$\frac{x}{3}+3 \neq 1$ $\quad x \neq -6$

$\frac{x}{3}+3 > 0$ $\quad x > -9$

$6x-14>0$

$x > \frac{7}{2}$

$6x-14 \neq 1$

$x \neq \frac{5}{2}$

$x-1\neq 1$

$x \neq 2$

$x-1>0$

$x>1$

$\Rightarrow x > \frac{7}{3}$

$x \neq \frac{5}{2};\ 2$

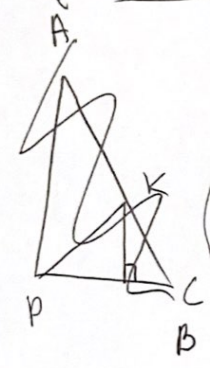
$\log_{|a|} b = \log_b |c|$

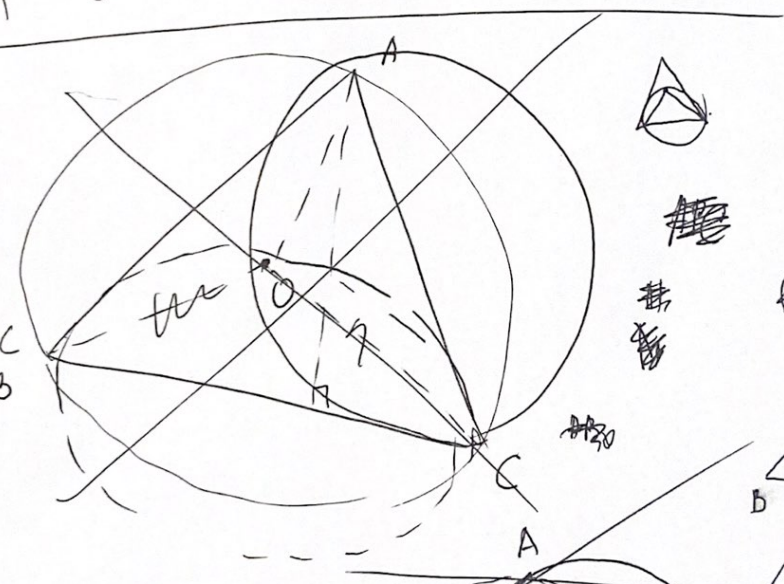
$\cancel{\log_{|a|} b - \log_c a = 0}$

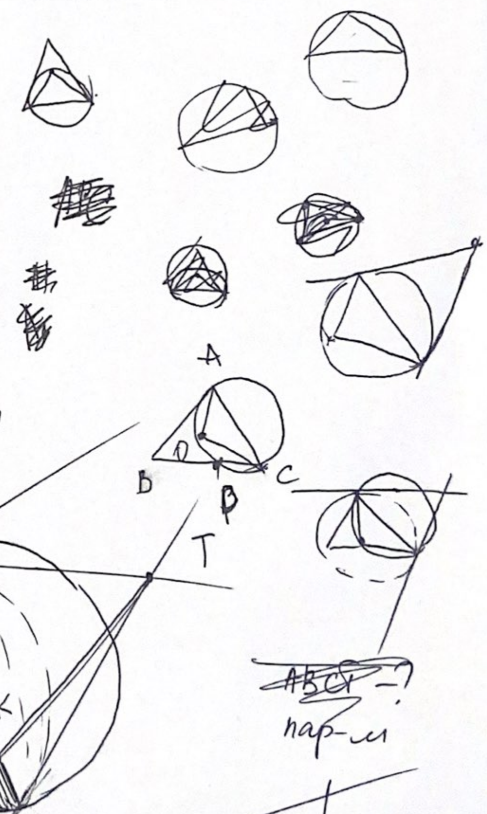
$\cancel{\log_b |c| - \log_c a = 0}$

$\frac{\log_{|a|} b}{\log_b |c|} - \log_c a = 0$

$l \cdot l \cdot (l-1)$ $\quad l^2 \quad l^2(l-1)$







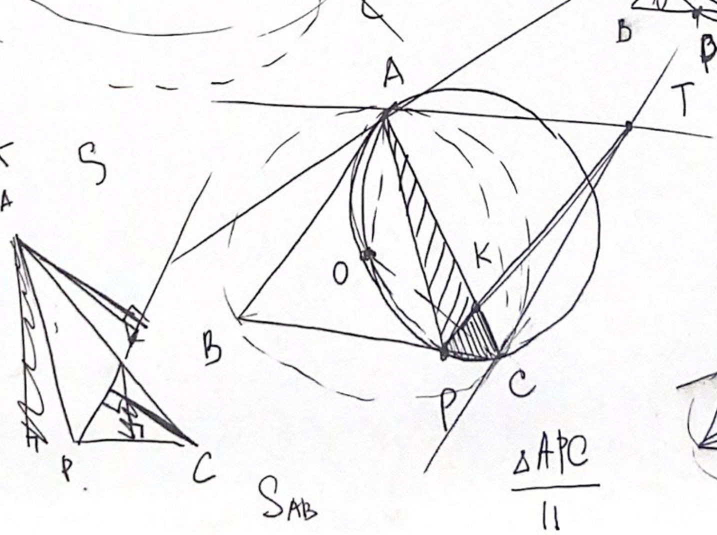
$=6$

$S_{\triangle APK}$ $S_{\triangle CPK}$ $\quad S$

$\shortparallel$ 5

$\frac{1}{2} h \cdot a = 6$

$S_{ABC} = ?$



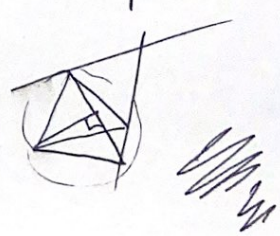
S_{AB}

$\triangle APC$

$\shortparallel$

~~ABC~~ — ?

пар-м



Черновик

$\frac{x}{3}+3>0$

$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)$

$\log_{6x-14}(x-1)^2$

$\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)$

$2\log_{a}b$ v

$2\log_{b}c$ v

$\log_{c}a$

Св-во

$\log_a b\cdot\log_c d=$
$=\log_c b\cdot\log_a d$

$\log_a b\cdot\log_c a=$
$=\log_c b$

$\cancel{2\log_b c=2\log_c a}$

$\cancel{\log_a b=\log_c b\cdot\log_a c}$

$\cancel{\log_b c=\log_a c\cdot\log a}$

$\log_c a\cdot\log_b c=$

$=\frac{\log_b a}{\log_b c^2-\log_c a^2}$

$2\log_c a\cdot 2\log_b c=\frac{4}{\log_a b}$

$2\log_a b\cdot\frac{2\log_b c}{\log_a c}=$

$=4\cdot\cancel{\log_c b}\cdot\cancel{\log_b c}$

Пусть $2\log_a b=2\log_b c$

$\frac{x}{3}+3$ v $x-1$

$x+9$ v $3x-3$

$\cancel{x+12 \vee 3x}$

$\log_a b=\log_c a\ \frac{+1}{}$

$x^n\le x$

$x^n\le 1$

$x^1=y$

$\log_a b=\log_b a$

$\log_a b=\frac{1}{\log_a b}$

$\log_a b=1$

$\cancel{\log_c a}$

$\cancel{\log_c b\cdot\log_a c=}$

$a=b$

$\frac{\log_a b}{\log_b c}=1$

$\cancel{\frac{\log_a b-\log_b a}{\log_b c}=0}$

$\log_b c\neq 0$

$\frac{\log_a b}{\log_b c}-\log_c a=0$

$\cancel{\frac{\log_a b-\log_c a\cdot\log_b c}{\log_b c}=0}$