Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103552**

ID профиля: **863913**

Вариант 18

(1)

Чистовик

№1 S – сумма 7 чл. пр. $\quad a_1 - ?$

$$\begin{cases} a_7 a_{12} > S + 20 \\ a_9 a_{10} < S + 44 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_7 = a_1 + d(n-1) = a_1 + 6d \\ a_{12} = a_1 + 11d \\ a_9 = a_1 + 8d \\ a_{10} = a_1 + 9d \end{cases} \qquad \begin{cases} d > 0;\ d \in N \\ a_n \in Z \end{cases}$$

$$S_7 = \frac{2a_1 + d \cdot 6}{2} \cdot 7 = (a_1 + 3d)7$$

$$\begin{cases} (a_1+6d)(a_1+11d) > 7a_1 + 21d + 20 \quad (а) \\ (a_1+8d)(a_1+9d) < 7a_1 + 21d + 44 \quad (б) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 11a_1d + 6a_1d + 66d^2 > 7a_1 + 21d + 20 \\ a_1^2 + 9a_1d + 8a_1d + 72d^2 < 7a_1 + 21d + 44 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 17a_1d - 7a_1 + 66d^2 - 21d - 20 > 0 \\ a_1^2 + 17a_1d - 7a_1 + 72d^2 - 21d - 44 < 0 \quad \Big| \cdot (-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 17a_1d - 7a_1 + 66d^2 - 21d - 20 > 0 \\ -a_1^2 - 17a_1d + 7a_1 - 72d^2 + 21d + 44 > 0 \end{cases} + \Rightarrow -6d^2 + 24 > 0; \quad d^2 - 4 > 0 \Rightarrow$$

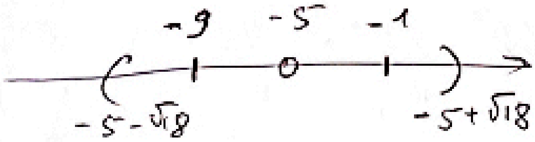
$$\Rightarrow \begin{cases} d \in (-2; 2) \\ d > 0 \end{cases} \Rightarrow d \in (0; 2) \Rightarrow d = 1$$

(а) $a_1^2 + 17a_1 - 7a_1 + 66 - 21 - 20 > 0; \quad a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0$

$(a_1 + 5)^2 > 0 \Rightarrow a \in R \setminus \{-5\}$

(б) $a_1^2 + 17a_1 - 7a_1 + 72 - 21 - 44 < 0; \quad a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0$

$D = 25 - 7 = 18 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a_1 = -5 + \sqrt{18} \\ a_1' = -5 - \sqrt{18} \end{array} \right. \Rightarrow a \in (-5 - \sqrt{18}; -5 + \sqrt{18})$



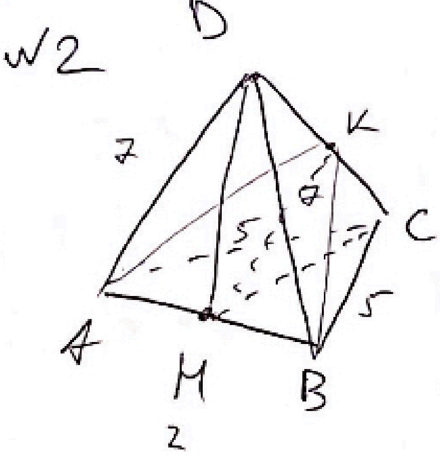
$-5 - \sqrt{18} < -9$	$-5 + \sqrt{18} > -1$
$-\sqrt{18} < -4$	$\sqrt{18} > 4$
$\sqrt{18} > 4$	$18 > 16$
$18 > 16$	

$a_1 \in \{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1\}$

Ответ: $-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1$

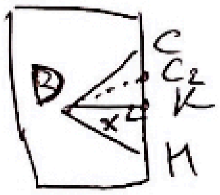
(2) Чистовик

№2



$AB = 2$; $AC = CB = 5$; $AD = DB = 7$

Пусть M – сер. AB, тогда $DM \perp AB$ и $CM \perp AB$ (из р/б. $\triangle ABC$ и $\triangle ADB$). Изобр. сеч. цилиндра (CDM): x – расст. от AB до CD

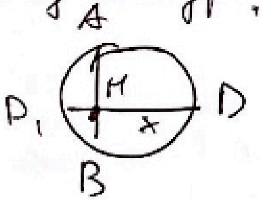


$x = MK$, где K – осн. выс. в $\triangle MCD$

т. A и M расп. и за т. D.

C_2 – вторая возм. расст. c при том же x.

цилиндр „сверху": $AB = 2$; $MD = x$; по св. пересек. хорд: $D_1M \cdot MD = AM \cdot MB$

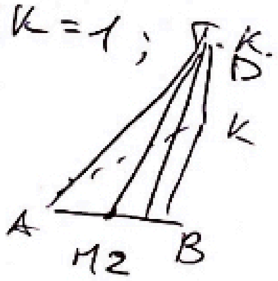


$$(2R - x)x = 1 \cdot 1$$

$$2Rx - x^2 - 1 = 0 \Rightarrow R = \frac{x^2+1}{2x} = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$x + \frac{1}{x} \geq 2 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow$ наим. возм. R достиг., если $x = 1$

Тогда, при наим. R $AM = MB = MK = 1$;



$\triangle ABK$ – прям. р/б; найдем KD:

1) т.к. MK – общ. пер. к AB и CD, то $(ABK) \perp KD$ и $\angle AKD = \frac{\pi}{2}$
2) $AK = \sqrt{2}$
3) $KD^2 = AD^2 - AK^2 = 49 - 2 \Rightarrow \sqrt{47} = KD$

Аналогич. KC: $KC^2 = AC^2 - AK^2 = 25 - 2 \Rightarrow \sqrt{23} = KC$

Тогда, $CD = KC + KD = \sqrt{23} + \sqrt{47}$ или (если в сист. C_2, когда C и D по одн. ст. от K) $CD = KD - KC = \sqrt{47} - \sqrt{23}$

Ответ: $\sqrt{47} - \sqrt{23}$ или $\sqrt{47} + \sqrt{23}$

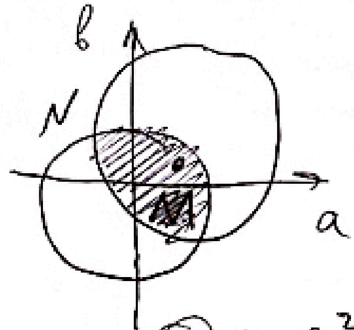
21103552 (U863913 M1304972)

③ Чистовик

№3 $\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 5 & (1) \\ a^2+b^2 \le \min(4a-2b, 5) & (2) \end{cases}$ S_M - ?

Для каждой пары (a, b), удовл. (2) нер-во (1) задает круг рад. $\sqrt{5}$

Необх. найти мн-во N точек (a, b) удовл. (2)



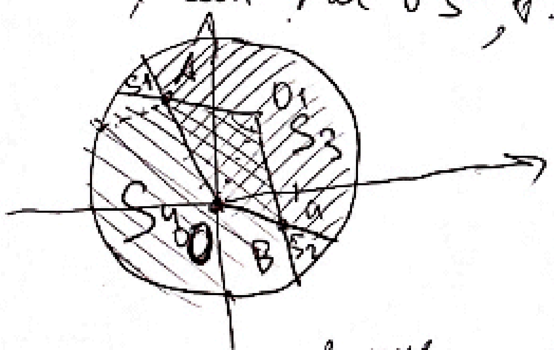
Нер-во (2) равнос. системе:

$\begin{cases} a^2+b^2 \le 4a-2b & ⓐ \\ a^2+b^2 \le 5 & ⓑ \end{cases}$

ⓐ: $a^2-4a+4+b^2+2b+1 \le 5$

$(a-2)^2+(b+1)^2 \le 5$

Мн-во M – все точки, удален. от мн-ва N не более, чем на $\sqrt{5}$, т.е. M выгл. так:



$\angle OAO_1 = \frac{\pi}{3}$ т.к. A - пер. с окр. рад. $\sqrt{5}$ с цент. расст. $\sqrt{5}$

$S_1 = \pi(\sqrt{5})^2 \cdot \frac{\pi/3}{2\pi} = \frac{\pi}{3}$

$S_2 = S_1$

вправо

S_3 – заштр. площ. сект. круга рад. $2\sqrt{5}$ и углом $2\pi/3$; $S_3 = \pi \cdot (2\sqrt{5})^2 \cdot \frac{2\pi/3}{2\pi} = \frac{20\pi}{3}$

S_4 – заштр. влево площ. – аналогично $= \frac{x\pi}{3}$

общ. площадь $S_3 \cap S_4$ (её необх. вычесть) = = 2 площади прав. т-ков со стор. $\sqrt{5}$. Она равна

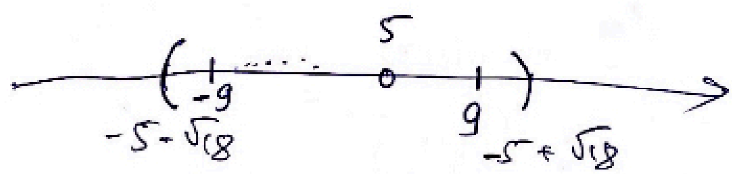
$5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} (\sqrt{5})^2 = \frac{25\sqrt{3}}{4}$

Ответ: Итого. $S_M = \frac{4\pi}{3} + \frac{40\pi}{3} - \frac{25\sqrt{3}}{4}$

21103552 (U863913 M1304972)

Черновик

№1



$-5-\sqrt{18} < -9$

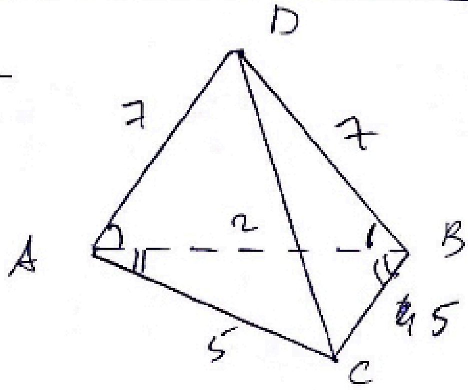
$-\sqrt{18} < -4$

$\sqrt{18} > 4$

$18 > 16$

Т.к. $a_1 \in Z$, то $a_1 = \{-9; -8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 6; 7; 8; 9\}$

№2



$AB = 2$ $\quad AC = CB = 5$

$AD = DB = 7$

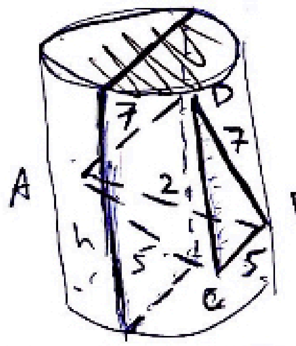
CD - ?

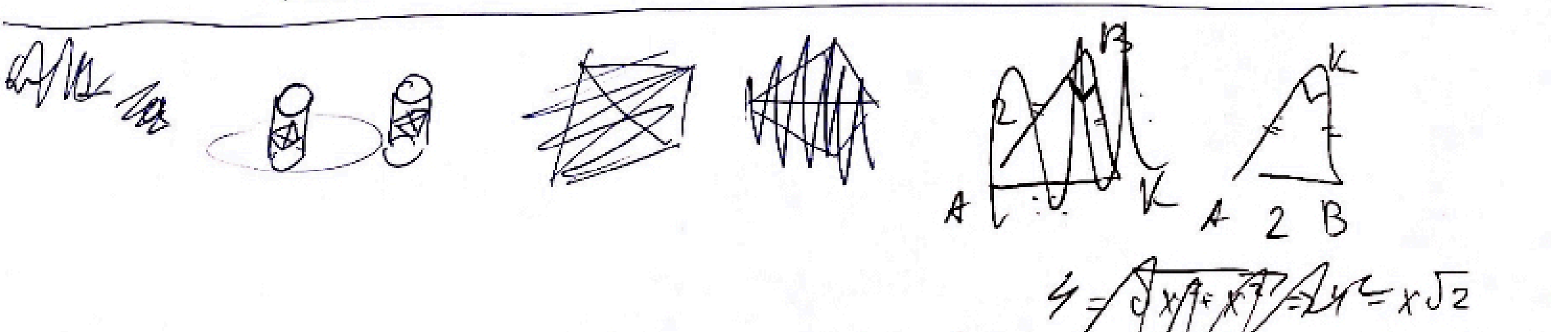
$CD \parallel$ оси ; Гу. - наим.

Т.к. $CD \parallel$ оси цилиндра $(Ц)_1$ и вершины тетр. леж. на бок. пов. цил., то $CD < h$

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~





~~$4 = \sqrt{x^2 + x^2} = 2x^2 = x\sqrt{2}$~~

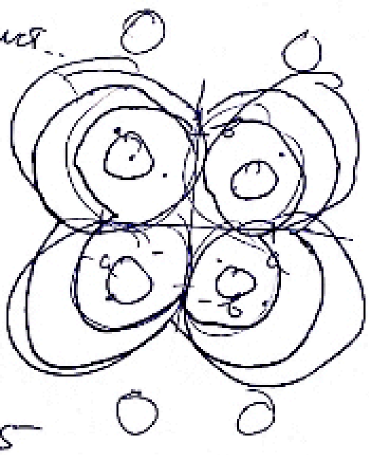
~~$x = \frac{4}{\sqrt{2}}$~~

Черновик.

№3 M – фигура в дек. п-ти S_M - ?

(x, y) - точки: ~~∃~~ при a, в вып. нер-ся

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-в)^2 \le 5 \\ a^2 + в^2 \le \min(4a - 2в, 5) \end{cases}$$



а) $4a - 2в > 5$

$a > \frac{5+2в}{4}$;

$в < \frac{4a-5}{2}$

б) $4a - 2в < 5$

$a < \frac{5+2в}{4}$

$в > \frac{4a-5}{2}$

~~$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2ay + в^2 \le 5$~~

~~$a^2 + в^2 \le 5 - x^2 + 2ax - y^2 + 2ay$~~

21103552 (U863913 M1304972)

Черновик

№1 S_7 – сумма 7 чл. a_1 – ?

$\cancel{S_7}$

$$\begin{cases} a_7 a_{12} > S+20 \\ a_9 a_{10} < S+44 \end{cases}$$

$a_7 = a_1 + d(n-1) = a_1 + 6d$
$a_{12} = a_1 + 11d$

$S_7 = \frac{2a_1 + d6}{2} \cdot 7 = (a_1 + 3d)7$

$$\begin{cases} (a_1+6d)(a_1+11d) > 7a_1 + 21d + 20 \quad (1) \\ (a_1+8d)(a_1+9d) < 7a_1 + 21d + 44 \quad (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 11a_1d + 6a_1d + 66d^2 > 7a_1 + 21d + 20 \\ a_1^2 + 9a_1d + 8a_1d + 72d^2 < 7a_1 + 21d + 44 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 17a_1d - 7a_1 + 66d^2 - 21d - 20 > 0 \\ a_1^2 + 17a_1d - 7a_1 + 72d^2 - 21d - 44 < 0 \;|\cdot(-1) \end{cases}$$

$$\left.\begin{cases} \cancel{a_1^2} + \cancel{17a_1d} - \cancel{7a_1} + 66d^2 - \cancel{21d} - 20 > 0 \\ \cancel{-a_1^2} - \cancel{17a_1d} + \cancel{7a_1} - 72d^2 + \cancel{21d} + 44 > 0 \end{cases}\right) +$$

$-6d^2 + 24 > 0$; $d^2 - 4 < 0 \Rightarrow \begin{cases} d \in (-2; 2) \\ d > 0 \end{cases} \Rightarrow d \in (0; 2) \Rightarrow$
$\Rightarrow d = 1$

(1) $a_1^2 + 17a_1 - 7a_1 + 66 - 21 - 20 > 0$
$a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0$
$(a_1 - 5)^2 > 0 \Rightarrow a \in R \setminus \{5\}$

$\begin{array}{r} 66 \\ -41 \\ \hline 25 \end{array}$

(2) $a_1^2 + 17a_1 - 7a_1 + 72 - 21 - 44 < 0$
$a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0$ $\to D = 25 - 7 = 18 \to \left[\begin{array}{l} a_1 = -5 + \sqrt{18} \\ a_2 = -5 - \sqrt{18} \end{array}\right.$

$\begin{array}{r} 72 \\ -65 \\ \hline 7 \end{array}$

$a \in (-5 + \sqrt{18}; 5 + \sqrt{18})$

$$\begin{cases} S_2 = a_1 + a_2 = a_1 + a_1 + d = 2a_1 + d \\ S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d = 3a_1 + 3d \\ S_4 = a_1 + (a_1+d) + (a_1+2d) + (a_1+3d) = 4a_1 + 6d \end{cases}$$

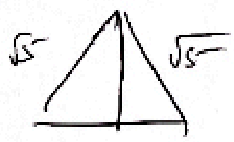
$S = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$

$\begin{cases} 1\ 2\ 3 \quad 1\ 3\ 5 \\ 1)\ S_3 = \frac{2 + 1\cdot 2}{2} \cdot 3 = 6 \\ 2)\ S_3 = \frac{2 + 2\cdot 2}{2} \cdot 3 = 9 \end{cases}$

$a_9 = a_1 + 8d$
$a_{10} = a_1 + 9d$

$\begin{cases} d > 0 \\ a_1, a_2 \dots a_n \in Z \end{cases}$

$\pi \cdot 40 \quad \cdot \frac{2\pi}{6\pi} =$



Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103552**

ID профиля: **863913**

Вариант 18

① Чистовик

№ 4 $\begin{cases} НОД(a,b,c) = 15 = 5 \cdot 3 \\ НОК(a,b,c) = 3^{15} \cdot 5^{18} \end{cases}$

Т.к. $НОК = 3^{15} \cdot 5^{18}$, то $\begin{cases} a = 5^{x_1} \cdot 3^{y_1} \\ b = 5^{x_2} \cdot 3^{y_2} \\ c = 5^{x_3} \cdot 3^{y_3} \end{cases}$;

$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 15 \\ y_1 + y_2 + y_3 = 18 \\ \min(x_1, x_2, x_3) = 1 \\ \min(y_1, y_2, y_3) = 1 \end{cases}$;

$x_1 = 1$, $y_1 = 1$, тогда

$\begin{cases} x_2 + x_3 = 14 \Rightarrow 13 \text{ вариантов} \\ y_2 + y_3 = 17 \quad 16 \text{ вариантов} \end{cases}$

Тогда всего реш.: $13 \cdot 3 \cdot 16 \cdot 3 = 1872$

Ответ: 1872

21103552 (U863913 M1304973)

Чистовик

(2)

№5 Заметим, что $\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)\cdot$

$\cdot \log_{6x-14}(x-1)^2 \cdot \log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right) = 2\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)\cdot$

$\cdot 2\log_{6x-14}(x-1)\cdot\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right) = 4$ всюду на ОДЗ (*)

Если 2 числа совпадут, а 3-е меньше на 1, то из ОДЗ (*): $a^2(a-1)=4 \Rightarrow a^3-a^2-4=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (a-2)(a^2+a+2)=0 \Rightarrow a=2$

$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)=2 \Rightarrow x=3$

$\log_{6x-14}(x-1)^2=2 \Rightarrow x=\frac{13}{5}$

$\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)=2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-\frac{2}{3} \end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{l} 3x^2-7x-6=0 \\ D=49+72=121 \\ x_1=\frac{7-11}{6}=-\frac{2}{3} \\ x_2=\frac{7+11}{6}=3 \end{array}\right\}$

Таким образом, условие выполняется только при $x=3$. Проверим, подставив $x=3$:

$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)\Big|_{x=3} = \log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)\Big|_{x=3} = 2$

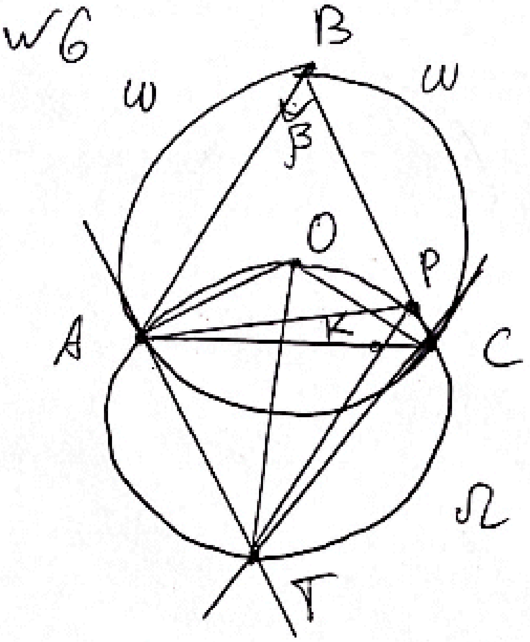
$\log_{6x-14}(x-1)^2\Big|_{x=3} = 1$

Ответ: $x=3$

21103552 (U863913 M1304973)

③ Чистовик

№6



а) 1) т.к. $\angle OAT = \angle OCT = 90^\circ$, то четырехугольник $OATC$ опис. $\Rightarrow$ $\Rightarrow T \in \Omega$

2) т.к. $\angle OAT = 90^\circ$, то OT – диам. Ω

3) $\angle AOC = \angle AOP = 2\angle ABC = 2\alpha$ (как впис. $\angle$-ы и центр. опир. на одну хорду)

4) $\angle AOT = \angle TOC = \alpha$ (т.к. OT – диам. Ω, то OT – бис. $\angle AOC$)

5) $\angle TPC = \angle TOC$ (впис., опир. на одну ~~дугу~~ хорду) $\Rightarrow$ $\Rightarrow \angle TPC = \angle APT = \alpha$. Тогда $\angle TPC = \alpha = \angle ABC \Rightarrow$ $\Rightarrow TP \parallel AB \Rightarrow \triangle CPK \sim \triangle CBA$

6) т.к. $S_{\triangle PKC} : S_{\triangle PAK} = KC : KA = 5 : 6$, то $KC : AC =$ $= 5 : 11 \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \left(\frac{11}{5}\right)^2 \cdot S_{\triangle KPC} = \frac{121}{5}$

б) пусть $\sin\beta = x$, ; $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$\angle BPA = \pi - 2\beta \Rightarrow$ из $\triangle ABP$: $\angle PAB = \pi - \angle BPA - \angle PBA =$ $= \pi - (\pi - 2\beta) - \beta = \beta \Rightarrow AP = BP$, $\triangle ABP$ – равностр.

$S_{\triangle ABP} = \frac{121}{5} - 5 - 6 = \frac{66}{5}$

с др. стороны $S_{\triangle ABP} = \frac{1}{2} \cdot AB \left(\frac{AB}{2} \cdot \operatorname{tg}\beta\right) =$ $= [\text{Пусть } AB = c] = \frac{c^2}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{c^2}{8}$; $\frac{c^2}{8} = \frac{66}{5} \Rightarrow$

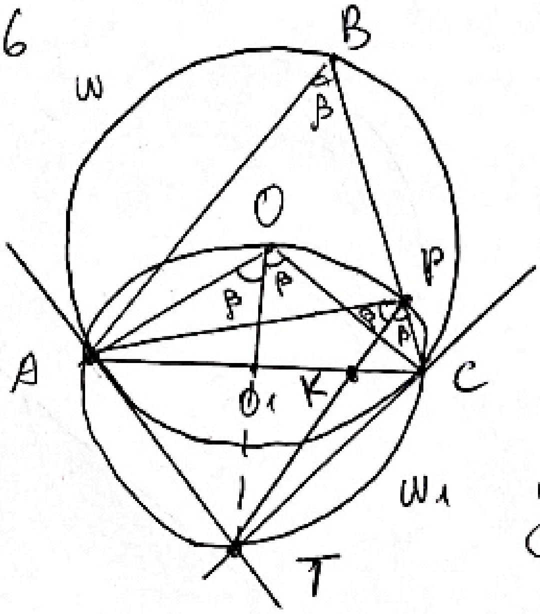
$\Rightarrow c = \frac{4\sqrt{165}}{5} \Rightarrow AB = \frac{4\sqrt{165}}{5}$

Пусть CH выс. в $\triangle ABC$; $\frac{1}{2} CH \cdot AB = \frac{121}{5}$;

$\frac{1}{2} CH \cdot \frac{4\sqrt{165}}{5} = \frac{121}{5} \Rightarrow CH = \frac{11\sqrt{165}}{30}$ ... Ответ: а) $\frac{121}{5}$

~~Чистовик~~ Черновик

№6



а) O_1 – ц. окр. ω_1, оп. около $\triangle AOC$ (O_1 не обяз. $\in AC$!);
достр. OO_1 до диам. ω_1: OS, тогда $\angle OAS = \frac{\pi}{2} \Rightarrow AS$ – кас. к ω в т. $A \Rightarrow S = T$

У $\triangle APK$ и $\triangle CPK$ высота, пров. из P – общ. $\Rightarrow AK : KC =$ ~~S~~

Черновик

№4 (a,b,c) - кол-во

$\begin{cases} НОД(a,b,c)=15 \\ НОК(a,b,c)=3^{15}\cdot 5^{18} \end{cases}$ | $a,b,c \in N$

$\begin{cases} НОД(2,8)=2 \\ НОК = 8 \\ \frac{2\cdot 8}{8} = 2 \end{cases}$

$\begin{cases} НОД(8,6)=2 \\ НОК(8,6)=24 \\ \frac{8\cdot 6}{24} = 2 \end{cases}$

a·b

НОК

НОД

$a\cdot b\cdot c = 15\cdot 3^{15}\cdot 5^{18} = 3^{16}\cdot 5^{19}$

$16\cdot 19 = 144 + 160 = 304$

$3^{2}\ 5^{3}$

$3 \leq 5,\ 5^2,\ 5^3$

$3^2 \leq 5,\ 5^2,\ 5^3$

330 329 328

$329\cdot 330 = 987 + 987 = 108570$

$108570 \cdot 328 = 868560 + 217140 + 325710 = 35580960$

Всего вар. для числа: $16 + 19 + 16\cdot 19 + 1 = 25 + 304 + 1 = 330$

$\log_{5x-1}(4x+1) = 2$

$\log_{5x-1}(4x+1) = 2$

$\log_{5x-1} 4x+1 = \log_{5x-1} 5x-1$

$x-2$

$\log_{\frac{x}{3}+3} 6x-14 =$

$\frac{x}{3}+3 = x^2-2x+1$

$x+9 = 3x^2-6x+3$

$3x^2-7x-6=0$

$6x-14 = \frac{x}{3}+3$

$18x-42 = x+9$

$17x = 51$

$x = 3$

$x-1 = 6x-14$

$5x = 13$

21103552 (U863913 M1304973)

Черновик

№5 $\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)$; $\log_{6x-14}(x-1)^2$; $\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)$

(a, b, c)

x – ? 1) a = b c = a – 1
2) b = c a = c – 1
3) a = c b = a – 1

$\frac{x}{3}+3 \neq 1$ $\left\{\frac{x}{3}+3>0;\ x>-9\right.$

$x+9\neq 3 \Rightarrow x\neq -6$

$6x-14>0 \Rightarrow x>\frac{7}{3}$

$6x-14\neq 1$ $x\neq\frac{15}{6}=\frac{5}{2}$

$x-1>0$ $x>1$

$~~x-1\neq 1~~$ $x\neq 2$

$-9\ \ -6\ \ 1\ \ 2\ \ \frac{7}{3}\ \ \frac{5}{2}$

$x\in\left(\frac{7}{3};+\infty\right)\setminus\left\{\frac{5}{2}\right\}$

1) $\log_{\sqrt{x+3}}(6x-14)=\log_{6x-14}(x-1)^2$

$\log_{x+3}(6x-14)=\log_{6x-14}(x-1)$

$\log_{x+3}(6x-14)=\frac{\log_{x+3}x-1}{\log_{x+3}6x-14}$

2) $\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)=\underbrace{\log_{(x-1)}\left(\frac{x}{3}+3\right)+1}_{\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)(x-1)}$

$\frac{x^2}{3}-\frac{x}{3}+3x-3=\frac{x^2-x+9x-9}{3}=$

=

$\times\begin{array}{r}13\\3\\\hline 39\end{array}$ $\times\begin{array}{r}16\\3\\\hline 48\end{array}$

$\frac{7}{3}$ $\frac{13}{5}$

35 39

$\times\begin{array}{r}39\\48\\\hline 312\\+156\\\hline 1872\end{array}$

$6\cdot\frac{13}{5}-14=\frac{78-70}{5}=\frac{8}{5}$

$\left(\frac{13}{5}-1\right)^2=\left(\frac{8}{5}\right)^2$

21103552 (U863913 M1304973)