Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103514**

ID профиля: **363574**

Вариант 18

Математика
11 класс
Вариант 18

Чистовик

№1

$$\begin{cases} a_7 \cdot a_{12} > S+20 \\ a_9 \cdot a_{10} < S+44 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a_7 \cdot a_{12} < -S-20 \\ a_9 \cdot a_{10} < S+44 \end{cases}$$

Сложим два неравенства системы:

$a_9 \cdot a_{10} - a_7 \cdot a_{12} < 24$

$(a_1+8d)(a_1+9d)-(a_1+6d)(a_1+11d) < 24$

$a_1^2 + 17a_1d + 72d^2 - a_1^2 - 17a_1d - 66d^2 < 24$

$6d^2 < 24$

$d^2 < 4$

$d \in (-2;2)$

Т.к. данная прогрессия является возр-ей, то $d > 0 \Rightarrow d \in (0;2)$.

Т.к. все члены пр-сии - целые числа, то $d \in \mathbb{Z} \Rightarrow d = 1$.

Тогда первоначальная система равносильна следующей:

$$\begin{cases} (a_1+6)(a_1+11) > 7a_1+41 \\ (a_1+8)(a_1+9) > 7a_1+65 \end{cases}$$

① $(a_1+6)(a_1+11) > 7a_1+41$

$a_1^2 + 17a_1 + 66 - 7a_1 - 41 > 0$

$a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0$

$(a_1+5)^2 > 0 \Leftrightarrow (a_1+5)^2 \neq 0 \Leftrightarrow a_1 \neq -5$

② $(a_1+8)(a_1+9) \quad 7a_1+65$

$a_1^2 + 17a_1 + 72 - 7a_1 - 65 \quad 0$

$a_1^2 + 10a_1 + 7 \quad 0$

$D = 100 - 4 \cdot 7 = 72$

$$\left[\begin{array}{l} a_1 = \frac{-10-6\sqrt{2}}{2} = -5-3\sqrt{2} \\ a_1 = \frac{-10+6\sqrt{2}}{2} = -5+3\sqrt{2} \end{array}\right.$$

$a_1 \in (-5-3\sqrt{2}; -5+3\sqrt{2})$

$4 < 3\sqrt{2} < 5 \Rightarrow -1 < -5+3\sqrt{2} < 0$

$-5 < -3\sqrt{2} < -4 \Rightarrow -10 < -5-3\sqrt{2} < -9$

Значит, т.к. $a_1 \in \mathbb{Z}$, $a_1 \in \{-9,-8,-7,-6,-5,-4,-3,-2,-1\}$

Объединяя полученные решения, получаем: $a_1 \in \{-9,-8,-7,-6,-4,-3,-2,-1\}$

Ответ: $a_1 \in \{-9,-8,-7,-6,-4,-3,-2,-1\}$.

Математика
11 класс
Вариант 18

Чистовик

№3

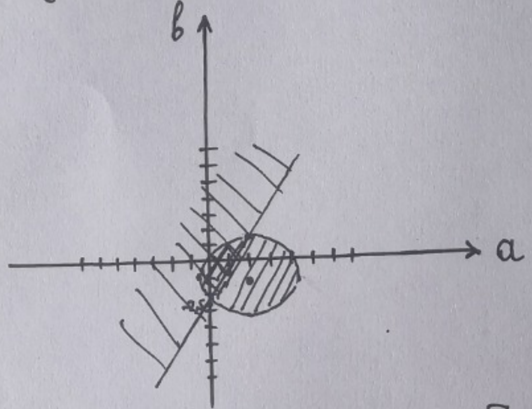
$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\leq 5\\ a^2+b^2\leq \min(4a-2b,\ 5)\end{cases}$$

Найдём мн-во решений второго нер-ва системы:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}4a-2b\leq 5\\ a^2+b^2\leq 4a-2b\end{cases}\\ \begin{cases}4a-2b>5\\ a^2+b^2\leq 5\end{cases}\end{array}\right.$$

I) $\begin{cases}4a-2b\leq 5\\ a^2+b^2\leq 4a-2b\end{cases}$ $\begin{cases}2b\geq 4a-5\\ a^2-4a+4-1+b^2+2b+1-1\leq 0\end{cases}$ $\begin{cases}b\geq 2a-2{,}5\\ (a-2)^2+(b+1)^2\leq 5\end{cases}$

Построим графики ур-ий $b=2a-2{,}5$ и $(a-2)^2+(b+1)^2=5$ в системе координат aOb:



$(a-2)^2+(b+1)^2=5$ - окр-ть с центром $O(2;-1)$ и $R=\sqrt5$

Найдём точки пересечения прямой $b=2a-2{,}5$ с окр-тью $(a-2)^2+(b+1)^2=5$:

$(a-2)^2+(2a-2{,}5+1)^2=5$

$(2a-1{,}5)^2+(a-2)^2-5=0$

$4a^2-6a+2{,}25+a^2-4a+4-5=0$

$5a^2-10a+1{,}25=0 \;|:5$

$a^2-2a+0{,}25=0$

$D=4-4\cdot 0{,}25=3$

1) $a=\frac{2-\sqrt3}{2}=1-\frac{\sqrt3}{2}$

$b=2-\sqrt3-2{,}5=-0{,}5-\sqrt3$

2) $a=\frac{2+\sqrt3}{2}=1+\frac{\sqrt3}{2}$

$b=2+\sqrt3-2{,}5=-0{,}5+\sqrt3$

Решение системы нер-в показано на рисунке двойной штриховкой.

Решение системы $a\in(2-\sqrt5;\ 1+\frac{\sqrt3}{2})$

Тогда $a\in(2-R;\ 1+\frac{\sqrt3}{2}) \Leftrightarrow a\in(2-\sqrt5;\ 1+\frac{\sqrt3}{2})$

Сравним числа $\sqrt5-1$ и $\sqrt3-0{,}5$:

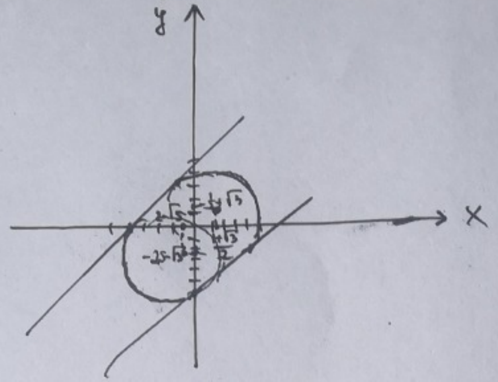
$\sqrt5-1 \vee \sqrt3-0{,}5 \Leftrightarrow \sqrt5-0{,}5\vee\sqrt3 \Leftrightarrow 5-\sqrt5+0{,}25\vee 3 \Leftrightarrow 2{,}25\vee\sqrt5 \Leftrightarrow 5{,}0625\vee 5$, где $5{,}0625>5 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt5-1>\sqrt3-0{,}5 \Rightarrow b\in(-0{,}5-\sqrt3;\ -0{,}5+\sqrt3)$

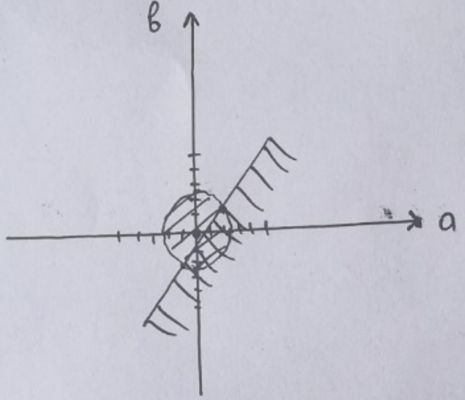
Чистовик

Математика
11 класс
Вариант 18

Ур-е $(x-a)^2+(y-b)^2=5$ – окр-ть с $O(a;b)$ и $R=\sqrt{5}$ => решением мн-ва таких неравенств при найденных $(a;b)$ будет прямоугольник с противоположно выпуклыми сторонами (см. рисунок):



II) $\begin{cases} 4a-2b\geq 5 \\ a^2+b^2\leq 5 \end{cases}$ $\begin{cases} b\leq 2a-2,5 \\ a^2+b^2\leq 5 \end{cases}$



Найдём точки пересечения $a^2+b^2=5$ с $b=2a-2,5$

$a^2+(2a-2,5)^2=5$

$a^2+4a^2-10a+6,25-5=0$

$5a^2-10a+1,25=0 \quad |:5$

$a^2-2a+0,25=0$

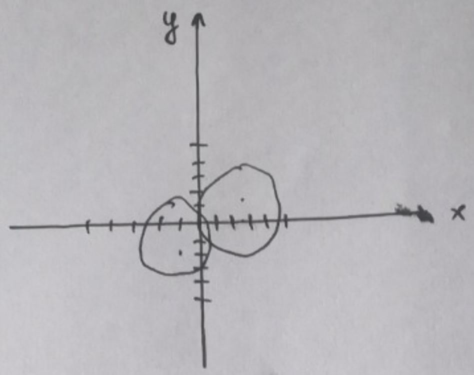
$\left[\begin{array}{l} (1-\frac{\sqrt{3}}{2}; -0,5-\sqrt{3}) \\ (1+\frac{\sqrt{3}}{2}; -0,5+\sqrt{3}) \end{array}\right.$

Тогда $a\in(1-\frac{\sqrt{3}}{2}; \sqrt{5})$, $b\in(-0,5-\sqrt{3}; -0,5+\sqrt{3})$

Тогда решением мн-ва неравенств $(x-a)^2+(y-b)^2\leq 5$ при найденных $(a;b)$ будет прямоугольник с противоположно выпуклыми сторонами.

Математика
11 класс
Вариант 18

Чистовик



4

Часть 2

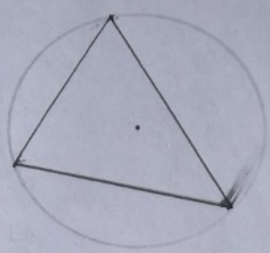
Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

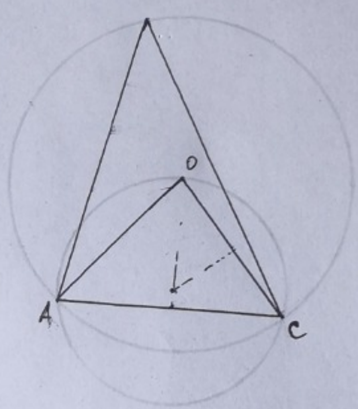
Шифр: **21103514**

ID профиля: **363574**

Вариант 18

Черновик





Черновик

a b c

$a+b+c=$

$a+b-c = 2a - a+1 = a+1$

$\log_{\sqrt{a}} b \cdot \log_b c^2 \cdot \log_c a =$

$= \log_c b \cdot \log_c c^2 \cdot \log_{\sqrt{a}} a = 4$

$\cancel{x \cdot x}$

$x \cdot x(x-1) = 4$

$\cancel{x^2}\ x^2$

$x^2(x-1) = 4$

$x^3 - x^2 - 4 = 0$

	1	−1	0	−4
2	1	1	2	0

$(x-2)(\underbrace{x^2+x+2}_{D<0}) = 0$

$x = 2$

$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}} \frac{x}{3}+3$

$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}} (6x-14) - \log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}} \left(\frac{x}{3}+3\right) = 0$

$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}} \left(\frac{6x-14}{\frac{x}{3}+3}\right) = 0$

$\frac{14}{6} = \frac{7}{3}$

$6x = 15$

$x \neq \frac{5}{2}$ $\qquad x+3 \neq 3$

$\qquad x \neq -6$

$x+3>0$

Черновик

$$\begin{cases} НОД(a; b; c) = 15 \\ НОК(a; b; c) = 3^{15} \cdot 5^{18} \end{cases}$$

$a = 3^{\alpha} \cdot 5^{\beta}$

$b = 3^{\gamma} \cdot 5^{\varphi}$

$c = 3^{x} \cdot 5^{y}$

Пусть $\alpha \geq \gamma \geq x$

$\beta \geq \varphi \geq y$

z - НОК

$z = 3^{\alpha} \cdot 5^{\beta}$ $\alpha = 15$

$\beta = 18$

30 · 18

Т.к. ~~НОД~~ = 15

Пусть d - НОД(a; b; c), f - НОК(a; b; c)

~~d = 15 ⇒~~

т.к. ~~НОК (a;b;c)~~ f - сравнительно большое число, то представлено, как

а d = 15, то одно из чисел a, b, c

$a = 3 \cdot 5 \cdot$ ~~k~~

$b = 3^{15} \cdot 5 \cdot$ ~~k~~

$c = 3 \cdot 5^{18} \cdot 1$

$a = 3 \cdot 5$

$b = 3^{1 \ldots 15} \cdot 5^{1 \ldots 18}$

$c = 3^{1 \ldots 15} \cdot 5^{1 \ldots 18}$

~~2,2,2~~

$3 \cdot 15^{2} \cdot 18^{2}$

$b = 15 \cdot 18$

$c = 1$

$b = 15$

$b = 15 \cdot 18$ $\quad \frac{3^{15} \cdot 5^{18}}{15 \cdot 18}$

$c = 1 \cdot$ ~~...~~ 18

$\underline{15}$ $b =$ $\quad c = \frac{3^{15} \cdot 18}{5^{18} \cdot 13}$

$b = 14 \cdot 17$

$c = \underline{1} \cdot \underline{1}$

$b = 1 \cdot 1$

$c = 15 \cdot 18$

21103514 (U363574 M1299688)

$S_{APK} = \frac{1}{2} h \cdot AK = 6$ Черновик

$S_{CPK} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot KC = 5$

$h \cdot AK = 12$

$h \cdot KC = 10$

$\frac{AK}{KC} = \frac{6}{5}$

$tg \angle AKC = \frac{1}{2}$

$\angle AKC = 90° - \alpha = arcctg \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 90 - arcctg \frac{1}{2} = arcctg \frac{1}{2}$

$2\alpha = 2 arcctg \frac{1}{2}$

$180° - 2\alpha = \cancel{2\alpha}\ 180 - 2 arcctg \frac{1}{2} = -2 arcctg \frac{1}{2}$

$11 = \frac{1}{2} AP \cdot PC \cdot \sin(180° - 2\alpha) = AP \cdot PC \sin(90 - \alpha) \cos(90 + \alpha)$

$AB \cdot BC \cdot \sin\left(\cdot \frac{180° - 2\alpha}{2}\right)$

$AC = 6x + 5x = 11x$

$\frac{1}{2} \cdot h \cdot AC = 11$

$h \cdot AC = 22$

$h_1 \cdot AC = ?x$

$\frac{h}{h_1} = \frac{22}{x} \Rightarrow x = 22 \frac{h_1}{h}$

$BP \cdot BC = ?$

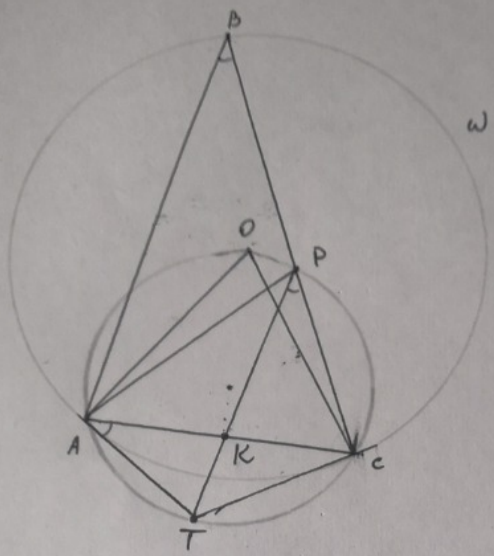
$BP(BP + PC)$

$BP \cdot PC + BP^2 = a$ $\quad \frac{PC}{BP} + 1 = \frac{a}{BP^2}$

21103514 (U363574 M1299688)

Чистовик

Математика
11 класс
Вариант 18



а) T лежит на окружности, описанной около $\triangle ABC$, т.к. $\angle OAT = \angle OCT = 90^\circ$, т.к. OA и OC – радиусы, проведённые в точку касания, откуда следует, что AOCT – впис-ый четырёхугольник. Пусть $\angle ATC = 2\alpha \Rightarrow \angle AOC = 180 - 2\alpha$, как противоположные углы во впис-м четырёхугольнике. $\angle AOC = \angle APC = 180^\circ - 2\alpha$, как впис-ые углы, опир-ся на 1 дугу. $\angle AOC = 180^\circ - 2\alpha$ и он явл-ся центральным, опир-ся на $\cup AC$, в окр-ти $\omega \Rightarrow \angle ABC = 90^\circ - \alpha$. $\angle TPC = \angle TAC$, как впис-ые углы, опир-ся на 1 дугу. $\angle TAC$ – угол между хордой AC и кас-ой $AT \Rightarrow \angle TAC = \angle ABC \Rightarrow \angle ABC = \angle TPC$. $\angle ABC = \angle TPC$, $\angle C$ – общий у тр-в ABC и KPC $\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle KPC \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{KPC}} = \left(\frac{AC}{KC}\right)^2$.

$\frac{S_{APK}}{S_{KPC}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot h \cdot AK}{\frac{1}{2} \cdot h \cdot KC} = \frac{AK}{KC} = \frac{6}{5}$. Пусть $AK = x \Rightarrow KC = \frac{5x}{6}$. $AC = AK + KC = x + \frac{5x}{6} = \frac{11x}{6}$. $\frac{S_{ABC}}{S_{KPC}} = \left(\frac{11x \cdot 6}{6 \cdot 5x}\right)^2 = \left(\frac{11}{5}\right)^2 = \frac{121}{25} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{121}{25} S_{KPC} = \frac{121}{25} \cdot 5 = \frac{121}{5}$.

б)
$$\frac{S_{ABC}}{S_{KPC}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AC \cdot h_1}{\frac{1}{2} \cdot KC \cdot h} = \frac{AC}{KC} \cdot \frac{h_1}{h} = \frac{AC}{KC} \cdot \frac{11}{5} \Leftrightarrow \frac{AC}{KC} = \frac{11}{5}$$, тогда

$AC = \frac{11}{5} KC$

Чистовик

№5

Математика
11 класс
Вариант 18

$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)$, $\log_{6x-14}(x-1)^2$, $\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)$

Пусть $\frac{x}{3}+3=a$, $6x-14=b$, $x-1=c$:

$\log_{\sqrt{a}} b$, $\log_b c^2$, $\log_c a$

$\log_{\sqrt{a}} b \cdot \log_b c^2 \cdot \log_c a = \log_{\sqrt{a}} a \cdot \log_b b \cdot \log_c c^2 = 2 \cdot 1 \cdot 2 = 4$

По условию 2 из этих чисел равны, а третье меньше их на 1.

Пусть какие-то 2 равны α, а третье тогда $\alpha - 1$:

$\alpha \cdot \alpha \cdot (\alpha - 1) = 4$

$\alpha^3 - \alpha^2 - 4 = 0$

$(\alpha-2)(\underbrace{\alpha^2+\alpha+2}_{D<0}) = 0 \Rightarrow \alpha = 2$

Тогда достаточно решить каждое из следующих ур-ий на ОДЗ:

$$\left[\begin{array}{l} \log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)=2 \\ \log_{6x-14}(x-1)^2=2 \\ \log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)=2 \end{array}\right.$$

ОДЗ: $\begin{cases} 6x-14>0 \\ 6x-14\neq 1 \\ (x-1)^2>0 \\ x-1\neq 1 \\ \frac{x}{3}+3>0 \\ \sqrt{\frac{x}{3}+3}\neq 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x>\frac{7}{3} \\ x\neq\frac{5}{2} \\ x-1\neq 0 \\ x\neq 2 \\ x>-9 \\ \frac{x}{3}+3\neq 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x>\frac{7}{3} \\ x\neq\frac{5}{2} \\ x\neq 1 \\ x\neq 2 \\ x>-9 \\ x\neq -6 \end{cases}$ $\Leftrightarrow x\in\left(\frac{7}{3};\frac{5}{2}\right)\cup\left(\frac{5}{2};+\infty\right)$

① $\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)=2$

$\left(\sqrt{\frac{x}{3}+3}\right)^2 = 6x-14$

$\frac{x}{3}+3 = 6x-14 \quad /\cdot 3$

$x+9 = 18x-42$

$17x = 51$

$x=3$

② $\log_{6x-14}(x-1)^2=2$

$(6x-14)^2=(x-1)^2$

$(6x-14-x+1)(6x-14+x-1)=0$

$(5x-13)(7x-15)=0$

$\left[\begin{array}{l} x=\frac{13}{5} \\ x=\frac{15}{7} \text{ - пост. корень по ОДЗ, т.к. } \frac{15}{7}=2\frac{1}{7}<\frac{7}{3}=2\frac{1}{3} \end{array}\right.$

③ $\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)=2$

$(x-1)^2 = \frac{x}{3}+3 \quad /\cdot 3$

$3x^2-6x+3=x+9$

$3x^2-7x-6=0$

$D=49+4\cdot 6\cdot 3=49+72=121$

$\left[\begin{array}{l} x=\frac{7-11}{6}=-\frac{2}{3} \text{ - пост. корень по ОДЗ} \\ x=\frac{7+11}{6}=3 \end{array}\right.$

Ответ: $x=\frac{13}{5}; 3$.

Математика
11 класс
Вариант 12

Чистовик

№4

Т.к. НОД$(a;b;c)=15$, а НОК$(a;b;c)=3^{15}\cdot5^{18}$, то одно из чисел a, b, c должно равняться 15. Рассмотрим все возможные для других двух чисел:

① Если 1 из этих чисел равно $3^{15}\cdot5^{18}$, тогда другое число можно выбрать как произведение любой степени тройки от 1 до 15 на любую степень пятёрки от 1 до 18, т.е. всего вариантов: $2\cdot15\cdot18=540$.

② Если в 1 из этих чисел множитель 3^{15}, а в другом 5^{18}, тогда всего вариантов составить такие числа: $2\cdot18\cdot15=540$.

③ Всего вариантов $540+540=1080$

Такие рассуждения можно начать проделывать с любым из чисел a, b, c, значит всего вариантов: $3\cdot1080=3240$.

Ответ: 3240 троек.