Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103337**

ID профиля: **881126**

Вариант 18

1)

$a_7 = a_1 + 6d$ $\qquad a_1; a_2; a_3; \dots a_n \in \mathbb{Z} \Rightarrow a_1; d \in \mathbb{Z}$

$a_{12} = a_1 + 11d$

$a_9 = a_1 + 8d$

$a_{10} = a_1 + 9d$

$S_7 = \frac{a_1 + a_7}{2} \cdot 7 = \frac{a_1 + a_1 + 6d}{2} \cdot 7 = (a_1 + 3d)7 = 7a_1 + 21d$

$(a_1 + 6d)(a_1 + 11d) > 7a_1 + 21d + 20$

$a_1^2 + 17a_1d + 66d^2 > 7a_1 + 21d + 20$

$(a_1 + 8d)(a_1 + 9d) < 7a_1 + 21d + 44$

$a_1^2 + 17a_1d + 72d^2 < 7a_1 + 21d + 44$

$$\left.\begin{aligned} -a_1^2 - 17a_1d - 72d^2 &> -7a - 21d - 44 \\ a_1^2 + 17a_1d + 66d^2 &> 7a_1 + 21d + 20 \end{aligned}\right] +$$

$-6d^2 > -24$

$d^2 < \frac{24}{6}$; $d \in \mathbb{Z} \Rightarrow d^2 \leq 3 \Rightarrow d = \pm 1$

прогрессия возрастающая $\Rightarrow d > 0 \Rightarrow d = 1$.

$a_1^2 + 17a_1 + 66 > 7a_1 + 21 + 20$

$a^2 + 10a_1 + 25 > 0 \Rightarrow (a+5)^2 > 0 \Rightarrow a \neq -5$

$a_1^2 + 17a_1 + 72 < 7a_1 + 21 + 44$

$a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0 \Rightarrow a \in (-5 - 3\sqrt{2}; -5 + 3\sqrt{2})$; $a \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow a \in \{-9; -8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1\}$

$a \neq -5 \Rightarrow \boxed{a \in \{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1\}}$

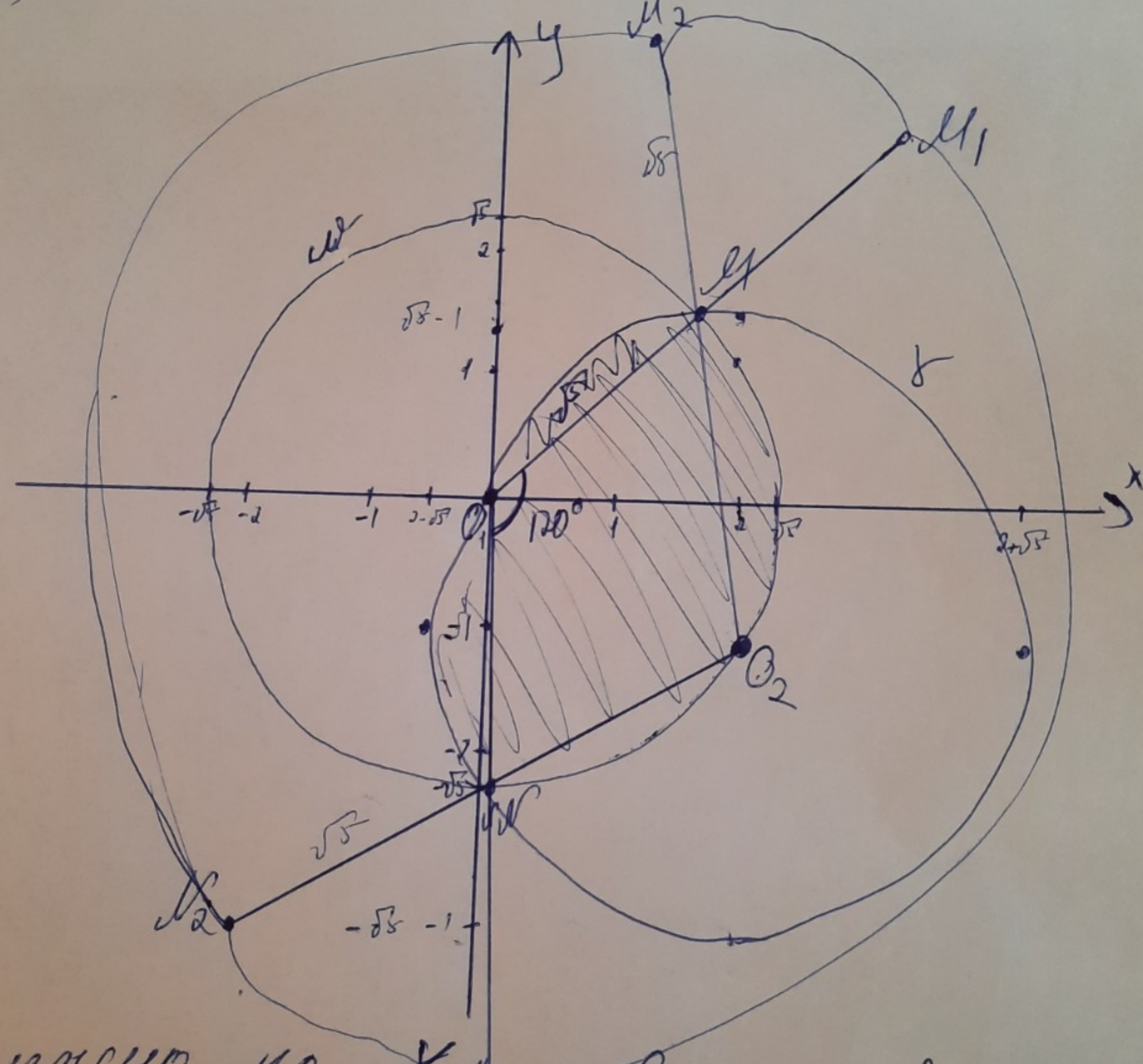
чистовик - 1

③ $\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 5 \\ a^2+b^2 \le \min(4a-2b; 5)\end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} a^2+b^2 \le 5 \\ a^2+b^2 \le 4a-2b \Rightarrow (a-2)^2+(b+1)^2 \le 5 \end{array}\right.$

(круг ω) $a^2+b^2 \le 5$ – это круг с центром $(0;0)$ $(r=\sqrt{5})$

(круг γ) $a^2+b^2 \le 4a-2b$ – это круг с центром $(2;-1)$ $(r=\sqrt{5})$



O_1 лежит на γ, а O_2 на ω

нарисованный раздел чисел a и b

чистовик-2

Фигура M состоит из $\frac{1}{3}$ части окружности с центром O_1 и с радиусом $2\sqrt{5}$ и из $\frac{1}{3}$ части окружности с центром O_2 и радиусом $2\sqrt{5}$ ($\frac{1}{3}$ потому что $\angle NO_1M = \angle NO_2M = 120° = \frac{1}{3} \cdot 360°$)

~~Ромб O_1MO_2N считается дважды поэтому мы должны будем сделать~~

Ромб O_1MO_2N считается дважды поэтому будем вычесть $S_{O_1MO_2N} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$

Ещё M фигура состоит из $\frac{1}{6}$ частей окружностей с центрами M и N и с радиусами $\sqrt{5}$.

$$S_M = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2\sqrt{5}^2 + 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot \sqrt{5}^2 - \frac{5\sqrt{3}}{2} =$$

$$= \frac{40\pi}{3} + \frac{10\pi}{6} - \frac{5\sqrt{3}}{2} = \boxed{15\pi - \frac{5\sqrt{3}}{2}}$$

чистовик – 3

21103337 (U881126 M1296801)

① $(a+6d)(a+11d) > \frac{a+a+6d}{2}\cdot 7+20$

$(a+8d)(a+9d) < \frac{a+a+6d}{2}\cdot 7+44$

$a^2+17ad+66d^2 > 7a+21d+20$

$-a^2-17ad-72d^2 > -7a-21d-44$

$-6d^2 > -22$

$d^2 < \frac{22}{6}$

$66-41=25$

$d^2 < 3$

$d=1$

$a^2+17a+66 > 7a+21+20$

$a^2+10a+25>0$

$(a+5)^2>0$

$a \neq -5$

$a^2+17a+72 < 7a+21+44$

$a^2+10a+7<0$

$a\in[-9;1]$

$a\in[-9;-5)\cup(-5;-1]$

$-9,-8,-7,-6,-4,-3,-2,-1$

$8,5$

$72-65=7$

$8,\ldots$

$100-28=72$

$\frac{-10-\sqrt{72}}{2}$

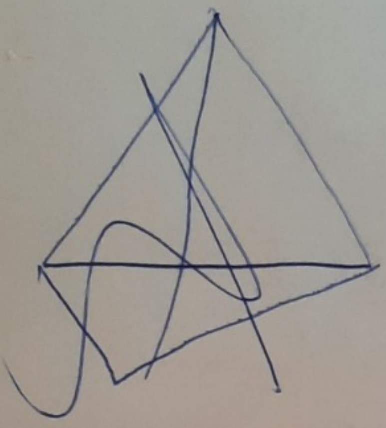
$\frac{-10+\sqrt{72}}{2}$

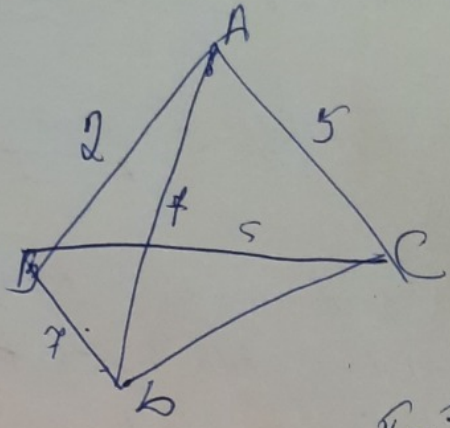
$6\sqrt{2}$

$-9,\ldots 1\ldots$

$-10 \quad -9 \quad -1 \quad 0 \quad 1$

черновик





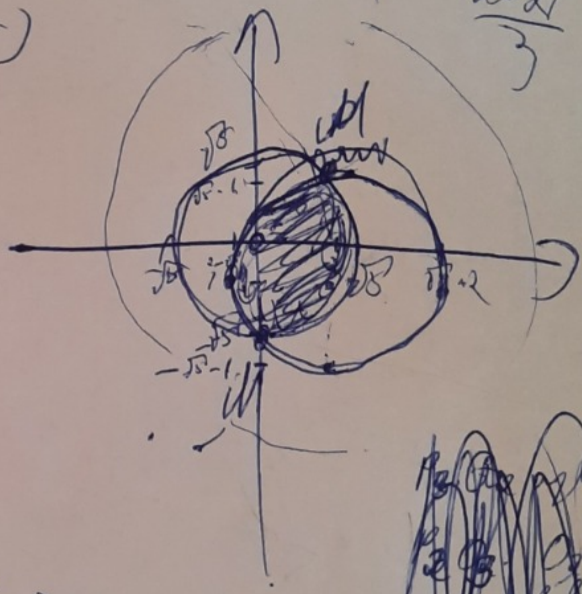
$\frac{\pi r^2}{3} = \frac{8\pi}{3}$

$\frac{26\pi}{3}$

$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 8$

$a^2+b^2 \le \min(4a-2b; 5)$

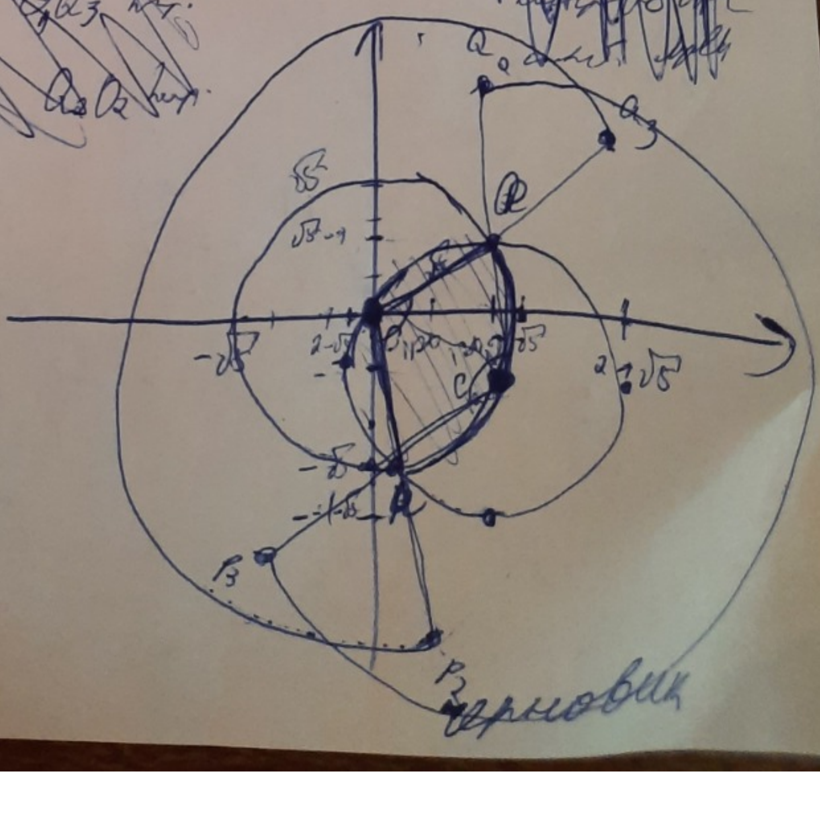
$a^2+b^2 \le 5$



$a^2+b^2 \le 4a-2b$

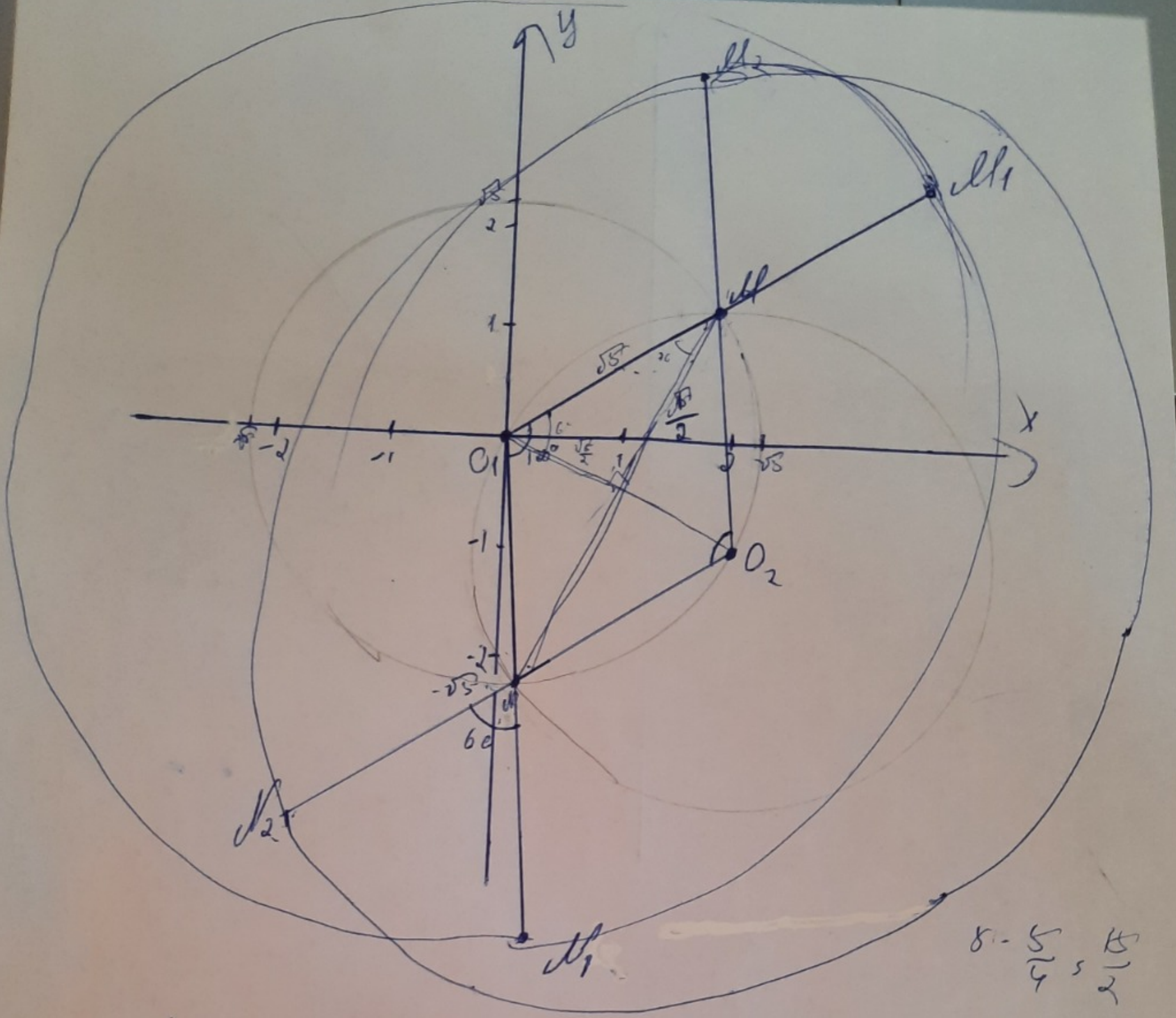
$(a-2)^2+(b+1)^2 \le 5$

$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 5$



$(x-2)^2+(y+1)^2 \le 8$

черновик



$8 \cdot \frac{5}{4} = \frac{15}{2}$

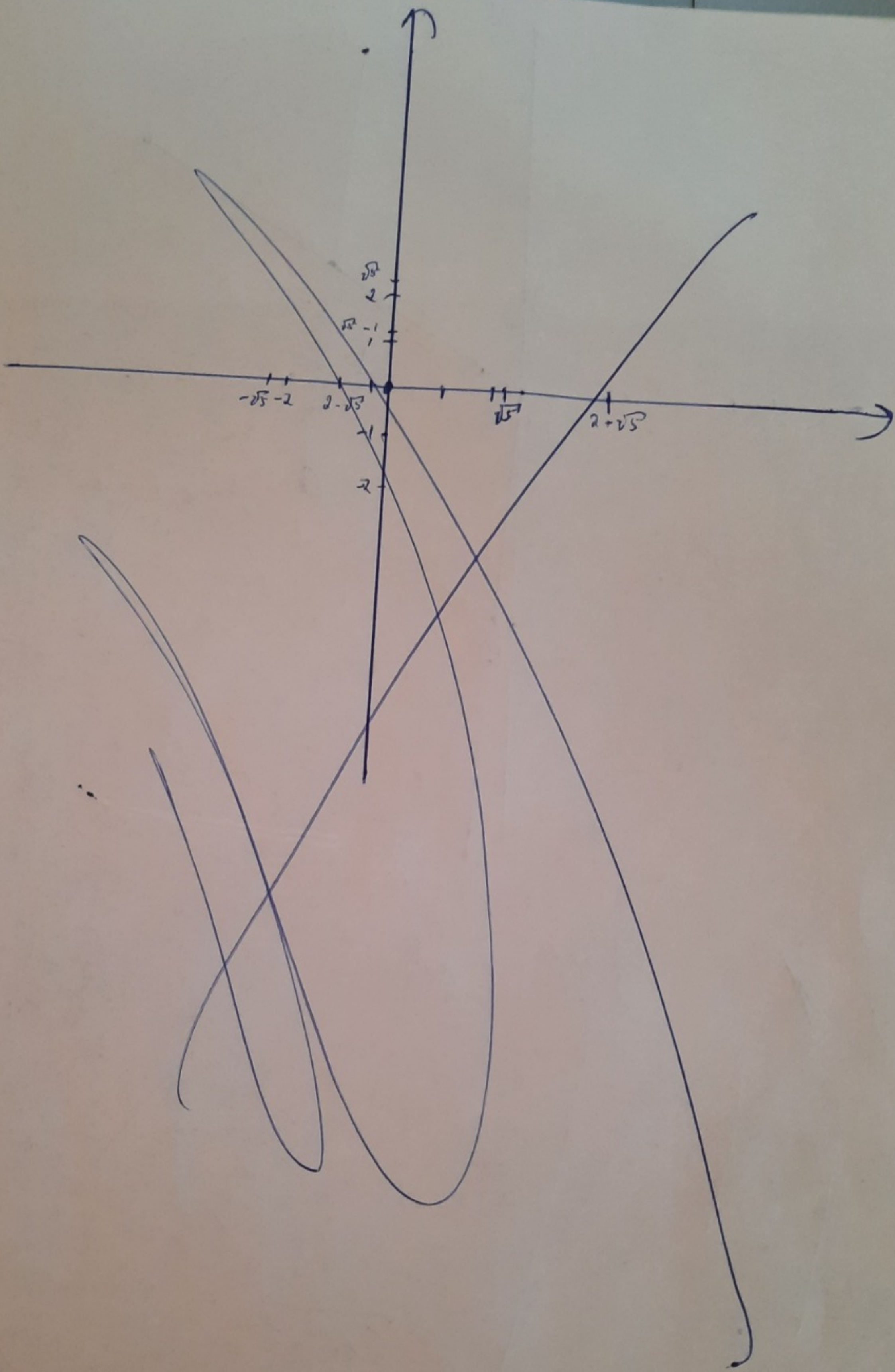
$2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot 20 = \frac{80\pi}{3}$

$2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot 5 = \frac{10\pi}{6}$

$\frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{\sqrt{15}}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} = \sqrt{75} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$

2) $\frac{80\pi}{3} - \frac{10\pi}{6} = \frac{150\pi}{6} = \frac{50\pi}{2} = 25\pi$

черновик



чернови

$2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 20 = \frac{40\pi}{3}$ $\quad$ ${}^{2/}\frac{40\pi}{3} + \frac{10\pi}{6} = \frac{90\pi}{6} = 15\pi$

$2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot 5 = \frac{10\pi}{6}$ $\quad$ $15\pi - \frac{5\sqrt{3}}{2}$

черновик

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103337**

ID профиля: **881126**

Вариант 18

(4) $\begin{cases} НОД(a;b;c)=15 \\ НОК(a;b;c)=3^{15}\cdot5^{18} \end{cases}$

Числа a;b;c состоят только из множителей 3 и 5. Есть по меньшей мере одно число который делится на 3^1 и не делится на 3^2, в других случае $НОД(a;b;c)=15\cdot3$. Если один из чисел делиться на 5^1 и не делится на 5^2 по той же логике.

Сумма экспонентов числа 3 в a;b;c равна 15 а сумма экспонентов числа 5 равна 18.

$5\ a\begin{cases} 3^1 & 3^2 & 3^{12} \\ 3^1 & 3^3 & 3^{11} \\ 3^1 & 3^4 & 3^{10} \\ 3^1 & 3^5 & 3^9 \\ 3^1 & 3^6 & 3^8 \end{cases}$

$7\ b\begin{cases} 5^1 & 5^2 & 5^{15} \\ 5^1 & 5^3 & 5^{14} \\ 5^1 & 5^4 & 5^{13} \\ 5^1 & 5^5 & 5^{12} \\ 5^1 & 5^6 & 5^{11} \\ 5^1 & 5^7 & 5^{10} \\ 5^1 & 5^8 & 5^9 \end{cases}$

$2\ c\begin{cases} 3^1 & 3^1 & 3^{13} \\ 3^1 & 3^7 & 3^7 \end{cases}$

$1\ d\{5^1\ \ 5^1\ \ 5^{16}$

Если выбрать комбинацию экспонентов 3 из отмеченых 5 троек(a) и комбинацию экспонентов 5 из отмеченых 7 троек(b) будет $5\cdot7\cdot6\cdot6$ троек a;b;c, где 6 это комбинации для $3^m; 3^k; 3^l$
$5^r; 5^s; 5^t$

$3^m\cdot5^r, 3^k\cdot5^s; 3^l\cdot5^t$
$3^m\cdot5^r, 3^k\cdot5^t; 3^l\cdot5^s$
$3^m\cdot5^s; 3^k\cdot5^r; 3^l\cdot5^t$

$3^m\cdot5^s; 3^k\cdot5^t; 3^l\cdot5^r$
$3^m\cdot5^t; 3^k\cdot5^s; 3^l\cdot5^r$
$3^m\cdot5^t; 3^k\cdot5^r; 3^l\cdot5^s$

чистовик – 1

А нужно 6 это для того чтобы считать все комбинации $(a;b;c), (a;c;b); (b;c;a), (b;a;c); (c;a;b), (c;b;a)$

Сейчас считаем комбинации c и b.

3^{1} 3^{1} 3^{13}

5^{-1} 5^{-2} 5^{-15}

$\begin{cases} 5^{-1}\cdot 3^{1} \\ 5^{-2}\cdot 3^{1} \\ 5^{-15}\cdot 3^{13} \end{cases}$ $\begin{cases} 5^{-1}\cdot 3^{1} \\ 5^{-2}\cdot 3^{13} \\ 5^{-15}\cdot 3^{1} \end{cases}$ $\begin{cases} 5^{-1}\cdot 3^{13} \\ 5^{-2}\cdot 3^{1} \\ 5^{-15}\cdot 3^{1} \end{cases}$

есть три варианта для создавания троек a;b;c и для каждого 6 перестановок.

$2\cdot 7\cdot 3\cdot 6$

то же самое для a и d

$5\cdot 1\cdot 3\cdot 6$

для групп c и d.

3^{1} 3^{1} 3^{13}

5^{-1} 5^{1} 5^{-16}

$\begin{cases} 3^{1}\cdot 5^{-1} \\ 3^{1}\cdot 5^{-1} \\ 3^{13}\cdot 5^{-16} \end{cases}$ $\begin{cases} 3^{1}\cdot 5^{-1} \\ 3^{1}\cdot 5^{-16} \\ 3^{13}\cdot 5^{-1} \end{cases}$

$\downarrow$ $\downarrow$

a ; a; b

a ; b ; a

b; a ; a

$\Downarrow$

3 перестановки

6 перестановки

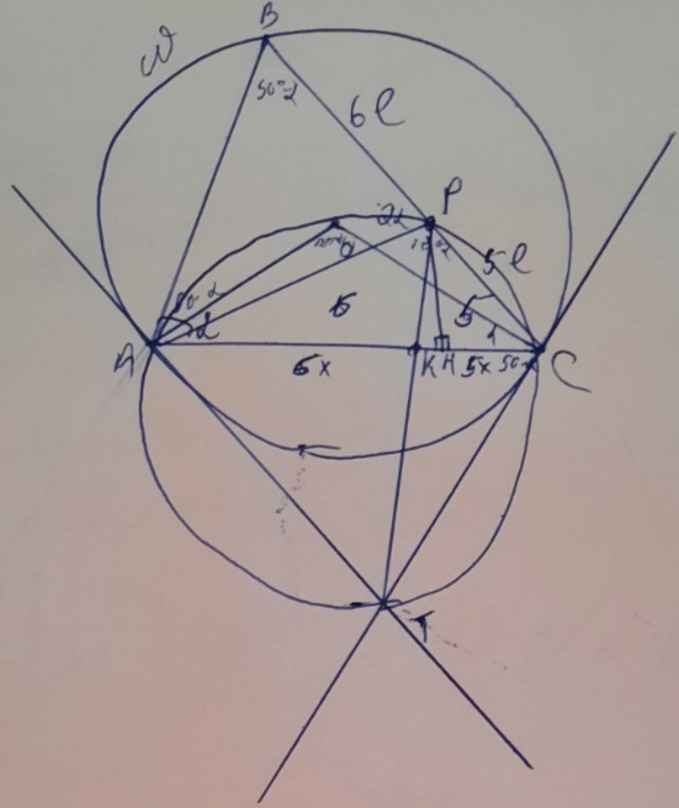
$c=2$ $d=1$

$2\cdot(3+6)=2\cdot 9$

$5\cdot 7\cdot 6\cdot 6+2\cdot 7\cdot 3\cdot 6+5\cdot 1\cdot 3\cdot 6+2\cdot 9=1620$

чистовик-2

⑥ а)



$\angle OAT + \angle OCT = 180° \Rightarrow A; O; C; T$ лежат на одной окружности.

$\angle OAC = \angle OCA = \alpha \Rightarrow \angle AOC = 180° - 2\alpha \Rightarrow \angle B = 90° - \alpha$

$\angle APC = \angle AOC = 180° - 2\alpha \Rightarrow \angle APB = 2\alpha \Rightarrow \angle BAP = 180° - 2\alpha -$

$- (90° - \alpha) = 90° - \alpha$

$\angle ACP = 90° - \alpha = \angle APT = \angle BAP \Rightarrow BA \parallel PT$

$S_{APK} = \frac{PH \cdot AK}{2} = 6 \quad S_{PKC} = \frac{PH \cdot KC}{2} = 5 \Rightarrow \frac{CK}{AK} = \frac{5}{6} = \frac{PC}{PB}$

$S_{APC} = \frac{11x \cdot 5\ell \cdot \sin\angle ACP}{2} = 11$

$S_{ABC} = \frac{11x \cdot 11\ell \cdot \sin\angle ACP}{2} = S_{APC} \cdot \frac{11}{5} = \frac{121}{5}$ см^2

чистовик-3

21103337 (U881126 M1296802)

⑤ $\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)\cdot\log_{(6x-14)}(x-1)^2\cdot\log_{x-1}(\frac{x}{3}+3)=$

$=4\cdot\log_{(\frac{x}{3}+3)}(6x-14)\cdot\log_{(6x-14)}(x-1)\cdot\log_{(x-1)}(\frac{x}{3}+3)=$

$=4\cdot\frac{\cancel{\log_{(x-1)}(6x-14)}}{\cancel{\log_{(x-1)}(\frac{x}{3}+3)}}\cdot\cancel{\log_{(6x-4)}(x-1)}\cdot\cancel{\log_{(x-1)}(\frac{x}{3}+3)}=$

$=4=m\cdot m\cdot(m-1)$

$m^3-m^2-4=0$

$m=2$ решение

$$\begin{array}{r|l} m^3-m^2-4 & m-2 \\ m^3-2m^2 & \hline m^2+m+2 \\ \hline m^2-4 & \\ -m^2-4 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$\Rightarrow D<0\Rightarrow\varnothing$

только $m=2$

$\begin{cases}2\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)=2\\ 2\log_{(6x-14)}(x-1)=2\end{cases}$

$6x-14=\frac{x}{3}+3=x-1$

$6x-14=x-1\quad x=\frac{13}{5}$

$\frac{13}{15}+3\neq\frac{8}{5}\Rightarrow\varnothing$

$\begin{cases}2\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)=2\\ 2\log_{(6x-14)}(x-1)=1\\ \log_{(x-1)}(\frac{x}{3}+3)=2\end{cases}$

$\frac{x}{3}+3=6x-14\Rightarrow x=\frac{35}{7}=5$

$\log_{16}4=\frac{1}{2}\Rightarrow$ правильно

$\log_{4}4=2\Rightarrow$ ~~правильно~~

~~$x=3$ решение~~

чистовик – 4

$3^1 \cdot 3^2 \cdot 3^{12}$

$\cancel{5^1 \cdot 5^2}$

$3^1 \cdot 3^3 \cdot 3^{11}$

$3^1 \cdot 3^4 \cdot 3^{10}$

$3^1 \cdot 3$

5

1	2	12
1	3	11
1	4	10
1	5	9
1	6	8
1	7	7
1	1	13

7

1	2	15
1	3	14
1	4	13
1	5	12
1	6	11
1	7	10
1	8	9
1	1	16

$5 \cdot 7 \cdot 6 + 5 \cdot 3 + 2 \cdot 7 \cdot 3 + 25$ 269

$5^1 \cdot 3^1$

$5^1 \cdot 3^2$

$5^{16} \cdot 3^{12}$

$3^1 \cdot \cdot$

3^1 3^1 3^{13}

3^1 3^2 3^{12}

3^1 3 3^{11}

5

Если

3

1	1	13
1	2	12
1	3	11
1	4	10
1	5	9
1	6	8
1	7	7

5

1	1	16
1	2	15
1	3	14
1	4	13
1	5	12
1	6	11
1	7	10
1	8	9

7

99

$5 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 6$ $5 \cdot 3 \cdot 6$ $2 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 6 + 29$

черновик

21103337 (U881126 M1296802)

$3^1 \cdot$ 3^1 a^{13} 77 7

3^2 a^{12}

5^1 5^1 5^{-16} 8

~~3^1 3^2 3^{17}~~

3^1 3^2 3^{12} 6 $6 \cdot 7 \cdot 3 = 42 \cdot 3$

5^1 5^2 5^{15} 7 $= 126$

$3^1 \cdot$ 3^1 3^{13} 2

5^1 5^1 5^{-15} 142

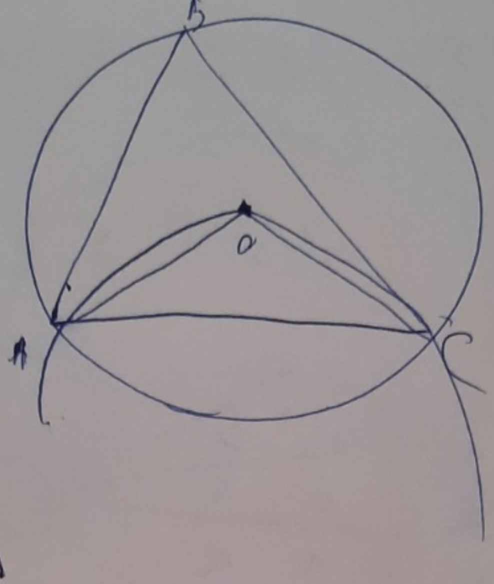
3^1 3^1 3^{13} ~~$7 \cdot 2 = 14$~~

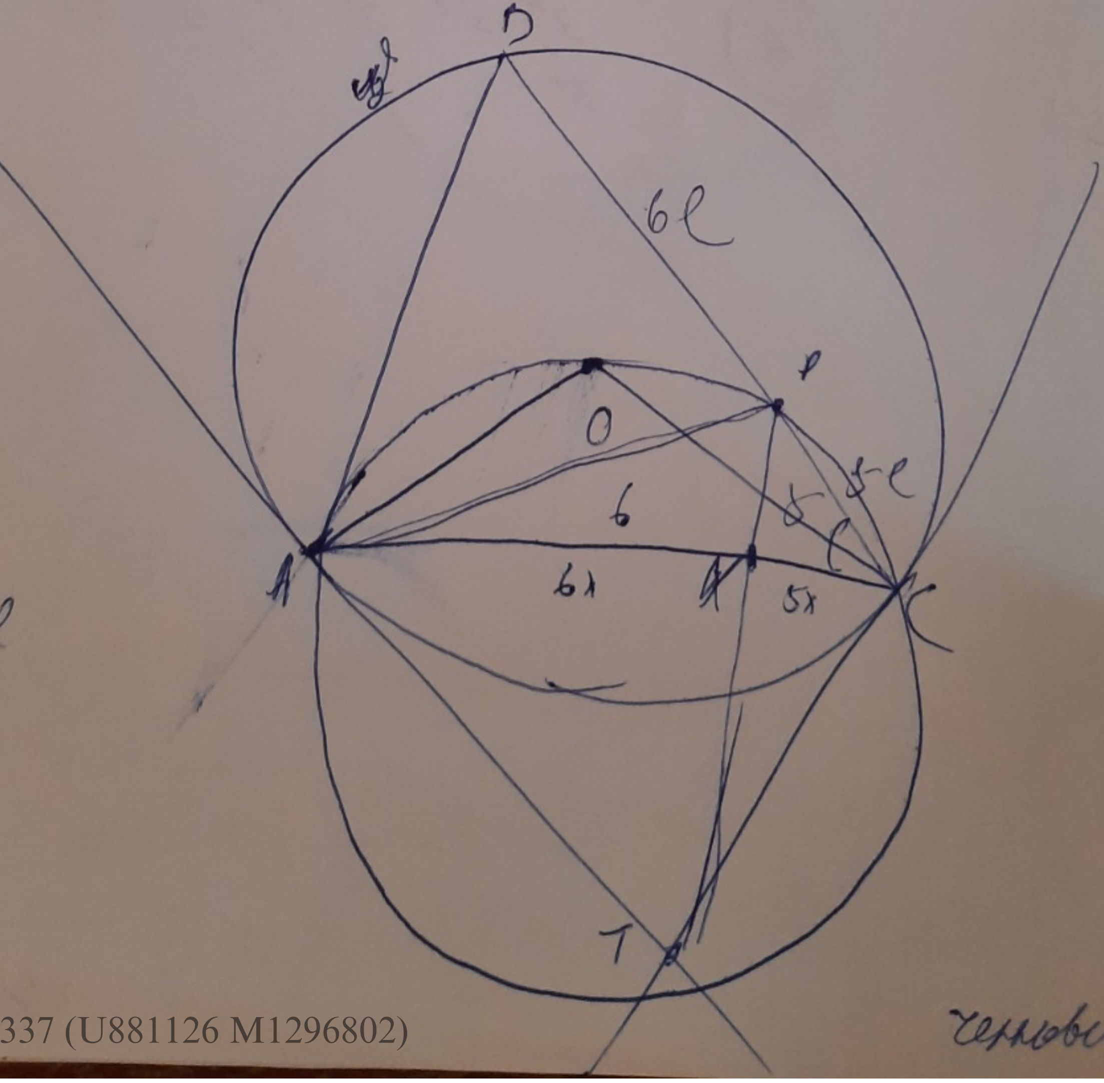
5^1 5^{-2} 5^{-12}

$\begin{cases} 3^1 \cdot 5^{-1} \\ 3^1 \cdot 5^{-2} \\ 3^{13} \cdot 5^{-12} \end{cases}$ $\begin{cases} 3^1 \cdot 5^1 \\ 3^1 \cdot 5^{-12} \\ 3^{13} \cdot 5^{-2} \end{cases}$ $\begin{cases} 3^1 \cdot 5^{-2} \\ 3^1 5^{-12} \\ 3^{13} \cdot 5^{-1} \end{cases}$ 3

21103337 (U881126 M1296802)

черновик





$$\frac{55\times l}{2}$$

$$\frac{121\times l}{2}$$

21103337 (U881126 M1296802)

черновик

1 1 16

1 2 12

3

$\begin{cases} 5^{-1} \cdot 3^{1} \\ 5^{-1} \cdot 3^{2} \\ 5^{-16} \cdot 3^{12} \end{cases}$ $\begin{cases} 5^{-1} \cdot 3^{1} \\ 5^{-1} \cdot 3^{12} \\ 5^{-16} \cdot 3^{2} \end{cases}$ $\begin{cases} 5^{-1} \cdot 3^{?} \\ 5^{-1} \cdot 3^{4} \\ 5^{-16} \cdot 3^{1} \end{cases}$

1 1 16 $3^{1} \cdot 5^{-1}$ $3^{1} \cdot 5^{-13}$ $\cancel{3^{16} \cdot 5^{-1}}$

1 1 13

$\begin{cases} 3^{1} \cdot 5^{-1} \\ 3^{1} \cdot 5^{-1} \\ 3^{13} \cdot 5^{-16} \end{cases}$

a a b

a b a

b a a

3

$\begin{cases} 3^{1} \cdot 5^{-16} \\ 3^{1} \cdot 5^{-1} \\ 3^{13} \cdot 5^{-1} \end{cases}$

6

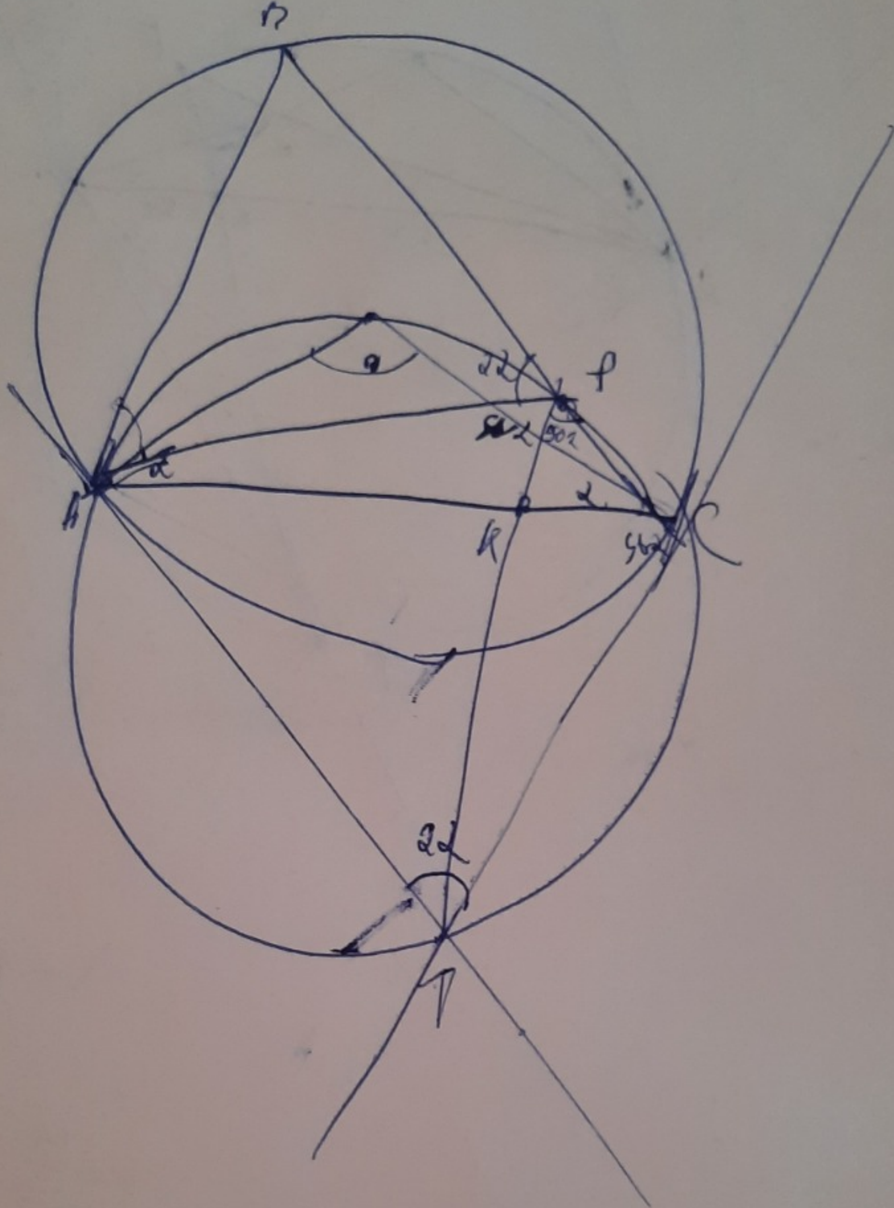
$3^{m} \cdot 5^{-z}, 3^{k} \cdot 5^{-3}, 3^{e} \cdot 5^{-t}$

$3^{m} \cdot 5^{-z}, 3^{4} \cdot 5^{t}, 3^{e} \cdot 5^{s}$

3^{m}

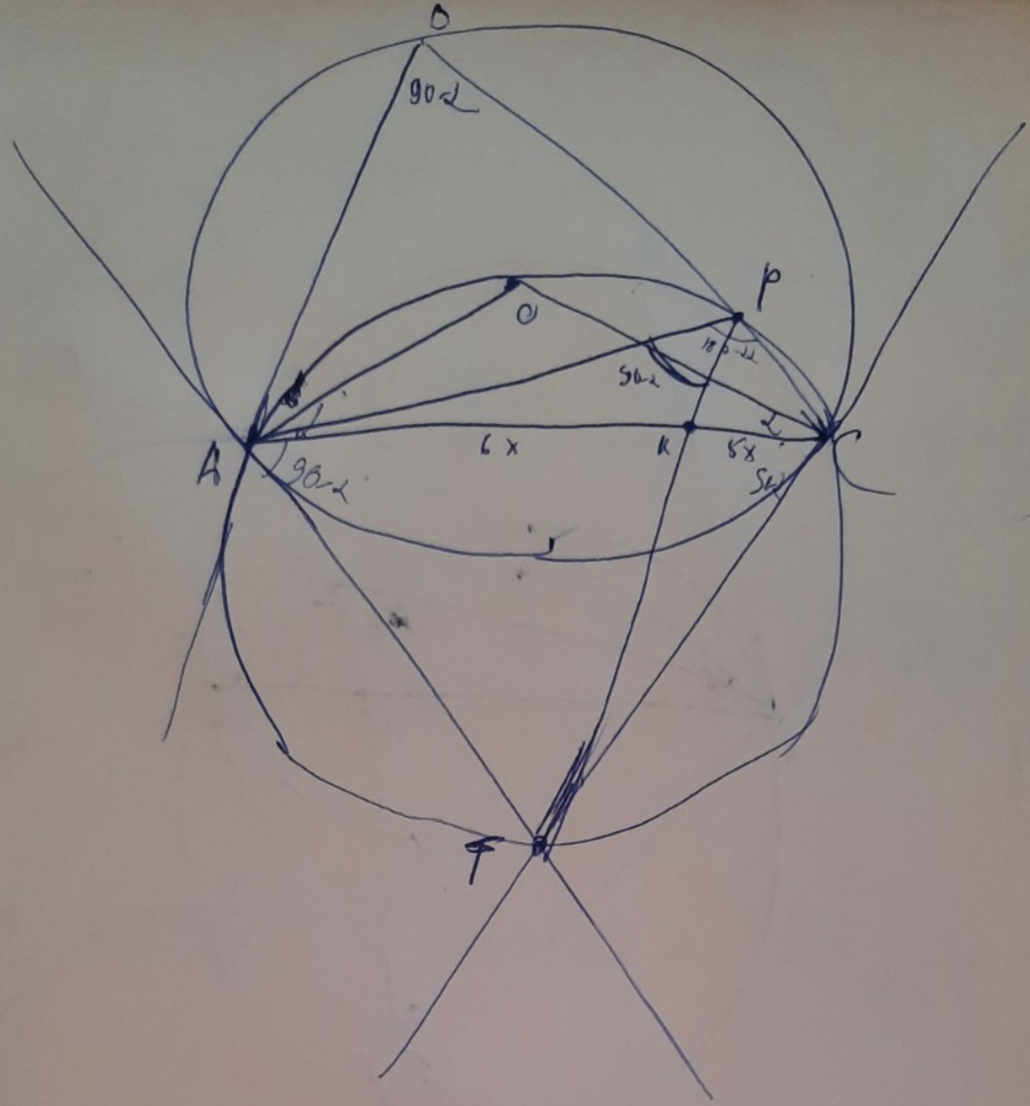
черновик

21103337 (U881126 M1296802)



21103337 (U881126 M1296802)

черновик



21103337 (U881126 M1296802)

черновик

$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)\cdot\log_{(6x-14)}(x-1)^2\cdot\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)=$

$=\cancel{\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-4)}$

$=\cancel{2\cdot2\cdot\log}$

$=4\cdot\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)\cdot\log_{(6x-14)}(x-1)\cdot\log_{(x-1)}\left(\frac{x}{3}+3\right)=$

$=4\cdot\frac{\log_{x-1}(6x-14)}{\log_{(x-1)}\left(\frac{x}{3}+3\right)}\cdot\log_{(6x-4)}(x-1)\cdot\log=$

$=4$

$m\cdot m\cdot(m-1)=m^2(m-1)=m^3-m^2=4$

$m^2($

$6x-14=x-1$

$5x=13$

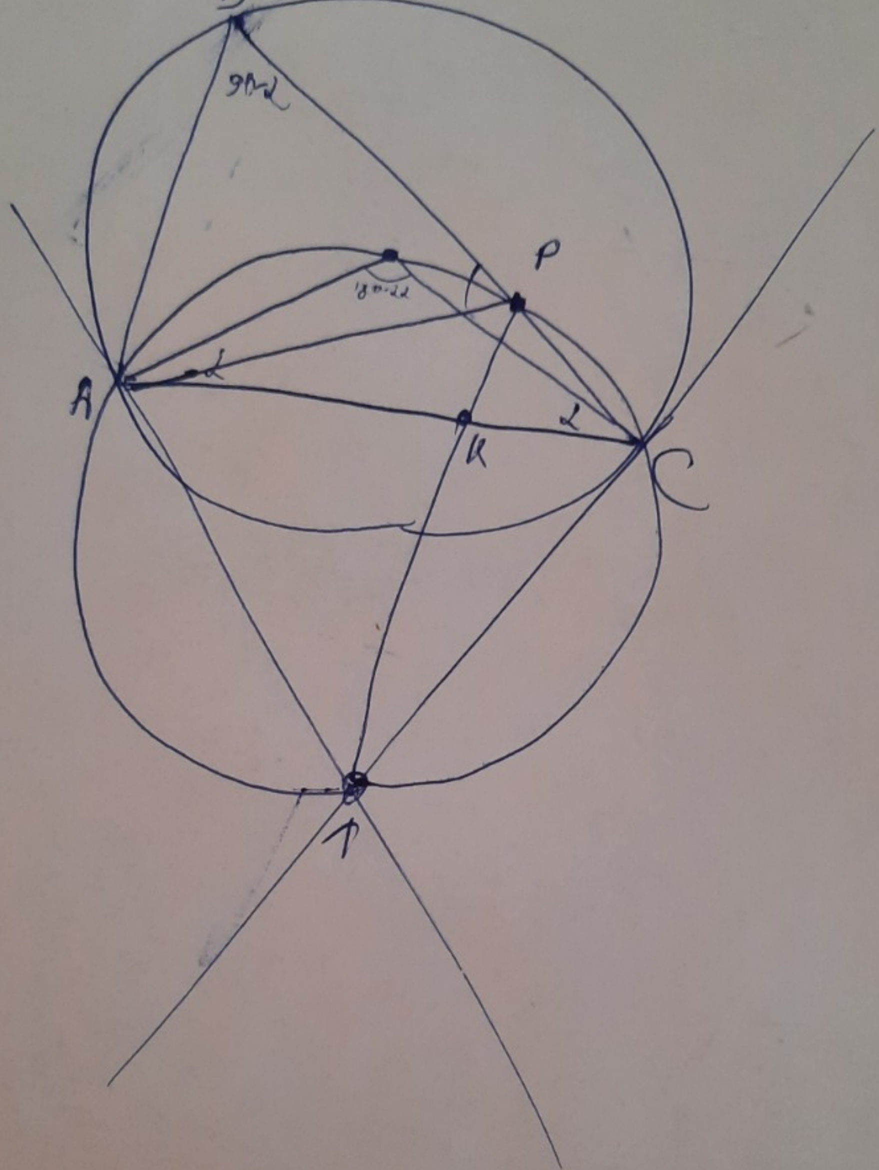
$x=\frac{13}{5}$ $\frac{8}{5}$

$x+9=18x-12$ $x+9=18x-42$

$17x=9+12=21$ $17x=42-9=38$

$x=\frac{21}{7}$

черновик



черновик