Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103332**

ID профиля: **112412**

Вариант 18

[redacted]

лист

Чистовик №1.

№1.

Пусть разность $= b$.

$S = 7a_1 + 21b$.

$$\begin{cases} a_7 \cdot a_{12} = (a_1+6b)(a_1+11b) > 7a_1 + 21b + 20 \\ a_9 \cdot a_{10} = (a_1+8b)(a_1+9b) < 7a_1 + 21b + 44 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 17a_1 b + 66b^2 - 7a_1 - 21b - 20 > 0 \quad (1) \\ a_1^2 + 17a_1 b + 72b^2 - 7a_1 - 21b - 44 < 0 \quad (2) \end{cases}$$

Вычтем из 2 1:

$a_1^2 - a_1^2 + 17a_1b - 17a_1b + (72-66)b^2 - 7a + 7a - 21b + 21b - 44 + 2$

$6b^2 - 24 < 0$. b (по усл.) > 0, значит

$0 < b < 2$. Значит $b = 1$. (т.к. оно целое)

Подставим $b = 1$ в систему:

$$\begin{cases} a_1^2 + 17a_1 + 66 - 7a_1 - 21 - 20 > 0 \\ a_1^2 + 17a_1 + 72 - 7a_1 - 21 - 44 < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} (a_1+5)^2 > 0 \\ (a_1+5)^2 - 18 < 0 \end{cases}$$

21103332 (U112412 M1300103)

$\{ a+5$

лист
Чистовик № 2

№ 1 (продолжение)

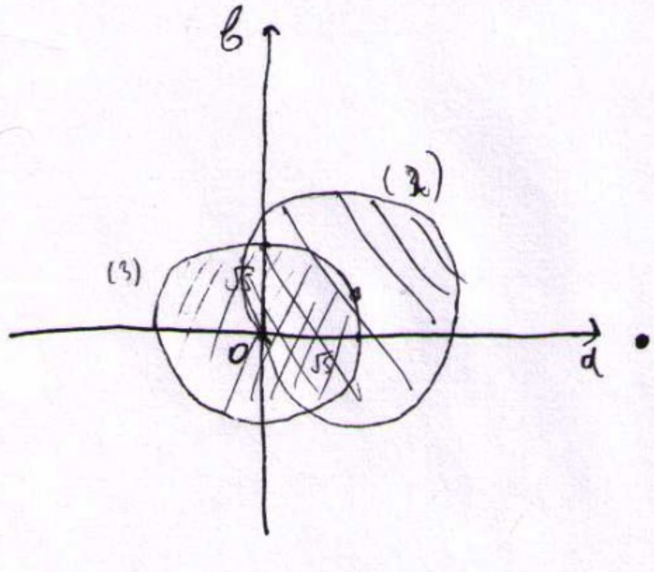
$\begin{cases} a_1 \neq -5 \\ (a_1+5)^2 < 18 \end{cases}$ $\begin{cases} a_1 \neq -5 \\ \begin{cases} a_1+5 < \sqrt{18} \\ a_1+5 > -\sqrt{18} \end{cases} \end{cases}$ $\begin{cases} a \neq -5 \\ a_1 < \sqrt{18}-5 \\ a_1 > -\sqrt{18}-5. \end{cases}$

Из целых a_1 подходят $-1, -2, -3, -4, -6, -7, -8, -9.$

Ответ: $-1, -2, -3, -4, -6, -7, -8, -9.$

~~№ 2~~ № 3.

Рассмотрим координаты



Система

$(a-x)^2+(b-y)^2 \leq 5$ (1)

$a^2+b^2 \leq 4a-2b$ (2)

$a^2+b^2 \leq 5$ (3)

(2 и 3 в системе дают второе неравенство из условия).

2: $(a-2)^2+(b+1)^2 \leq 5$

21103332 (U112412-M1300103)

ЛМ

Чистовик, лист

№ 3 (продолжение)

Перефразируем условие:

Найти все (x, y), такие, что существуют a, b, удовлетворяющие 2 и 3, такие, что выполнено 1.

Фигура пересечения 2 и 3 имеет вид

Нам нужно, чтобы ~~окружность~~ круг с центром x, y и $R = \sqrt{5}$ пересекался (или касался) этой фи

Рассмотрим 4 случая: касается ~~(или пересека~~ $\breve{1}$, касается в т. A, касается $\breve{2}$, касается в B.

(случаи пересечения будут лежать в полученных границах).

В первом случае расстояние от $\breve{1}$ до центра (x, y) должно $= \sqrt{5}$. т.е. перпендикуляр к дуге $= \sqrt{5}$. т.е. ~~окр~~ отрезок $(x,y)\,O_1 = 2\sqrt{5}$, т.е. это ~~окр~~ дуга окружности с радиусом $2\sqrt{5}$ и центром O_1.

аналогично 3 случай: это дуга окр. с радиусом $2\sqrt{5}$ центром O_2. В случае 2 и 4 (x, y) должна быть удалена на от точек A и B соотв. на $R = \sqrt{5}$.

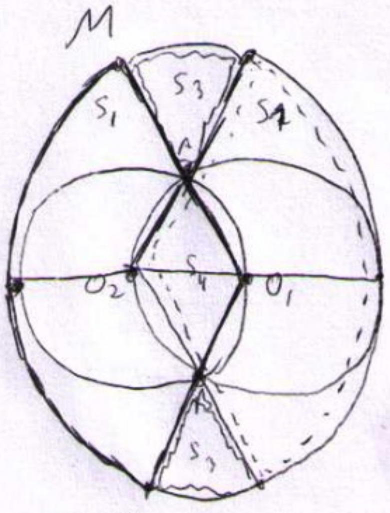
21103332 (U112412 M1300103)

т.е фигура имеет границы:

Чистовик. лист 4.

№3. продолжение.

имеет вид:



Площадь такой фигуры посчитать несложно:

$S_{общ} = S_1 + S_1 + S_3 + S_3 - S_4$ (ромб в центре).

т.к. угол $MOM_1 = 120^0$ (т.к. $\triangle O_2O_1A$ равносторонний)

то $S_1 = \frac{1}{3}\pi R^2$, где $R = 2\sqrt{5}$. $S_1 = \frac{\pi \cdot 20}{3}$

$S_3 = \frac{1}{6}\pi R^2$, где $R = \sqrt{5}$ $= \frac{5\pi}{6}$.

$S_4 = 2 \cdot S\ O_2AO_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2$, где a - сторона $O_2AO_1 = \sqrt{5}$.

$S_4 = \frac{5\sqrt{3}}{2}$.

$S_{общ} = 2 \cdot S_1 + 2 \cdot S_3 - S_4 = \frac{40\pi}{3} + \frac{5\pi}{3} - \frac{5\sqrt{3}}{2} =$

$15\pi - 2{,}5\sqrt{3}$.

Ответ: $15\pi - 2{,}5\sqrt{3}$.

21103332 (U112412 M1300103)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103332**

ID профиля: **112412**

Вариант 18

Чистовик. лист 1.

№4.

Раз НОД $(a,b,c) = 15$ и НОК $(a,b,c) = 3^{15}\cdot 5^{18}$, числа имеют вид $3^{a_1}\cdot 5^{b_1}$, $3^{a_2}\cdot 5^{b_2}$, $3^{a_3}\cdot 5^{b_3}$.

причем $\min(a_1, a_2, a_3) = 1$, $\min(b_1, b_2, b_3) = 1$

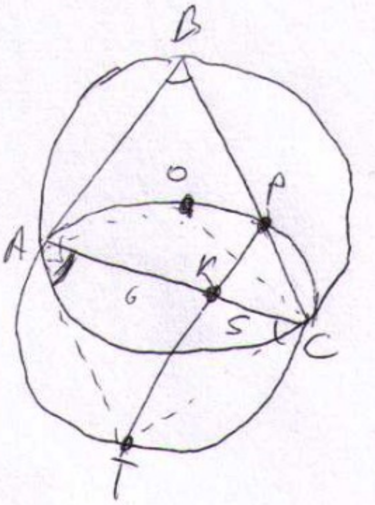
$\max(a_1, a_2, a_3) = 15$, $\max(b_1, b_2, b_3) = 18$.

Пусть в числах только 1 $a_n = 1$ и только 1 $a = 15$ тогда её мы можем выбрать 3-мя способами, $a_n = 15$ можем выбрать 2-мя, оставшуюся 13. значит кол-во способов выбрать а-шки при данном условии $= 13\cdot 2\cdot 3$.
Пусть в числах 2 $a_n = 1$. Тогда существует 3 способа выбрать а-шки. Пусти в числах 2 $a_n = 15$ также 3 способа. Сумма $= 84$

Теперь найдем кол-во способов выбрать b-шки. Аналогично а-шкам их $16\cdot 2\cdot 3 + 3 + 3 = 102$.
Значит числа можно выбрать $102\cdot 84$ способами.
Ответ: 8568 троек.

Чистовик. лист №2.

№ 6



Докажем, что T лежит на окр APC. четырехугольник $ABCT$ – вписанный, ведь у него сумма против. углов $=180^\circ$. Значит T лежит на окр.

$\triangle APK$ и PKC имеют общие высоты. Значит $AK : KC = 6:5$. Угол $APC = 180 - \angle ATC = 180 - (180 - \angle TAC - \angle TCA) = \angle TAC + \angle ACT = 2\angle TAC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$ (для ω) $= 2\angle ABC$.

$\angle APC = \angle AOC = 2\angle ABC$. PT - бисс $\angle APC$. (опир. на равн. дуги) $\angle KPC = \angle ABC \Rightarrow$

$\triangle ABC \sim \triangle KPC \Rightarrow S\,ABC = \left(\frac{11}{5}\right)^2 \cdot S\,KPC = \frac{121}{25} \cdot 5 = \frac{121}{5} = 24.2.$

Ответ: 24.2

P.S. Я несколько раз пользовался тем, что $\overset{\frown}{AT} = \overset{\frown}{TC}$. Это так, из соображений симметрии при построении T. отсюда следует и $=$ углов TAC и ACT, и равенство углов APT и TPC.

21103332 (U112412 M1300104)