Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103331**

ID профиля: **82249**

Вариант 18

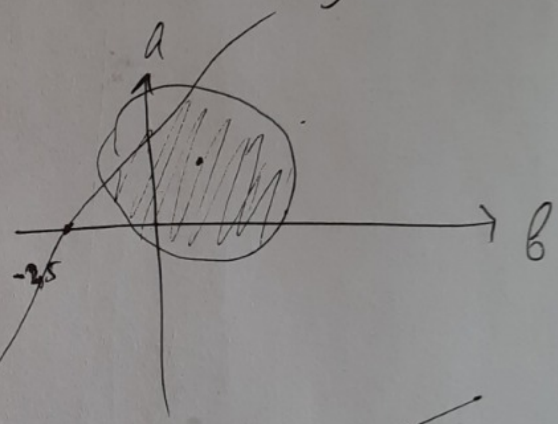
$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 5 \\ a^2+b^2 \le \min(4a-2b,\,5) \quad (*) \end{cases}$$

Для каждого решения нер-ва (*) ~~[illegible]~~ получается $\omega((a;b);\sqrt{5})$. Все эти точки удовл. условию → найдём решения (*):

1) $\begin{cases} a^2+b^2 \le 4a-2b \\ 4a-2b < 5 \end{cases}$

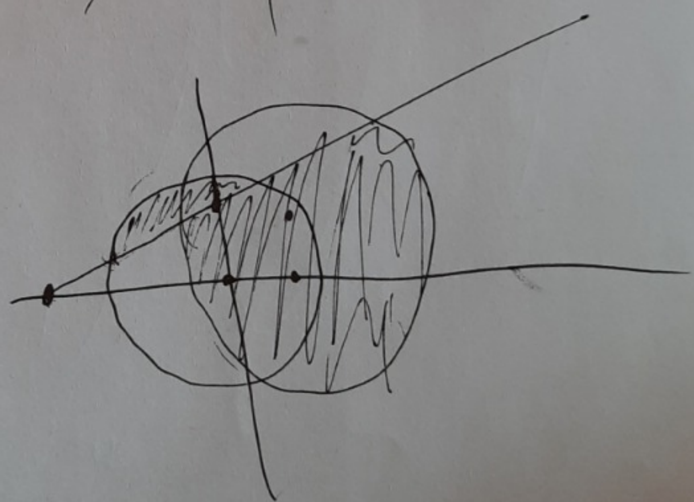
$\begin{cases} (a-2)^2+(b-1)^2 \le 5 \\ 4a-2b < 5 \end{cases}$

$a < \frac{2b+5}{4}$



2) $\begin{cases} a^2+b^2 \le 5 \\ 4a-2b > 5 \end{cases}$

$4a = 2b+5$



$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 5 \\ a^2+b^2 \le \min(4a-2b, 5)\end{cases}$$

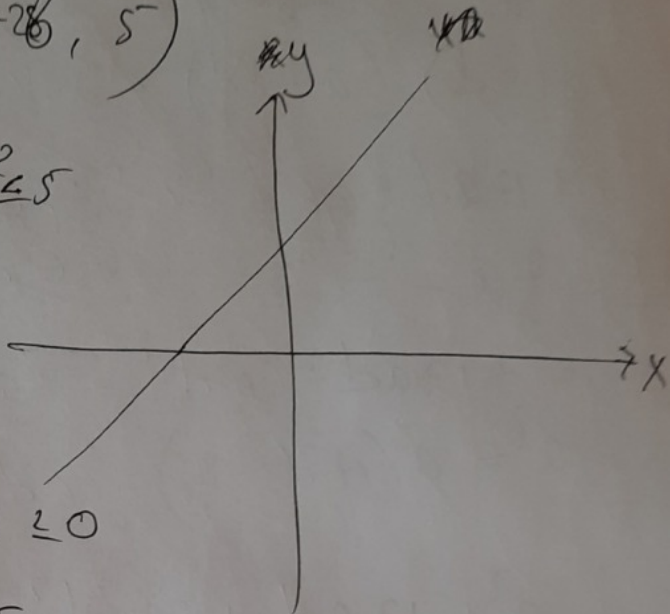
$a^2+b^2 \le \min(4a-2b, 5)$

$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2 \le 5$

$\omega(O(a;b), \sqrt{5})$

$a^2+b^2 \le 4a-2b$

$(a-2)^2+(b-1)^2-4-1 \le 0$



$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}(a-2)^2+(b-1)^2 \le 5 \\ a^2+b^2 \le 5\end{array}\right. \\ \ldots\end{cases}$$

Множество $\omega((a;b); \sqrt{5})$

$b+1=-\sqrt{5} < \sqrt{60} <$

$4a-2b \ge 5$

$a = \frac{5+2b}{4}$ $\quad \frac{4b^2+25+20b}{4}+b^2 \le 5$

$a \ge \frac{5+2b}{4}$ $\frac{2b+5}{4}$ $\quad 8b^2+20b+25-20 \le 0$

$a=$ $\quad 8b^2+20b+5 \le 0$

$4a-2b=5$ $\quad \frac{D}{4}=100-8\cdot 5=$

$a^2+b^2=5$ $\quad b=\frac{-10 \pm \sqrt{60}}{8}$

$a^2+b^2-4a+2b=0$

$(a-2)^2+(b+1)^2=5$ $\quad b \in \left[-\frac{10-2\sqrt{15}}{8}; -\frac{10+2\sqrt{15}}{8}\right]$

$a < 2-\sqrt{5}$ $\quad \varnothing$

$b > \sqrt{5}-1$ $\quad b=-\sqrt{5}-1$

$a \quad a+d$

$a_7 \cdot a_{12} = (a+6d)(a+11d) > S+20$

$(a+8d)(a+9d) < S+44$

$a^2+17ad+72d^2 < S+44$

$a^2+17ad+66d^2 > S+20$

$S = 7a + (1+2+3+4+5+6)d = 7a+21d$

$a^2+17ad+66d^2-7a-21d-20>0$

$a^2+a(17d-7)+66d^2-21d-20>0$

$a^2+17ad+72d^2 > S+20+6d^2$

$S+20+6d^2 < S+44 \qquad S=7a+21$

$6d^2 < 24 \qquad 4<\sqrt{18}<5$

$d^2<4 \qquad a\in[-9;0)\setminus\{-5\}$

$d\in Z \to d=1$

~~$(a+6)(a+11)$~~

$$\begin{cases} a^2+17a+66 > 7a+21+20 \\ a^2+17a+72 < 7a+21+44 \end{cases}$$

$a^2+10a+25>0$

$a \neq -5$

$a^2+10a+7<0$

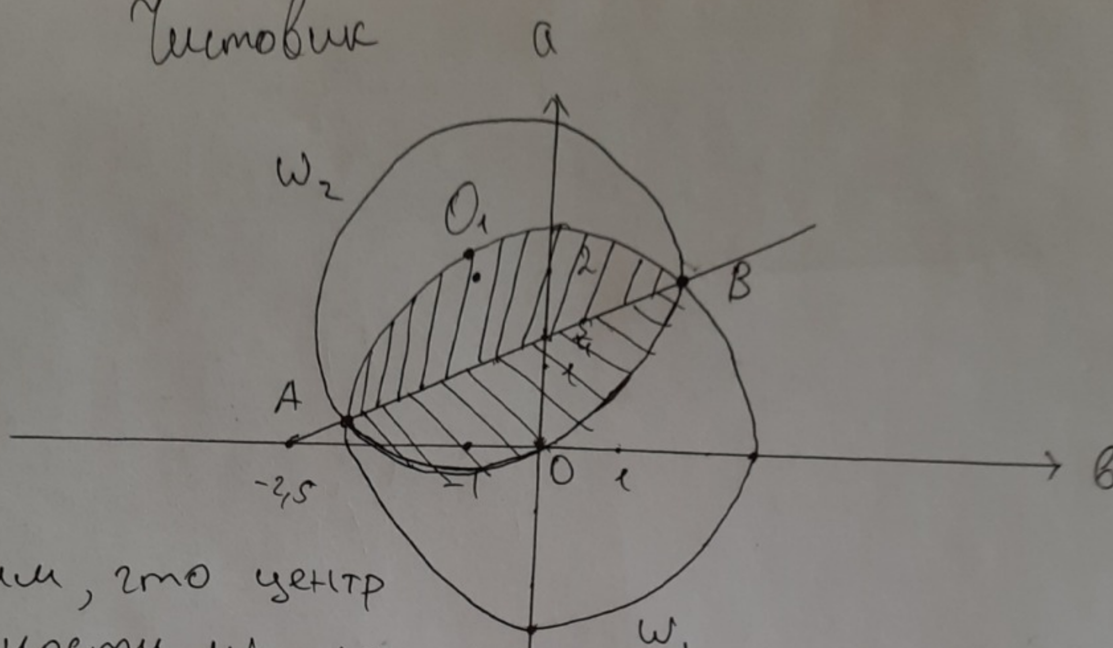
$\frac{D}{4} = 25-7 = 18$

$a = -5\pm\sqrt{18}$

$a\in(-5-\sqrt{18};-5+\sqrt{18})$

21103331 (U82249 M1303290)

Чистовик



Заметим, что центр окружности ω_2 лежит на ω_1 (т.к. $\sqrt{4+1} = \sqrt{5} = r$).
Также точки пересечения ω_1 и прямой $4a-2в-5=0$ лежат на ω_2 (т.к. $a^2+в^2=5$; $4a-2в=5 \to a^2+в^2=4a-2в$ — ω_2)
Область решений (*) указана на графике. Теперь построив из каждой точки, принадлежащей области решений, ~~найдём фигуру~~ окружность, радиусом $\sqrt{5}$, найдём M, объединив все области. Найдём площадь сектора AB, для обоих окружностей
$AB = \sqrt{10} \to \angle AOB = \angle AO_1B = 90^\circ \to S = \frac{\pi r^2}{4}$,
где $r = \sqrt{5} \to$ ~~построив~~ площадь M состоит из ~~...~~ секторов, только радиусом в 2 раза больше

$$\to S_M = \frac{\pi(r+\sqrt{5})^2}{4} \cdot 2 = \frac{\pi(2\sqrt{5})^2}{2} = 10\pi$$

Ответ: 10π

21103331 (U82249 M1303290)

$\rightarrow \cancel{a^2+10a+7}$ Чистовик

$a \in (-5-\sqrt{18}; -5+\sqrt{18}) \setminus \{-5\}$

$4 < \sqrt{18} < 5 \rightarrow a \in (-10; 0) \setminus \{-5\}$, т.к. $a \in \mathbb{Z} \rightarrow$:

$\Leftrightarrow \begin{cases} a \in [-9; 1] \setminus \{-5\} \\ a \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Ответ: $[-9; 1] \setminus \{-5\}$, $a \in \mathbb{Z}$

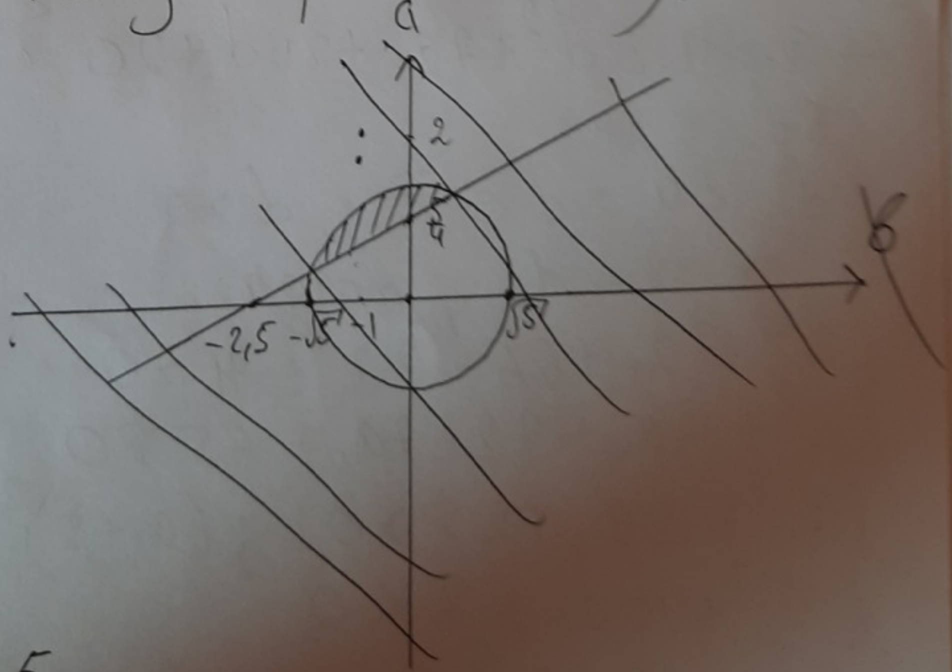
№3

$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \le 5 & (1) \\ a^2 + b^2 \le \min(4a-2b, 5) & (*) \end{cases}$

Для каждого решения неравенства $(*)$ соответствует $\omega((a;b); \sqrt{5})$ для неравенства (1) $\rightarrow$ в обратную сторону ~~...~~ тоже верно, тогда найдём решения $(*)$:

• $\begin{cases} a^2 + b^2 \le 5 \\ 4a - 2b \ge 5 \end{cases}$

$a \ge \frac{2b+5}{4}$



• $\begin{cases} a^2 + b^2 \le 4a - 2b \\ 4a - 2b \le 5 \end{cases}$

$\begin{cases} (a-2)^2 + (b+1)^2 \le 5 \\ a \le \frac{2b+5}{4} \end{cases}$

21103331 (U82249 M1303290)

№1 Чистовик

$a_1, a_2, a_3 \ldots \in \mathbb{Z}$

$a_1 \in \mathbb{Z}$

$a_2 = a_1 + d \in \mathbb{Z} \to d \in \mathbb{Z}$ (d-разность прогрессии)

Тогда по условию:

$$\begin{cases}(a_1+6d)(a_1+11d) > S+20 \\ (a_1+8d)(a_1+9d) < S+44\end{cases}$$

$$S = 7a_1 + d\cdot\left(\frac{6\cdot 7}{2}\right) = 7a_1 + 21d$$

Тогда:

$$\begin{cases}a_1^2 + 17a_1d + 66d^2 > 7a_1 + 21d + 20 \\ a_1^2 + 17a_1d + 72d^2 < 7a_1 + 21d + 44\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_1^2 + 17a_1d + 66d^2 + 6d^2 < 7a_1 + 21d + 44 \\ a_1^2 + 17a_1d + 66d^2 + 6d^2 > 7a_1 + 21d + 20 + 6d^2\end{cases}$$

$\to \cancel{a_1+a_1}\ 6d^2 + 7a_1 + 21d + 20 < 7a_1 + 21d + 44$

$6d^2 < 24$

$d^2 < 4;\ d \in \mathbb{Z};\ d > 0$

$\to d = 1$, тогда:

$$\begin{cases}a_1^2 + 17a_1 + 66 - 7a_1 - 41 > 0 \\ a_1^2 + 17a_1 + 72 - 7a_1 - 65 < 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0 \\ a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0\end{cases};\ (a_1+5)^2 > 0 \to a \in \mathbb{R}\setminus\{-5\}$$

$a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0$

$$\frac{D}{4} = 25 - 7 = 18 \to \left[\begin{array}{l} a_1 = -5+\sqrt{18} \\ a_1 = -5-\sqrt{18}\end{array}\right.$$

Часть 2

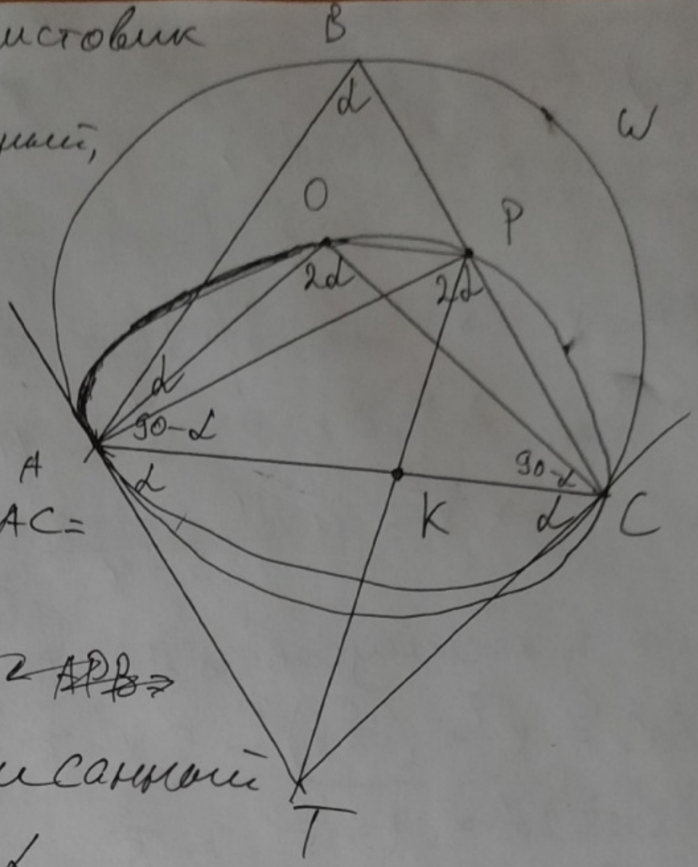
Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103331**

ID профиля: **82249**

Вариант 18

Чистовик



1) Пусть $\angle ABC = \alpha$ $\to \angle AOC = 2\alpha$ (центральный, опирающийся на одну дугу с вписанным)

$\angle CAT = \angle ACT = \alpha$ (угол между касательной и хордой) $\to \angle OCT = \angle OAC = 90 - \alpha$

2) ~~AOPC вписанный $\angle APB \Rightarrow$~~ ~~$= 180 - 2\alpha$~~ AOPC — вписанный

$\to \angle APC = \angle AOC = 2\alpha$

$\to \angle APB = 180 - 2\alpha \to \angle PAB = \alpha \to \triangle A\cancel{B}PB$ — равнобедренный $\to AP = BP$

3) $\angle ATC = 180 - 2\alpha \to APCT$ — вписанный

$\to \angle APT = \angle ACT = \alpha$; $\angle KPC = \angle CAT = \alpha$

& $\angle APK = \angle KPC \to$

$$\frac{S_{APK}}{S_{KPC}} = \frac{AP \cdot PK}{PK \cdot PC} = \frac{AP}{PC} = \frac{6}{5}$$

$\to PC = \frac{5}{6} AP = \frac{5}{6} PB$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{APC}} = \frac{BC \cdot AC}{AC \cdot PC} = \frac{BC}{PC} = \frac{BP + PC}{PC} = \frac{\frac{6}{5}PC + PC}{PC} =$$

$= \frac{11}{5} \cancel{\frac{5}{11}} \to S_{ABC} = \frac{11 \cdot 11}{5} = \frac{121}{5}$

21103331 (U82249 M1303291)

Чистовик

б) $tg\alpha = \frac{1}{2}$

$\to \sin\alpha = \frac{1}{2}\cos\alpha$; $\frac{5}{4}\cos^2\alpha = 1 \to \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} \to \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\to \sin 2\alpha = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{4}{5}$

$AP = BP = x \to \cancel{S_{APB}} \; PC = \frac{5}{6}x$

$\to S_{APC} = x \cdot \frac{5}{6}x \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = 11$

$\to x^2 = \cancel{11} \; \frac{11 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 5}{5 \cdot 4} = 33$

→ по т. косинусов $\triangle APC$:

$AC^2 = x^2 + \left(\frac{5}{6}x\right)^2 - 2x^2 \cdot \frac{5}{6} \cdot \cos 2\alpha$

$\cos 2\alpha = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$

$AC^2 = 33 + 33 \cdot \frac{25}{36} - 2 \cdot 33 \cdot \frac{1}{2} =$

$= 33 \cdot 36 + 33 \cdot 25 - 2 \cdot 33 \cdot 36 = \frac{33 \cdot 25}{36}$

$\to AC = \frac{5}{6}\sqrt{33}$

Ответ: $\frac{121}{5}$; $\frac{5}{6}\sqrt{33}$

№1

$\begin{cases} НОД(a; b; c) = 15 \\ НОК(a; b; c) = 3^{15} \cdot 5^{18} \end{cases}$

И т.к. a, b, c – натуральные → из этой системы заметим, что a, b, c ~~содержат~~ при разложении на простые множители содержат только ~~3и~~ 3 и 5

21103331 (U82249 M1303291)

Чистовик

Тогда

$$\begin{cases} a = 3^{a_1} \cdot 5^{a_2} \\ b = 3^{b_1} \cdot 5^{b_2} \\ c = 3^{c_1} \cdot 5^{c_2} \end{cases}$$ где $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ - натуральные

1) Заметим, что одно из чисел $(a_1, b_1, c_1) = 1$, аналогично одно из чисел $(a_2, b_2, c_2) = 1$ (т.к. НОД$(a; b; c) = 3 \cdot 5$

2) НОК$(a; b; c) = 3^{15} \cdot 5^{18}$

$\rightarrow$ Одно из чисел $(a_1, b_1, c_1) = 15$; Одно из чисел $(a_2, b_2, c_2) = 18$

$\rightarrow$ ~~да~~, оставшиеся числа могут быть любыми, в промежутке от 1 до 15 или от 1 до 18 (от 1 до 15, ограничение на a_1, a_2, a_3; от 1 до 18 ограничение на b_1, b_2, b_3) $\rightarrow$ всего троек:

$S = C_3^1 \cdot C_3^1 \cdot C_2^1 \cdot C_2^1 \cdot 15 \cdot 18 = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 15 \cdot 18$

$= 3^{\cancel{4}5} \cdot 2^3$

Ответ: $3^5 \cdot 2^3$

21103331 (U82249 M1303291)

№2 Чистовик

$\log_{\sqrt{\frac{x+3}{3}}}(6x-14)$; $\log_{6x-14}(x-1)^2$; $\log_{x-1}\left(\frac{x+3}{3}\right)$

О.Д.З: $x > \frac{14}{6}$; $x \neq \frac{20}{6}$

~~1) $\log_{\sqrt{\frac{x+3}{3}}}(6x-14) = \log_{6x-14}(x-1)^2$~~

~~$\frac{1}{\log_{6x-14}\sqrt{\frac{x+3}{3}}} = 2\log_{6x-14} x-1$~~

~~$2\log_{6x-14}(x-1) \cdot \log_{6x-14}\sqrt{\frac{x+3}{3}} = 1$~~

~~$\log_{6x-14}(x-1) \cdot \log_{6x-14}\left(\frac{x+3}{3}\right) = 1$~~

~~$\log_{6x-14}(x-1) \downarrow \quad \log_{6x-14}\frac{x+3}{3} \downarrow$~~

~~$\rightarrow$ единственный корень $x=3$~~

Пусть $\sqrt{\frac{x+3}{3}} = a$; $6x-14 = b$; $x-1 = c$

Тогда:

1) $\begin{cases} 2\log_a b = 2\log_b c \\ \log_c a + 1 = 2\log_a b \end{cases}$

Пусть $b = a^k$

$\rightarrow c = b^k$

$\rightarrow c = a^{k^2}$

$\rightarrow \frac{1}{k^2} + 1 = 2k$

$2k^3 - 2k^2 - 1 = 0$

$k = 1 \rightarrow (k-1)\cdot(2k^2+k+1) = 0$

$\rightarrow k = 1 \rightarrow 6x-14 = \frac{x+3}{3}$

$18x - 14 = x+3$

$17x = 17$

$\rightarrow x = 1 - \varnothing$

Не успел дописать :(

№4

$НОД(a, b, c) = 3 \cdot 5$

$НОК(a, b, c) = 3^{15} \cdot 5^{18}$

$\cancel{a = 3 \cdot 5^{ax}}$

$\cancel{b = 3^{15} \cdot 5^{18}}$

$\cancel{c = 5 \cdot 3^{y}}$

$a = 3^{a_1} \cdot 5^{a_2}$

$b = 3^{b_1} \cdot 5^{b_2}$

$c = 3^{c_1} \cdot 3^{c_2}$

~~выбор~~

3 спос. выбрать степень 1 у 3. Анал. у 5

2 спос. выбрать 3^{15}. Анал. 5^{18}. И осталось

15 вар. выбрать ст. 3 и 15 вар. ст. 5

$\to 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 15 \cdot 18$

№5

$\log_a (6x-14) = \log_{6x-14} (x-1)^2$

$\frac{1}{\log_b a} - 2 \log_b (x-1)^2 = 0$

$2 \log_b^2 (x-1) \cdot \log_b a = 1$

$\log_a b - 2\log_b(x-1) = 0$ ОДЗ!!!

$x > \frac{14}{6}$

$-2\log_b a \cdot \log_b(x-1) + 1 = 0$

$2\log_b a \cdot \log_b x-1 = \log_b b$

$2\log_b a = \frac{\log_b b}{\log_b x-1}$ $\frac{\log_a b}{\log_b c}$

$2\log_b a = \log_{x-1} b$

$\log_a b = \log_b c$ $\frac{\log_a b}{\log_a c} = \log_c b$

$a^k = b$ $(a^k)^k = c$

$b^k = c$ $a^{k^2} = c$

$\log_a b = \frac{\log_a a}{\log_a c}$

$\log_a 6x-14 = 2\log_{6x-14}(x-1)$

$\frac{1}{\log_{6x-14} a} - 2\log_{6x-14}(x-1) = 0$ $\log_a b - \log_b c$

$\frac{1}{\log_b a} - \log_b c$

$2\log_{6x-14}(x-1) \cdot \log_{6x-14} a = 1$

$\frac{1}{\log_b a} = \log_b c$

$\log_a b - \log_b c - 1 = 0$

$\log_{b^k} b = \log_b b^{\frac{1}{k}}$ $\log_a \frac{b}{a} - \log_b c_1 = 0$

$\frac{1}{\log_b b^k} = \log_b b^{ck} = \frac{1}{L}$

$a = b^k$ $\frac{1}{k} = L$

$c = b^{\frac{1}{k}}$

211103331 (U82249 M1303291)

№6 $2\log_a b$ $2\log_b c$ B

$\log_c a$

$S_{APK} = 6$

$S_{CPK} = 5$

~~2α~~

$AB \parallel PT$

$\frac{1}{k^2} = 2k - 1$

$2k^3 - k^2 - 1 = 0$

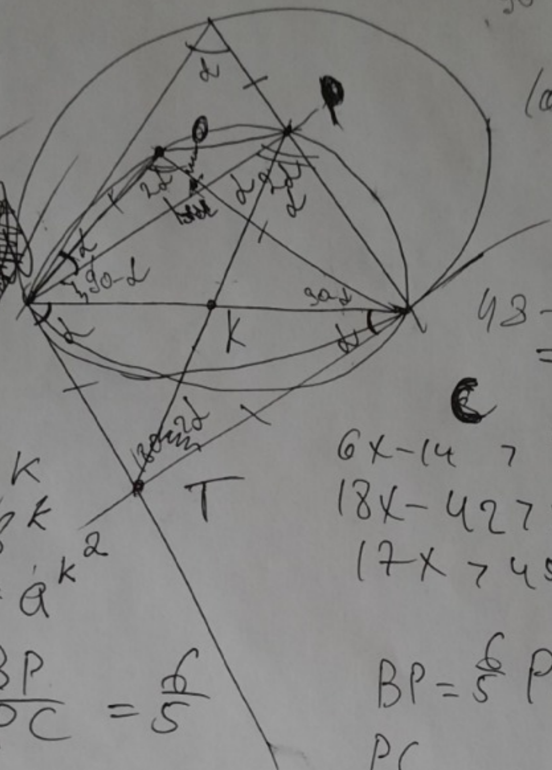
$k = 1$

$b = a^k$

$c = b^k$

$\to c = a^{k^2}$

$\frac{CP}{PB}$ – ?



$6x - 14 < x - 1$

$90 - \alpha$ $5x < 13$

$x < 2\frac{3}{5}$

$\log_4 2$

$\frac{1}{2}$

8^2

$48 - 14 =$

$= 34$

$6x - 14 > \frac{x+3}{3}$

$18x - 42 > x + 3$

$17x > 45$ $x > 3$

$\frac{AP}{PC} = \frac{6}{5} \to \frac{BP}{PC} = \frac{6}{5}$ $BP = \frac{6}{5} PC$

$\frac{PC}{PC + \frac{6}{5} PC} = \frac{1}{1 + \frac{6}{5}} =$

$\to \frac{PC}{CB} = \frac{5}{11} \to$ ~~$S_{ABC} = 11 \cdot 11$~~

$= \frac{5}{11}$

$\frac{S_{ABC}}{11} = \frac{11}{5} \to S_{ABC} = \frac{121}{5}$

б) $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{2}$ $\sin\alpha = \frac{1}{2}\cos\alpha$

$\frac{5}{4}\cos^2\alpha = 1$

$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} \to \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\alpha =$

$c = b^{\frac{1}{k}}$