Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21103142**

ID профиля: **326597**

Вариант 18

Чистовик

Задача 1

$a_0+n,\ a_0+2n,\ a_0+3n, \dots,\ a_0+7n$

$$S=\frac{(a_0+n+a_0+7n)\cdot 7}{2}=7(a_0+4n)$$

$a_7 a_{12} > S+20$

$(a_0+7n)(a_0+12n) > 7(a_0+4n)+20$ (1)

$a_9 a_{10} < S+44$

$(a_0+9n)(a_0+10n) < S+44$

$7(a_0+4n)+44 > (a_0+9n)(a_0+10n)$ (2)

Сложим (1), (2) нер-ва

$(a_0+7n)(a_0+12n)+7(a_0+4n)+44 > (a_0+4n)\cdot 7+20+(a_0+9n)(a_0+10n)$

$a_0^2+12na_0+7na_0+84n^2+44-20-a_0^2-10na_0-9na_0-90n^2>0$

$24>6n^2$

$4>n^2$, т.к арифм. прог. возраст., то $n>0$, поэтому $n<2$. Докажу, что n - целое:

a_0+n - целое; a_0+2n - целое; значит их разность тоже целое, поэтому n - целое.

$0<n<2$, $n\in\mathbb{Z} \Rightarrow n=1$

Подставим n в (1), (2) нер-ва и найдём пересеч. их решений

$(a_0+7)(a_0+12)>7(a_0+4)+20$

$a_0^2+19a_0+84-7a_0-28-20>0$

$a_0^2+12a_0+36>0$

$(a_0+6)^2>0$

$a_0\neq -6$

Чистовик

Задача 1 (продолж.)

$(a_0+9)(a_0+10) < 7(a_0+4)+44$

$a_0^2+19a_0+90-7a_0-28-44<0$

$a_0^2+12a_0+18<0$

$D = 144-18\cdot 4 = 72 = 3^2\cdot 2^2\cdot 2$

$a_0 = \frac{\pm 6\sqrt{2}-12}{2}$ $\left[\begin{array}{l} -3\sqrt{2}-6 \\ 3\sqrt{2}-6 \end{array}\right.$ $a_0 \in (-3\sqrt{2}-6;\ 3\sqrt{2}-6)$

~~$8^2=64$; $9^2=81$, поэтому $8<3\sqrt{2}<9$~~

$(3\sqrt{2})^2=18$

$4^2=16$; $5^2=25$, поэтому $4<3\sqrt{2}<5$

т.к a_0+n - целое, а n - целое, то и a_0 - целое

$a_0 \in (-3\sqrt{2}-6;\ 3\sqrt{2}-6)$; $a_0 \in \mathbb{Z}$

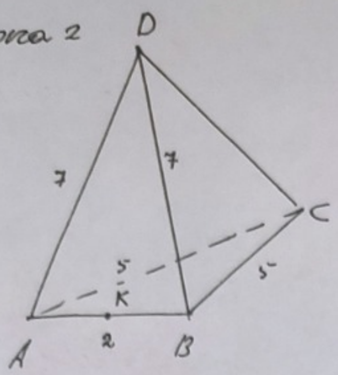
Учитывая $4<(3\sqrt{2})<5$ и $a_0 \in \{-10, -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2\}$, но $a_0 \neq -6$

$a_0 \in \{-10, -9, -8, -7, -5, -4, -3, -2\}$

Поэтому ответ: $a_0 \in \{-10, -9, -8, -7, -5, -4, -3, -2\}$

Чистовик

Задача 2



Дано:

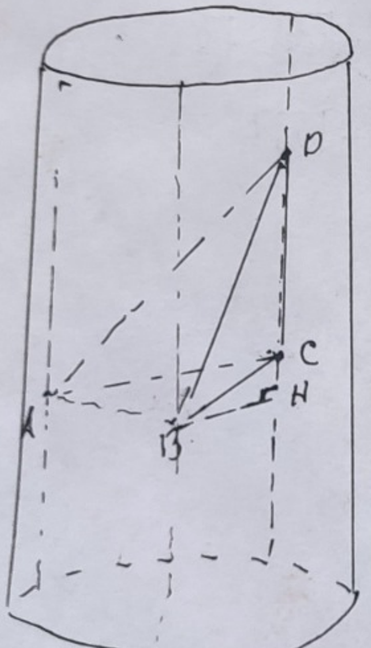
$AB = 2;\ AC = CB = 5;\ AD = DB = 7$

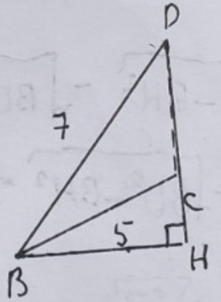
Решение:

1) K - середина AB; KD - медиана, высота в равнобед. $\triangle ABD$
$KD \perp AB$
KC - медиана, высота в равнобед. $\triangle ABC$
$KC \perp AB$

2) $KD \perp AB,\ KC \perp AB \Rightarrow AB \perp (KDC)$ (пр. перп. прямой и плоск.)

3) $AB \perp (KDC) \Rightarrow AB \perp DC$





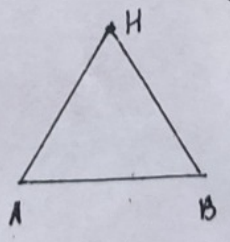
$BH \perp CD$; тогда $(ABH) \perp CD$ (пр. $AB \perp CD$, $BH \perp CD$) пр. перп прямой и плоск.

L - ось цилиндра

$L \parallel CD$, $(ABH) \perp CD \Rightarrow$ $(ABH) \perp L \Rightarrow (ABH)$ - ~~сп~~ плоскость, перпенд. оси цилиндра

Сечение цилиндра (ABH)

$AH = HB$, т.к $\triangle ACD = \triangle BCD$ (по трём сторонам), а AH и BH - высоты и равны как соот. элементы



Чистовик

Задача 2 (продолж)

R – радиус опис. окр вокруг $\triangle ABH$ равен радиусу цилиндра, т.к $(ABH) \perp l$

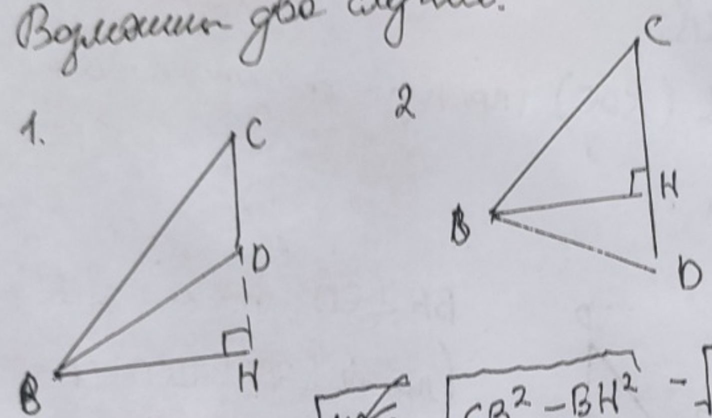
4) Т. sin для $\triangle ABH$

$2R = \frac{AB}{\sin\alpha}$; R – наим, когда $\alpha = 90$;

Если $\alpha = 90°$, то $\triangle ABH$ – равнобедренный, прямоугольный

$BH = \frac{AB}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

Возможны два случая:



1 $CD = CH - HD = \cancel{\sqrt{49}} = \sqrt{CB^2 - BH^2} - \sqrt{BD^2 - BH^2} = \sqrt{47} - \sqrt{23}$

2 $CD = CH + HD = \sqrt{CB^2 - BH^2} + \sqrt{BD^2 - BH^2} = \sqrt{47} + \sqrt{23}$

Ответ: $\sqrt{47} - \sqrt{23}$; $\sqrt{47} + \sqrt{23}$

4

3 Чистовик

Задача 3

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 5 \\ a^2+b^2 \le \min(4a-2b, 5) \end{cases}$$

$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 5$ – уравнение ~~окружности~~ круга с центром (a,b) и радиусом $\sqrt{5}$

Разберемся со вторым нер-вом

1. $4a-2b \le 5$

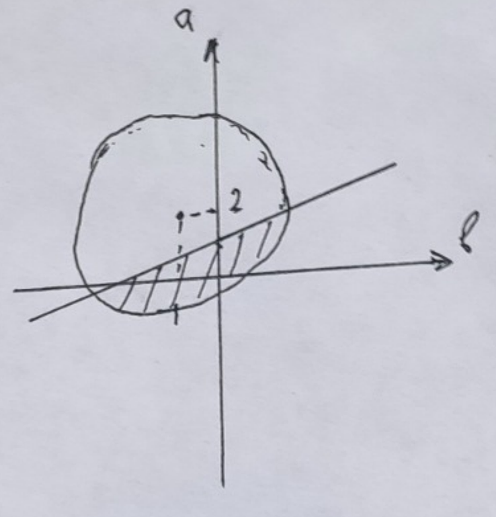
$4a \le 2b+5$ ~~a~~ $a \le \frac{b}{2}+\frac{5}{4}$

$a^2+b^2 \le 4a-2b$

$\cancel{a^2-2a+1-1}$

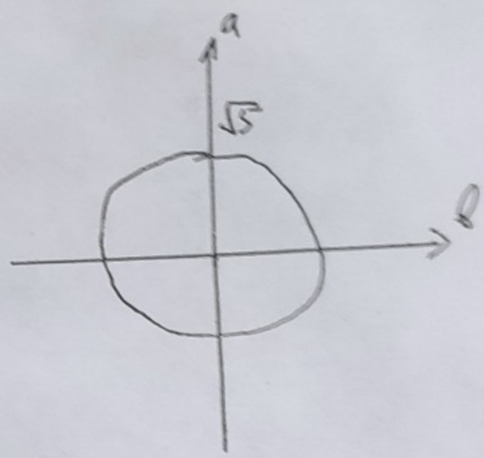
$a^2-4a+4-4+b^2+2b+1-1 \le 0$

$(a-2)^2+(b+1)^2 \le 5$



2. $4a-2b > 5$

$a^2+b^2 \le 5$



Черновик

Задача 1

$a_0+n, a_0+2n, \dots, a_0+7n$

$S=\frac{(a_0+n+a_0+7n)\cdot 7}{2}=(a_0+4n)\cdot 7$

$(a_0+7n)(a_0+12n) > 7(a_0+4n)+20$

$(a_0+9n)(a_0+10n) < 7(a+4n)+44$

$7(a_0+4n)+44 > (a_0+9n)(a_0+10n)$

$\cancel{7(a_0+4n)}+44+(a_0+7n)(a_0+12n) > \cancel{7(a_0+4n)}+20+(a_0+9n)(a_0+10n)$

$24+\cancel{a_0^2}+12\cancel{n}a_0+7\cancel{n}a_0+84n^2-\cancel{a_0^2}-10na_0-9\cancel{n}a_0-90n^2>0$

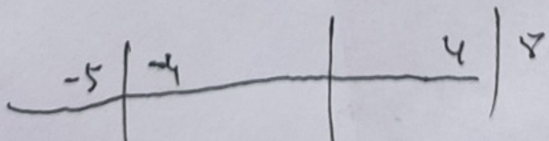
$24>6n^2$

$n<2$

$n=1$

$$\begin{array}{r} 84 \\ -\,48 \\ \hline 36 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 64 \\ -\,27 \\ \hline 56 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 144 \\ -\,72 \\ \hline 7 \end{array}$$

$c =$



Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21103142**

ID профиля: **326597**

Вариант 18

Чистовик

Задача 4

$$\begin{cases} НОД(a,b,c)=15 \\ НОК(a,b,c)=3^{15}\cdot 5^{18} \end{cases}$$

$НОК(a,b,c)=3^{15}\cdot 5^{18} \Rightarrow a = 3^{n_1}\cdot 5^{n_2}$

$b = 3^{m_1}\cdot 5^{m_2}$

$c = 3^{k_1}\cdot 5^{k_2}$

$n_1, n_2, m_1, m_2, k_1, k_2 \in N\cup\{0\}$

Потому что ~~код~~ НОК включает в себе все делители a, b, c. $НОД(a,b,c)=15 \Rightarrow \min(n_1, m_1, k_1)=1$

$\min(n_2, m_2, k_2)=1$

$НОК(a,b,c)=3^{15}\cdot 5^{18} \Rightarrow \max(n_1, m_1, k_1)=15$

$\max(n_2, m_2, k_2)=18$

Найдём кол-во комбинаций n_1, m_1, k_1:

~~Если $n_1=1$, то m_1, k_1 могут принимать~~
~~кол-во комбинаций без~~ 1
~~Для этого посчитаем кол-во комбинаций~~

~~$n_1, m_1, k_1 \in \{2, 3 ... 15\}$~~

~~Всего 6 случаев: $n_1=1$; $m_1=15$; $k_1\in\{$~~

Посчитаем кол-во комбинаций ~~m.~~ n_1, m_1, k_1 без повторений

Всего 6 случаев: ~~m1~~ $n_1=1$, $m_1=15$, $k_1\in\{2,3...,14\}$

$n_1=1$, $m_1\in\{2,3...,14\}$, $k_1=15$

$n_1=15$, $m_1=1$, $k_1\in\{2,3...,14\}$

$n_1=15$, $m_1\in\{2,3...14\}$; $k_1=1$

$n_1\in\{2,3...14\}$, $m_1=1$, $k_1=15$

$n_1\in\{2,3...14\}$ $m_1=15$; $k_1=1$

$=$

A_3

1

Чистовик

Задача 4 (продолжение)

Всего вариантов без повторений $6 \cdot 13 = 78$

С повторениями:

два случая: 1. набор чисел $\{1, 1, 15\}$

2. набор чисел $\{15, 15, 1\}$

1. кол-во вариантов: $\frac{A_3}{2!} = 3$

2. кол-во вариантов $\frac{A_3}{2!} = 3$

Всего кол-во комбинаций n_1, m_1, k_1 : $78 + 3 + 3 = 84 = X_1$

Аналогично посчитаем кол-во комбинаций для n_2, m_2, k_2

: $6 \cdot 16 + 6 = 102 = X_2$

~~Тогда~~ всего чисел $\cancel{X_1 \cdot X_2}$ комбинаций чисел (a, b, c):

: $X_1 \cdot X_2 = 8568$

Ответ: 8568

Чистовик

Задача 5

$$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14),\ \log_{6x-14}(x-1)^2,\ \log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)$$

О.Д.З $6x-14>0$

$6x-14\neq 1$

$x-1>0$

$x-1\neq 1$

$\frac{x}{3}+3>0$

$\frac{x}{3}+3\neq 1$

Из-за О.Д.З $\log_{6x-14}(x-1)^2=2\log_{6x-14}(x-1)$

$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)=2\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)$

Пусть какие-то два равны a, третий равен $a-1$

Тогда их произведение

$2\log_{6x-14}(x-1)\cdot 2\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)\cdot\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)=$

$=4\log_{6x-14}6x-14\cdot\log_{x-1}(x-1)\cdot\log_{\frac{x}{3}+3}\left(\frac{x}{3}+3\right)=a^2(a-1)=4$

$a^3-a^2=4$

$a^3-a^2-4=0$

$a=2$ (подбором) $\quad (a-2)(a^2+a+2)=0$

$$\begin{array}{r|l} a^3-a^2-4 & a-2 \\ \hline -\ a^3-2a^2 & a^2+a+2 \\ a^2-4 & \\ -\ a^2-2a & \\ 2a-4 & \\ -\ 2a-4 & \\ 0 & \end{array}$$

$a^2+a+2=0$

$D<0 \Rightarrow$ решений нет, поэтому подх. только $a=2$

Чистовик

Задача 8 (продолжение)

Возможны три случая:

$$\left[\begin{array}{l}\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)=a-1\\ \log_{6x-14}(x-1)^2=a-1\\ \log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)=a-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)=1 & (1)\\ \log_{6x-14}(x-1)^2=1 & (2)\\ \log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)=1 & (3)\end{array}\right.$$

(3) $\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)=1$

$\frac{x}{3}+3=x-1$

$\frac{2}{3}x=4$

$x=6$

Проверим, подс. в ур-е: $\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)=2$

$\log_{6x-14}(x-1)^2=2$ $(25\neq 22^2)$

не подх. $x=6$ не решение

(2) ~~$(x-1)^2=6x-14$~~

$\log_{6x-14}(x-1)^2=1$

$(x-1)^2=6x-14$

$x^2-2x+1-6x+14=0$

$x-8x+15=0$

$(x-3)(x-5)=0$

Проверим, подс. в ур-е: $\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)=2$

$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)=2$

$x=3$ - подх

$x=5$ не подх.

Чистовик

Задача 5 (продолжение)

~~(3) $\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)=1$, из тогда $\left(\frac{x}{3}+3\right)=(x-1)^2$~~

$\cancel{6x+14=\sqrt{\frac{x}{3}+3}}$; $\cancel{6x+14\geq 0}$

$\cancel{(6x+14)^2=\frac{x}{3}+3}$

$\cancel{36x^2+196x+168x+196=\frac{x}{3}+3}$

$\cancel{36x^2+167\frac{2}{3}x+193=0}$

$6x-14=\sqrt{\frac{x}{3}+3}$; $\cancel{6x+14}>6x-14\geq 0$

$36x^2-168x+196=\frac{x}{3}+3$

$36x^2-168\frac{1}{3}x+193=0$

$\cancel{D=\left(168\frac{1}{3}\right)^2-4\cdot 36\cdot 193=\frac{254016}{9}}$

$\cancel{D=\left(\frac{505}{3}\right)^2-4\cdot 36\cdot 193=\frac{255025}{9}-\frac{250128}{9}}$

(3) $\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+1}}(6x-14)=1$, тогда $\log_{6x-14}(x-1)^2=2$

$(x-1)^2=(6x-14)^2$

$(6x-14-x+1)(6x-14+x-1)=0$

$x=\frac{13}{5}$; $x=\frac{15}{7}$

$\frac{13\cdot 6}{5}-14=\sqrt{\frac{13}{15}+1}$

~~Слева пол~~

$\frac{8}{5}=\sqrt{\frac{28}{15}}$

$\frac{64}{25}\neq\frac{28}{15}$ $x=\frac{13}{5}$ – не подх. Подставим в $\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+1}}(6x-14)=1$

$\frac{15}{7}\cdot 6-14=\sqrt{\frac{15}{21}+1}$

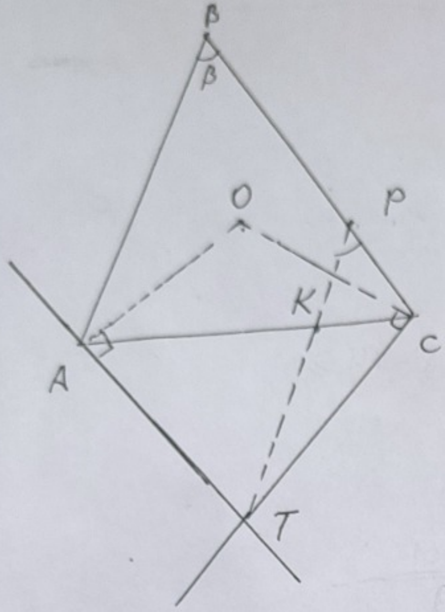
$\frac{2}{8}=\sqrt{\frac{36}{21}}$

$\frac{1}{16}\neq\frac{36}{21}$ $x=\frac{15}{7}$ – не подх.

Ответ: 3

Чистовик

Задача 6



Дано:

$S_{APK}=6$; $S_{CPK}=5$

Найти: $S_{\triangle ABC}$

Решение:

1) ω_2 - окр; проход. через A, O, C

$P \in \omega_2$ по усл.

$\angle OAT + \angle OCT = 180 \Rightarrow OATC$ - вписан.

A, O, C, T лежат на одной окр.;

но, т.к. через три точки, не леж. на одной прямой проходит ед. окр, то $T \in \omega_2$. Итак $A, O, P, C, T \in \omega_2$

2) $\dfrac{AK}{KC} = \dfrac{S_{APK}}{S_{CPK}} = \dfrac{\frac{1}{2}\cdot h \cdot AK}{\frac{1}{2}\cdot h \cdot KC} = \dfrac{6}{5}$

3) $\angle AOC = 2\angle B$, как центральный

$AT = TC$ как отрезки касат.

$\angle AOC + \angle ATC = 180$

$\angle ATC = 180 - 2\beta$

$\angle TAC = \dfrac{180 - \angle ATC}{2} = \beta$

$\angle TPC = \angle TAC = \beta$, как впис., опир на одну дугу

$\cancel{\angle TPC}\ \angle \cancel{TBC} - \angle TPC = \angle ABC = \beta \Rightarrow AB \parallel TP$

$\angle ABC = \angle TPC$, $\angle ACB$ - общий $\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle KPC$ (по двум углам)

$\dfrac{AC}{KC} = \dfrac{BC}{PC} = \dfrac{11}{5}$; $\dfrac{BP}{PC} = \dfrac{6}{5}$,

6

Чистовик

Задача 6 (продолжение)

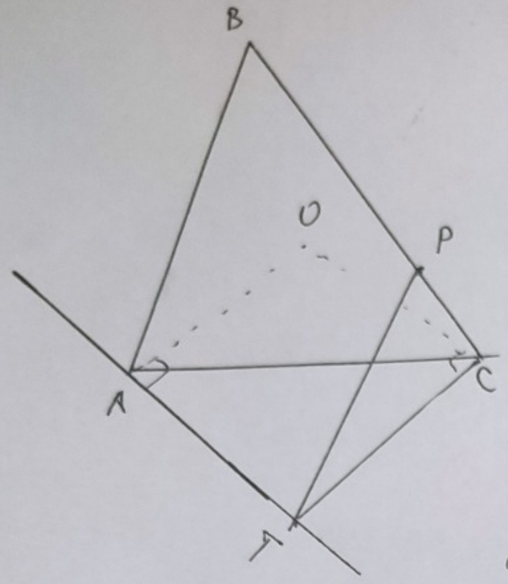
$$\frac{BP}{PC}=\frac{6}{5} \Rightarrow \frac{S_{ABP}}{S_{APC}}=\frac{6}{5}; \ S_{ABP}=\frac{6}{5}S_{APC}=\frac{6}{5}\cdot 11$$

$$S_{ABC}=S_{ABP}+S_{APC}=\frac{6}{5}\cdot 11+11=\frac{121}{5}$$

а) Ответ: $\frac{121}{5}$

Черновик

Задача 6



$78 | 3$

$-6 \quad 26$

18

$\times 505$
505
2525
2525
255025

$\times 20$
15

$\times 17$
6
102

$\times 193$
144
772
772
193
27792

$\times 27792$
9

102
84
408
816
8568

$\times 144$
193
432
1296
144
157392

$\times 27792$
9
28

$\log_3 8 \cdot \log_2 2$

$a^3 - a^2 -$

$\times 12$
14
48
12
168

$\times 14$
14
56
14
196

-277920
27792
250128

$+250128$
27792
277920

$\times 168$
168

$\times 168$
3
54

$\times 168$
3
504

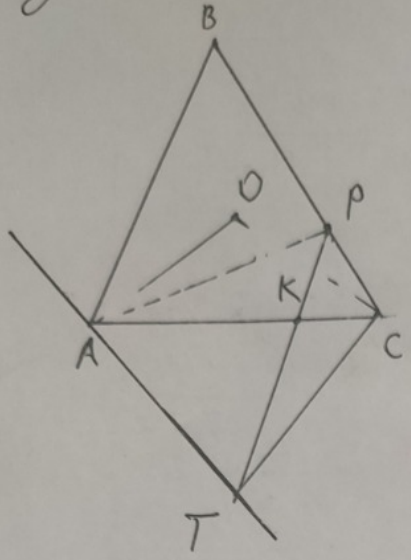
$\times 504$
504
2016
2520
254016

-5025
128
4897

21103142 (U326597 M1303815)

Черновик

Задача 8



$$\frac{9 \cdot 11^2}{5^2}$$