Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102915**

ID профиля: **342503**

Вариант 18

Чистовик №1

№1 Пусть a_1 – первый член прогрессии
d – разность прогрессии

Тогда в силу того что прогрессия возрастающая и состоит из целых чисел. $(a_1 \in \mathbb{Z},\ d>0,\ d\in\mathbb{Z})$ *

$a_7 = a_1 + 6d \quad a_9 = a_1 + 8d \quad S = 7a_1 + 21d$

$a_{12} = a_1 + 11d \quad a_{10} = a_1 + 9d$.

Тогда из условий:

$$\begin{cases}(a_1+6d)(a_1+11d) > S+20\\ (a_1+8d)(a_1+9d) < S+44\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a_1^2+17da_1+66d^2 > S+20\\ S+44 > a_1^2+17da_1+72d^2\end{cases}$$ ~~+ обе системы~~ ~~(=)~~

Сложим два неравенства вида $a>b$ придем к такому же н-ву.

$a_1^2+17da_1+66d^2+S+44 > S+20+a_1^2+17da_1+72d^2$

$66d^2+44 > 20+72d^2$

$24 > 6d^2$

$d^2 < 4$

$d \in (-2;2) \Rightarrow$ из * $d = 1$.

Подставим d и найдем a_1

$$\begin{cases}(a_1+6)(a_1+11) > 7a_1+21+20\\ (a_1+8)(a_1+9) < 7a_1+21+44\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2+17a_1+66 > 7a_1+41\\ a_1^2+17a_1+72 < 7a_1+65\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a_1^2+10a_1+25>0\\ a_1^2+10a_1+7<0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 \neq -5\\ a_1^2+10a_1+7<0\end{cases}$$

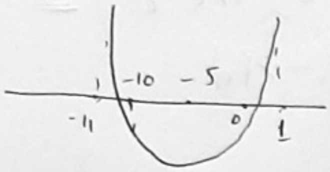
Рассмотрим $F(a_1) = a_1^2+10a_1+7$. Это парабола ветви вверх. ~~вер~~ $a_0 = -\frac{10}{2} = -5$. Найдем целые a_1 удовлетворяющие $F(a_1)<0$

Чистовик №2

$f(-6) = 36 - 60 - 7 < 0$
$f(-7) = 49 - 70 - 7 < 0$
$f(-8) = 64 - 80 - 7 < 0$
$f(-9) = 81 - 90 - 7 < 0$
$f(-10) = 100 - 100 - 7 < 0$
$f(-11) = 121 - 110 - 7 > 0$

~~Значен~~ Так-же парабола симметрична относительно $a = -5 \Rightarrow$
$f(-4);\ f(-3);\ f(-2);\ f(-1);\ f(0) < 0$

Как только мы нашли целое значение в котором >0 ~~то после него~~ остальные так-же далее будут >0.



Ответ: $a \in \mathbb{Z},\ a \in [-10; 0],\ a \neq -5$.

№3
$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \le 5 \\ a^2 + b^2 \le \min(4a - 2b;\ 5) \end{cases}$$

Рассмотрим вторую строку системы.
$a^2 + b^2 \le \min(4a - 2b;\ 5)$

Решим графически; при: $4a - 2b - 5 < 0$
т.е ~~$b < 5$~~ $b > \frac{4a-5}{2}$

$a^2 + b^2 \le 4a - 2b$
$(a^2 - 4a + 4) + (b^2 + 2b + 1) \le 5$
$(a-2)^2 + (b+1)^2 \le 5$ — ω_1, окружность с центром $O_1(2; -1)$ $r = 2\sqrt{5}$ и ее внутр. часть.

При: $b \le \frac{4a-5}{2}$
$a^2 + b^2 \le 5$ ω_2 Окружность с центром $O_2(0; 0)$ $r = 2\sqrt{5}$ и ее внутр. часть

1) $\frac{4a-5}{2} = 0$
$a = \frac{5}{4}$

2) $4a - 2b - 5 = a^2 + b^2 - 4a + 2b$
$a^2 - 8a + b^2 + 4b$

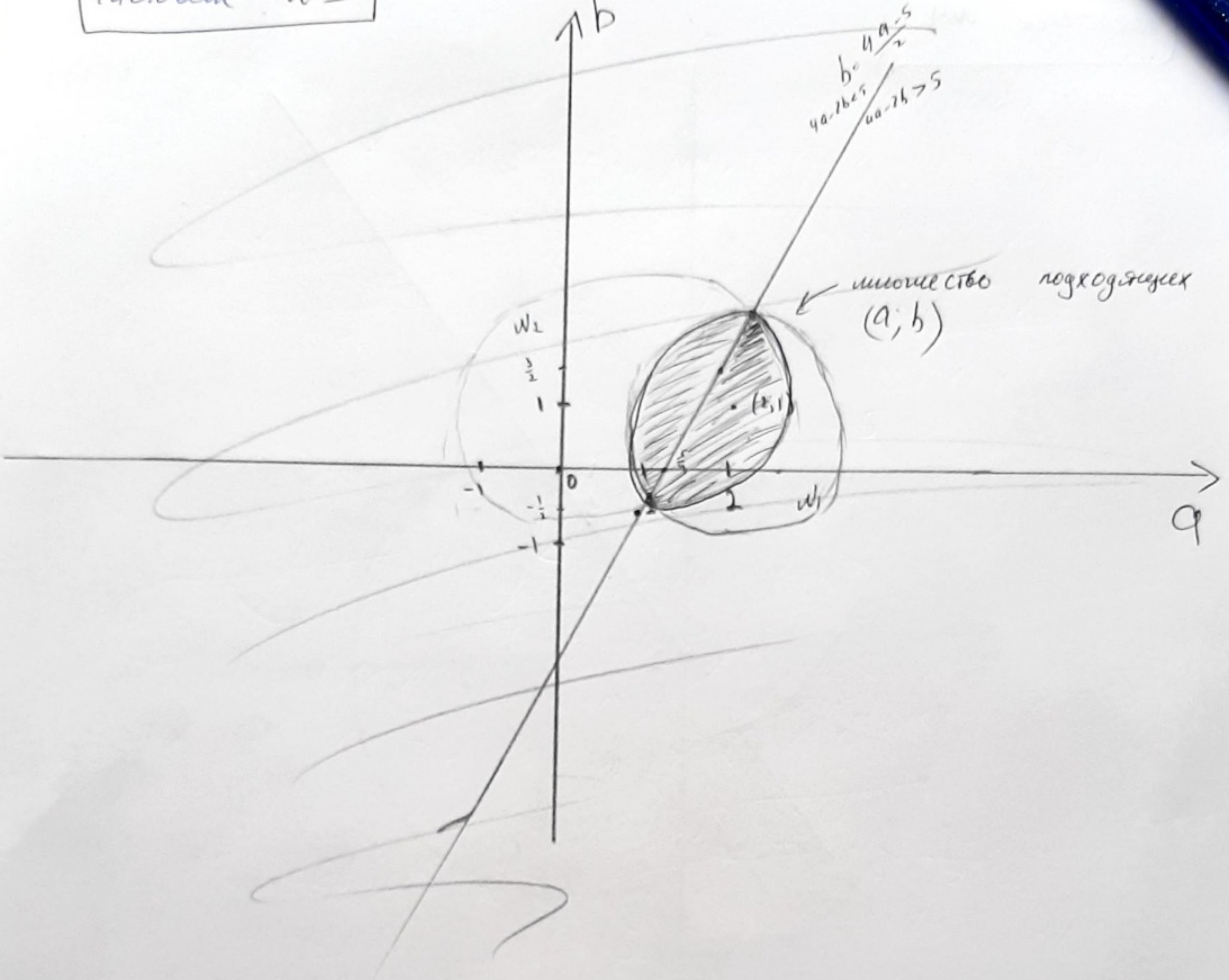
Точки пересечения ω_1 и $b = \frac{4a-5}{2}$
~~$(a-2)^2 + \left(\frac{4a-5}{2} + 1\right)^2 = 5$~~
$a^2 + \left(\frac{4a-5}{2}\right)^2 = 4a - 4a + 5$
$a^2 + \left(\frac{4a-5}{2}\right)^2 = 5$
$4a^2 + 16a^2 - 40a + 25 = 20$
$20a^2 - 40a + 5 = 0$
$4a^2 - 8a + 1 = 0$
~~$D = 8 + 8$~~
$a = \frac{8 \pm \sqrt{48}}{8} = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{2} = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

3) Точки пересечения ω_2 и $b = \frac{4a-5}{2}$
$a^2 + \left(\frac{4a-5}{2}\right)^2 = 5$
$a = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

Точки пересечения ω_1 и ω_2 с $b = \frac{4a-5}{2}$ совпадают

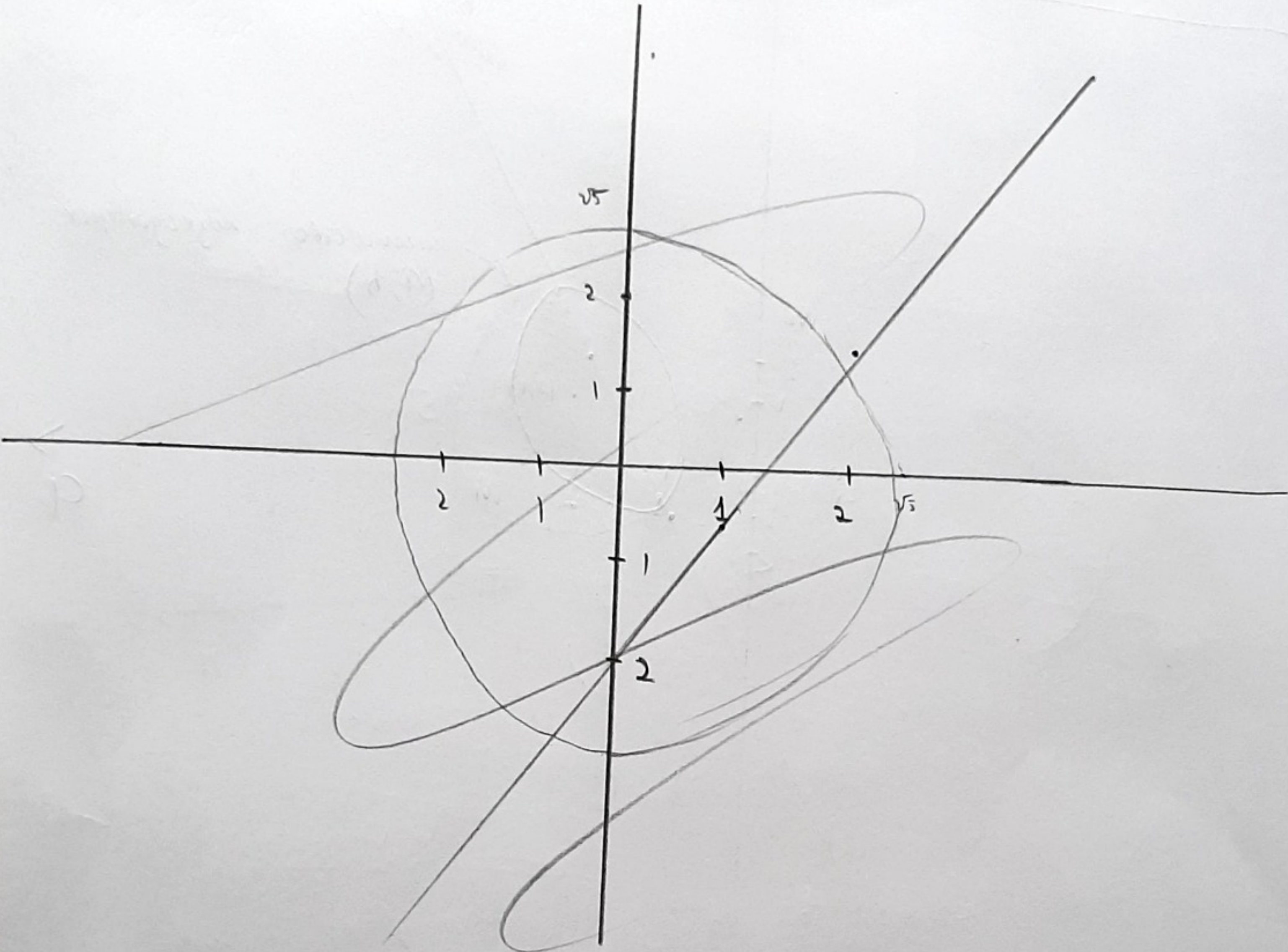
21102915 (U342503 M1297915)

Чистовик №3



21102915 (U342503 M1297915)

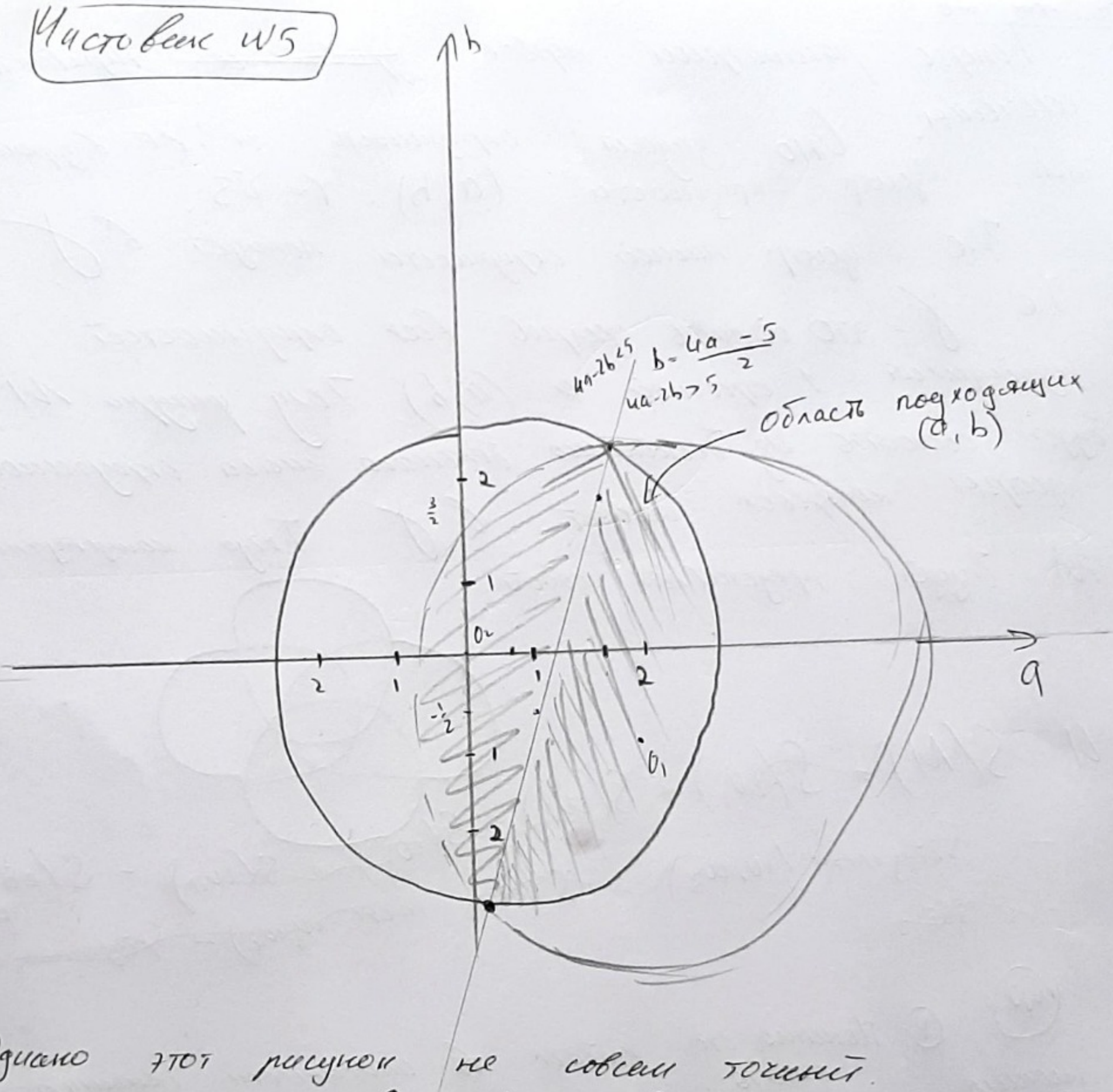
Чистовик №4



21102915 (U342503 M1297915)

$(b+1)^2=1$, $b=0$, $b=-2$

Чистовик №5



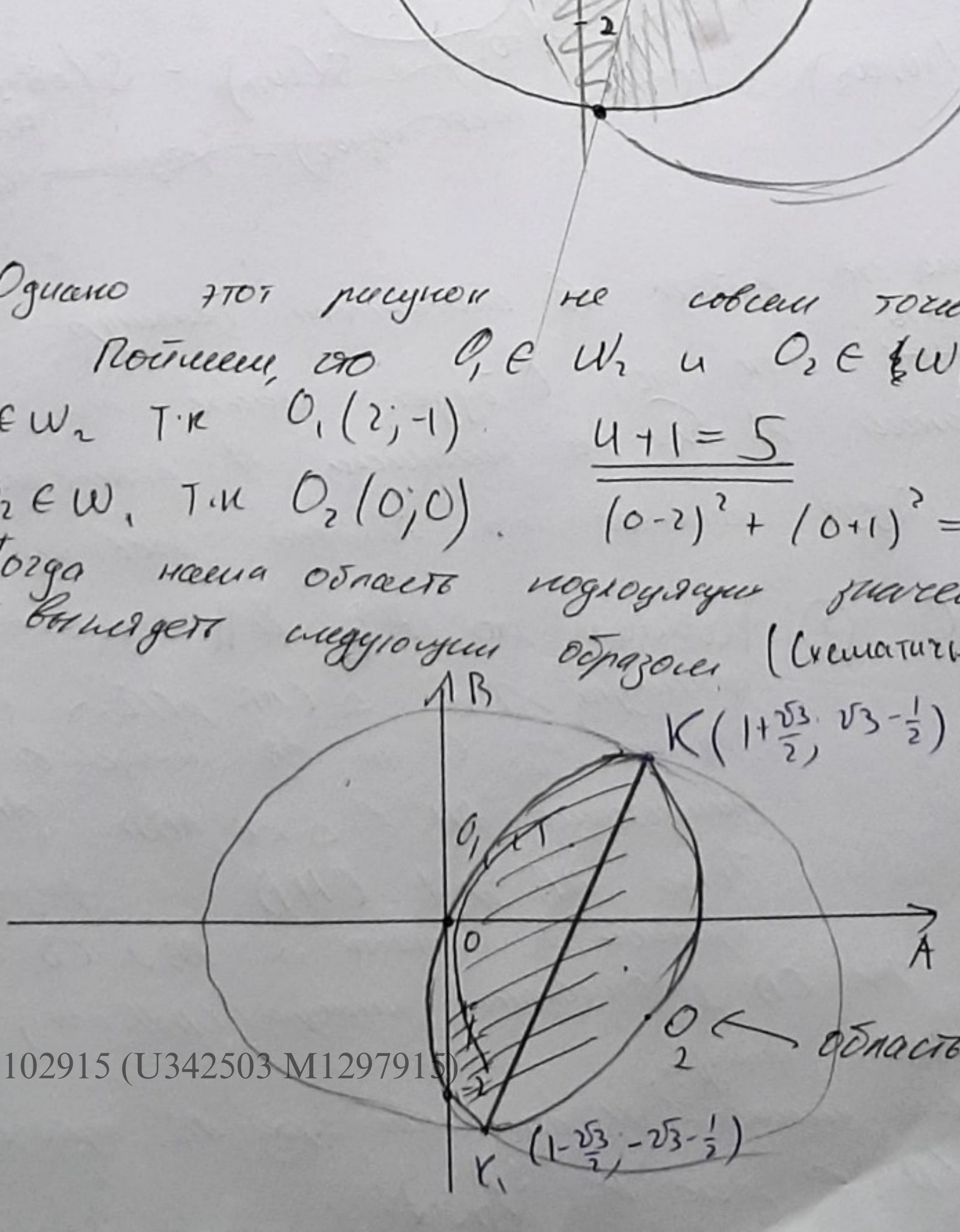
Однако этот рисунок не совсем точный.

Поймем, что $O_1 \in \omega_2$ и $O_2 \in \omega_1$.

1. $O_1 \in \omega_2$ т.к. $O_1(2;-1)$ $\quad 4+1=5$

2. $O_2 \in \omega_1$ т.к. $O_2(0;0)$. $\quad (0-2)^2+(0+1)^2=5$

Тогда наша область подходящих значений $a;b$ будет выглядеть следующим образом (схематично)



Найдем точки пересечения ω_1 с OB.

$(b+1)^2=1$

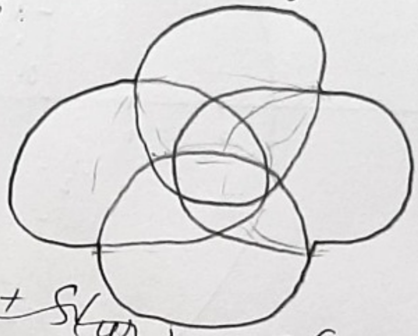
$\left[\begin{array}{l} b=0 \\ b=-2 \end{array}\right.$

Чистовик №6

Теперь рассмотрим первое ~~уравнение~~ неравенство системы. Оно задает окружность и ее внутреннюю часть. Центр окружности: $(a;b)$. $r=\sqrt{5}$.

Т.е центр нашей окружности попадет в γ

Т.е γ - это область центров всех окружностей задающихся 1 строкой и $(a;b)$. Тогда фигура M будет состоять из бесконечно большого числа окружностей и внутр. центры которых лежат в γ. Тогда концептуально M будет представлять собой:



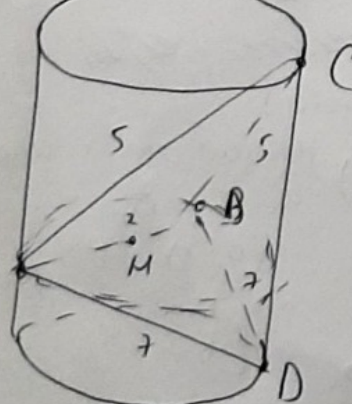
~~$\text{И т } S(M) = S(\omega_1) + S(\omega_2) + S(\omega_3) + S(\omega_4) - S(\text{общ части } \omega_1\omega_2)$~~

~~$- S_{\text{общ части}}(\omega_1\omega_3) - S(\text{общ часть } \omega_3\omega_4) - S_{\text{общ части } \omega_4\omega_1})$~~

~~$- S_{\text{общ}}$~~

(№2)

① Понятно, что любой ~~в~~ описанной цилиндр можно „~~сдвинуть~~ сжать" так, что C будет лежать на верхнем основании. A D на нижнем. А остальные точки так же будут лежать на боковой пов-ти.



② Поймем, что AB ~~⊥~~ $\parallel$ основанию цилиндра. Т.к $\triangle CAB$ р/б $\Rightarrow$ CH - высота из C на AB попадет в середину AB. Аналогично DH в $\triangle$-ке ABD. Тогда AB ~~∦~~ $\perp$ CHD по признаку прямой $\perp$ плоскости $\Rightarrow$ $AB \perp CD$. Т.к $CD \perp$ основанию цилиндра ($CD \parallel$ оси) $\Rightarrow$ $AB \parallel$ основанию цилиндра.

③ Проведем плоскость $\parallel$ основанию через AB. пусть она пересечет CD в точке K. $CK = y$
$KD = x$

Чистовик №7.

В (4) Рассмотрим тетраэдр $CABK$. - $CK \perp ABK$. $AK = BK$. т.к $AC = CB = 5$. Пусть $AK = BK = l$.

$$\begin{cases} l^2 - 1 = h^2, \text{ где } h - KH \text{ в р/б о-ке } ABK \\ l^2 + y^2 = 5 \\ y^2 + h^2 = 24 \text{ (из } \triangle CHK \end{cases}$$

21102915 (U342503 M1297915)

Черновик

(№1) $S = a_1 + \overset{d}{a_2} + \overset{2d}{a_3} + \overset{3d}{a_4} + \overset{4d}{a_5} + \overset{5d}{a_6} + \overset{6d}{a_7}$

$a_1 = a_1 \quad d$

$a_2 = a_1 + d \qquad S_7 = 7a_1 + 21d$

$a_3 = a_1 + 2d \qquad a_7 = (a_1 + 6d)$

$a_{12} = (a_1 + 11d)$

$$\begin{cases} (a_1+6d)(a_1+11d) > 7a_1 + 21d + 20 \\ (a_1+8d)(a_1+9d) < S + 44 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 17da_1 + 66d^2 > 7a_1 + 21d + 20 \\ a_1^2 + 17da_1 + 72d^2 < S + 44 \end{cases}$$

$S + 44 + a_1^2 + 17da_1 + 66d^2 > \cancel{7a} S + 20 + a_1^2 + 17da_1 + 72d^2$

$44 + 66d^2 > 20 + 72d^2$

$24 > 6d^2$

$\cancel{24>}$

$4 > d^2 \qquad d > 0$

$\qquad d \in N \qquad \boxed{d = 1}$

$d \in (-2; 2)$

$-2, -1, 0, \cancel{1}, 2)$

$$\begin{cases} (a_1+6)(a_1+11) > 7a_1 + 41 \\ (a_1+8)(a_1+9) < 7a_1 + 21\cancel{d} + 44 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 17a_1 + 66 > 7a_1 + 41 \\ a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0 \\ a_1 \neq -5 \end{cases}$$

$a_1^2 + 17a_1 + 72 < 7a_1 + 65$

$a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0$

$\cancel{a_1 \in \frac{10}{7}}$

$D = 100 - 28 =$

21102915 (U342503 M1297915)

Черновик

№3 $\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \le 5 \\ a^2+b^2 \le \min(4a-2b, 5) \end{cases}$

$4a-2b-5=0$

~~2b=~~

$4a = 2b+5$

$2b = 4a-5$

$b = \frac{4a-5}{2}$

① ~~4a-2d~~ $4a-2b<5$:

$a^2+b^2 \le 4a-2b$

$(a^2-4a+4)+(b^2+2b+1) \le 5$

$(a-2)^2+(b+1)^2 \le 5$

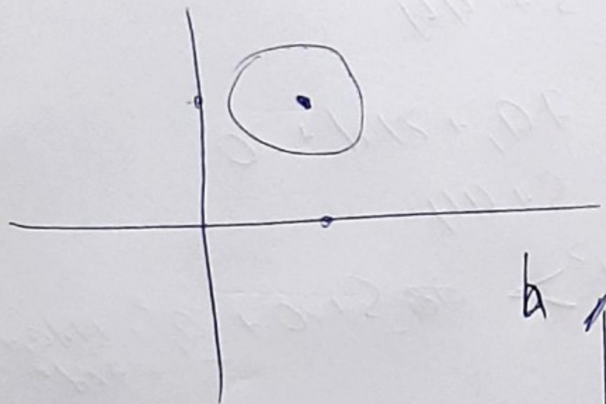
$a^2+b^2 > 4a-2b$

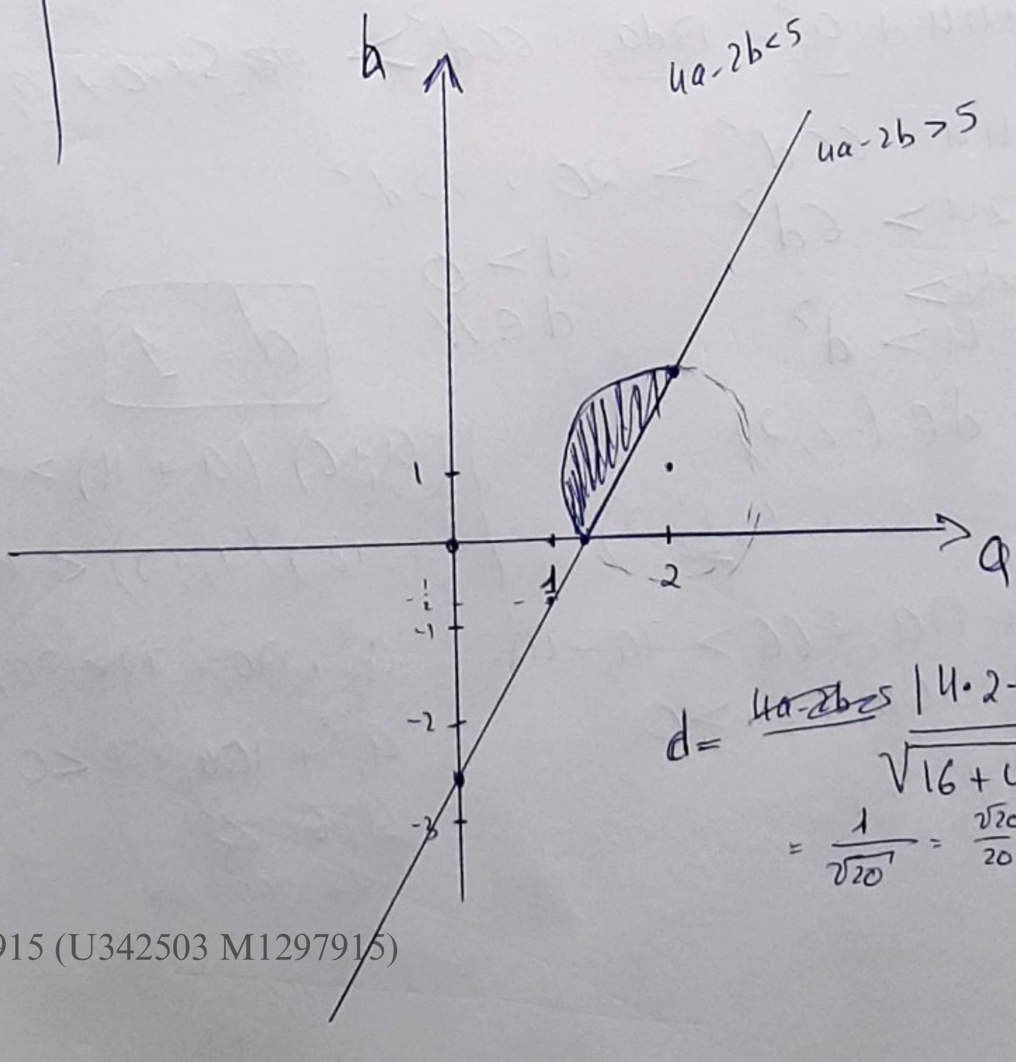
① $4a-2b<5$

$a^2+b^2 \le 4a-2b$

$(a-4a+4)+(b^2+2b+1)$

$(a-2)^2+(b+1)^2 \le 5$

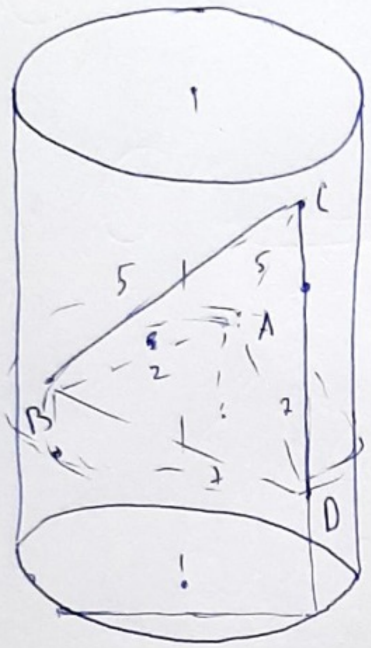




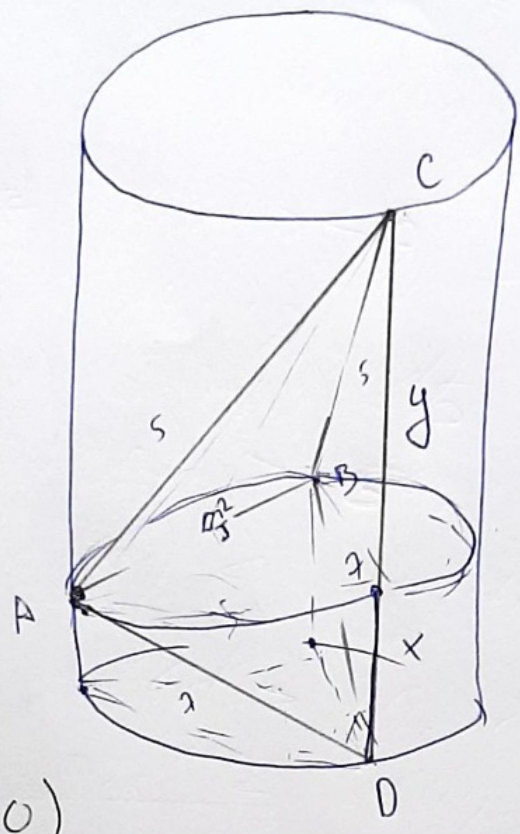
$d = \frac{~~4a-2b-5~~\ |4\cdot 2-2-5|}{\sqrt{16+4}} = \frac{1}{\sqrt{20}} = \frac{\sqrt{20}}{20} = \frac{2\sqrt{5}}{10}$

21102915 (U342503 M1297915)

Черновик



$S = \frac{ABC \cdot}{4R}$ $R \to min$
$S \to max$



$(2;1)$ $(\frac{5}{4};0)$

$\sqrt{(\frac{5}{4}-2)^2+1} = \sqrt{\frac{9}{16}+1} = \frac{5}{4}$

$\frac{4(1+\frac{\sqrt{3}}{2})-5}{2} =$

$= \frac{2\sqrt{3}-1}{2} = \sqrt{3}-\frac{1}{2}$

$4 \cdot (1-\frac{\sqrt{3}}{2}) =$

$= \frac{-2\sqrt{3}-1}{2} = -\sqrt{3}-\frac{1}{2}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102915**

ID профиля: **342503**

Вариант 18

Чистовик 1

№4: $НОД(a;b;c) = 15$

$НОК(a;b;c) = 3^{15} \cdot 5^{18}$

Мы знаем, что ~~НОД~~ ищя нод наших чисел, мы будем смотреть на их ~~р~~ каноничаский вид.

Понятно, что т.к НОК вида $3^{15} \cdot 5^{18}$ то каждое число $a = 3^{\alpha} \cdot 5^{\beta}$ Иначе в Ноке появился бы
$b = 3^{\gamma} \cdot 5^{\beta_1}$ другой простой множитель.
$c = 3^{k} \cdot 5^{\beta_2}$

в НОД ~~на~~ ~~н~~ чисел – ~~это~~ ~~на~~ входит min степень вхождения простого множителя среди $a; b; c$. Т.к $НОД = 3 \cdot 5 \Rightarrow$

$\min$ степень 3 в $a;b;c = 1$

$\min$ степень 5 в $a;b;c = 1$.

В НОК входит max степень вхождения простого множителя. т.е.

$\max$ степень 3 в $a;b;c = 15$

$\max$ степень 5 в $a;b;c = 18$.

$a = 3^{\alpha_1} \cdot 5^{\beta_1}$

$b = 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\beta_2}$

$c = 3^{\alpha_3} \cdot 5^{\beta_3}$.

Рассмотрим набор α_1 α_2 α_3:

Одна из α обязательно равна 1.

Одна из α обязательно равна 15.

Оставшаяся α может быть равна любому натуральному числу $[1;15]$.

Т.е всего наборов $\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$: $S_\alpha = C_3^2 \cdot 2 \cdot 15$

Аналогично с наборами β:

$S_\beta = C_3^2 \cdot 2 \cdot 18$.

~~Посчитаем наборы где все числа разные.~~

Тогда всего троек будет: $S_\alpha \cdot S_\beta = (C_3^2)^2 \cdot 4 \cdot 15 \cdot 18 =$

$= \left(\frac{3!}{2!}\right)^2 \cdot 4 \cdot 15 \cdot 18 = 6 \cdot 15 \cdot 18 = 90 \cdot 18 = 1620$ – если наборы считать разными.

$\begin{array}{r} 18 \\ 9 \\ \hline 162 \end{array}$

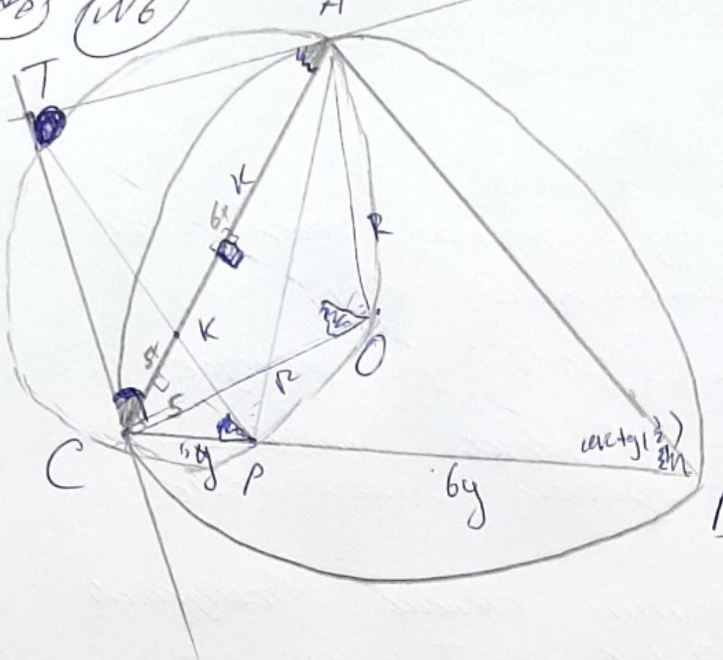
21102915 (U342503 M1297916)

№8 №6

Чистовик 2

$S_{APK}=6$

$S_{CPK}=5.$



① Заметим что $\frac{CK}{KA}=\frac{5}{6}$ из того что $S_{KPA}=6$ и $S_{CKP}=5$ у них общая высота. Н а CA.

② ~~Далее выр~~ Далее заметим, что $TAOC$ – дельтоид т.к $OC=OA$ как радиусы, $TA=TC$ как отрезки касательных. $\Rightarrow$ $TO \perp AC$ как диагонали дельтоида.

③ $\angle TOA = 90^\circ$ т.к OA – радиус к касательной.
$\Rightarrow \angle ACO = 90^\circ - \angle TOAC$, $\angle OTA = 90^\circ - \angle TOA$.
А угол $\angle TOA = \angle TOC$ из дельтоида $\Rightarrow \angle ATO = \angle ACO$ и они опираются на $AO \Rightarrow T$ лежит на окружности.

④ $\angle TPC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{TC} = \angle TAC$.
$\angle TAC = \angle ABC$ из того что угол между кас и хордой равен вписанному углу опирающемуся на ту же хорду
$\Downarrow$
$\angle TPC = \angle ABC \Rightarrow$ ~~$\triangle CKP$~~ $KP \parallel AB$ т.к соотв. углы равны $\Rightarrow \triangle CKP \sim \triangle CAB$

$k = \frac{CK}{CA} = \frac{5}{11} \Rightarrow \frac{S_{CKP}}{S_{CAB}} = k^2 = \frac{25}{121}$

21102915 (U342503 M1297916) $S_{CAB} = \frac{5 \cdot 121}{25} = \frac{121}{5}$.

$\frac{55}{275}$ $\frac{275}{3025}$

⑤ Пусть $CP = 5y$. Тогда PB очевидно $6y$.

⑥ $AB^2 = BP \cdot BC = 66y^2$ Из свойства касательной и секущей.

$AB = \sqrt{66}y$

⑦ В △ CKB. $\angle COK = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right)$ $(\angle COA = 2\angle CBA)$

Из $\sin \angle KOC = \frac{CK}{R} = \frac{5,4}{R} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ $R = 5,4 \cdot \sqrt{5}$

Из т. ~~косинусов в △ COA~~:

$\cancel{CA^2 = 30,28 \cdot 5x^2}$

Чистовик:

№5: ОДЗ: $\begin{cases} \frac{x}{3}+3>0 \\ 6x-14>0 \\ x-1>0 \\ x-1\neq 1 \\ \frac{x}{3}+3\neq 1 \\ 6x-14\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\frac{14}{6} \\ x\neq 2 \\ x\neq \frac{15}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\frac{7}{3} \\ x\neq 2{,}5 \end{cases}$

Все переходы далее в ОДЗ:

$$\overset{1}{2\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)},\ \overset{2}{2\log_{(6x-14)}(x-1)};\ \overset{3}{\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)}$$

~~① 1 = 2:~~ $\cancel{\begin{cases} 2\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14) = 2\log_{(6x-14)}(x-1) \\ \log_{(x-1)}\left(\left(\frac{x}{3}+3\right)(x-1)\right) = 2\log_{(6x-14)}(x-1) \end{cases}}$ ~~⇒~~

$\cancel{\log_{(x-1)}\left(\frac{x}{3}+3\right)+1 = 2\log_{\left(\frac{x}{3}+3\right)}(6x-14)}$

$\cancel{\frac{1}{\log_{\frac{x}{3}+3} x-1}+1 = 2\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)}$

$\cancel{1+\log_{\frac{x}{3}+3}(x-1) = 2\log_{\left(\frac{x}{3}+3\right)}(x-1)\cdot\log_{\left(\frac{x}{3}+3\right)}(6x-14)}$

Пусть $\frac{x}{3}+3=a$; $6x-14=b$; $x-1=c$. При x в ОДЗ:

$$2\log_a b;\quad 2\log_b c;\quad \log_c a$$

Заметим, что: $2\log_a b\cdot 2\log_b c\cdot \log_c a = 4$.

Пусть какие-то два равных числа равны k. Тогда третье $k-1$

$k^2(k-1)=4$

$k^3-k^2=4.$

	1	−1	0	−4
2	1	1	2	0

$\cancel{k}\ k^2+k+2=0$

$D<0.$

т.е если есть пара равных log. то они равны 2, а оставшийся равен 1.

Чистовик 5

(1) $2\log_a b = 2\log_b c \Rightarrow \begin{cases}\log_a b = 1\\ \log_b c = 1\\ \log_c a = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b\\ b=c\end{cases}$

(2) $2\log_a b = \log_c a \Rightarrow \begin{cases}\log_c a = 2\\ \log_a b = 1\\ \log_b c = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = c^2 \\ a = b \\ \log_{c^2} c = 1\end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} a = c^2 \\ a = b \\ \log_c c = 2\end{cases} \Leftrightarrow \varnothing$ т.к. $c \neq 1$

(3) $2\log_b c = \log_c a \Rightarrow \begin{cases}\log_b c = 1\\ \log_c a = 2\\ \log_a b = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=c \\ a=c^2 \\ a=b\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=c\\ c^2=c \\ a=b\end{cases} \Leftrightarrow \varnothing$ т.к. $c\neq 1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} c=1\\ a=b \\ b=c\end{cases} \Leftrightarrow \varnothing$

Тогда делаем об замену и решаем систему.

$\begin{cases}\frac{x}{3}+3 = 6x-14\\ 6x-14 = x-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+9 = 18x-42\\ 5x = 13\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{13}{5}\\ 17x = 51\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{13}{5}\\ x = 3\end{cases} \rightarrow x \in \varnothing$

(1) $2\log_{(\frac{x}{3}+3)}(6x-14) = 2\log_{6x-14}(x-1)^2 \Leftrightarrow$

$\begin{cases}\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14) = 1\\ \log_{6x-14}(x-1) = 1\\ \log_{x-1}(\frac{x}{3}+3) = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{x}{3}+3 = 6x-14\\ x-1 = \frac{x}{3}+3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+9 = 18x-42\\ 3x-3 = x+9\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3\\ x=6\end{cases} \quad x\in\varnothing$

чистовик 6

(2) $2\log_{\left(\frac{x}{3}+3\right)}(6x-14) = \log_{(x-1)}\left(\frac{x}{3}+3\right)$

$$\begin{cases} \log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)=1 \\ (x-1)^2=\left(\frac{x}{3}+3\right) \\ \cancel{\sqrt{6x-14}} = (x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{3}+3=6x-14 \\ (x-1)^2=\frac{x}{3}+3 \\ x^2-8x+15=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ (3-1)^2=1+3 \\ x=3 \text{ подходит} \end{cases}$$

$x=3$ (V)

(3) $2\log_{(6x-14)}(x-1) = \log_{(x-1)}\left(\frac{x}{3}+3\right)$

$$\begin{cases} 6x-14=x-1 \\ (x-1)^2=\frac{x}{3}+3 \\ \sqrt{\frac{x}{3}+3}=6x-14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{13}{5} \\ \cancel{\left(\frac{13}{5}-1\right)^2=\frac{13}{}} \end{cases}$$

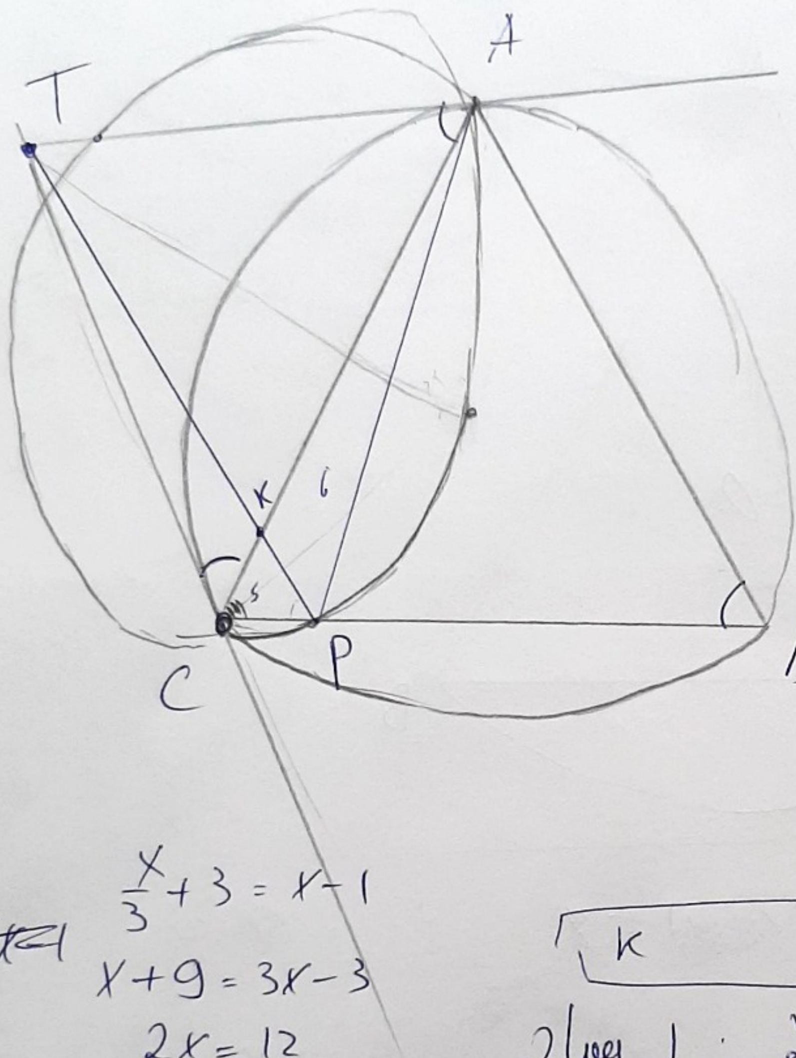
Проверим $x=\frac{13}{5}$: $\left(\frac{8}{5}\right)^2 = \frac{13}{15}+3$

$\underset{<3}{\frac{64}{25}} = \frac{58}{15} > 3 \Rightarrow$ равенство не возможно.

$\Rightarrow \{ \; x \in \varnothing$

Ответ: $x=3$

$BP \cdot BC = BA^2$



$k^2(k-1)$

$k^3 - k^2 = 4$

$k^3 - k^2 - 4 = 0$

1 −10 −4 −0

$\cancel{1}\ \cancel{1}$

1 −1 0 −4

2 1 1 2 0

$x^2 + x + 2 = 0$

$17x =$

$\frac{x}{3} + 3 = x - 1$

$x + 9 = 3x - 3$

$2x = 12$

$x = 6$

$\boxed{k \quad k \quad k-1}$

$b = c$

$c^2 = c$

$c \neq 1$

$2\log_a b,\ 2\log_b c,\ \log_c a$

$2\log_a b \cdot 2\log_b c \cdot \log_c a =$

$4 \cdot\ \ k^3 - k = 4$

1 0 −1 −4

1 1 1 0

2 $\cancel{1}$ $\cancel{2}$

1 2

1 0 −1 −4

−1 1 −1

1 0 −1 −4

$\frac{x}{3} + 3 = 6x - 14$

$x + 9 = 18x - 42$

$17x = 51$

$x = 3$