Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102912**

ID профиля: **374492**

Вариант 18

Чистовик

Задача 1 Дано: $a_1; a_2; a_3 \dots a_7; a_8; \dots a_n$ - арифметическая прогрессия возрастающая $\Rightarrow d>0$ возрастающ. прогрессия.

$$a_n = a_1 + d(n-1)$$

$$S_7 = S \quad ; \quad a_7 \cdot a_{12} > S + 20 \quad ; \quad a_9 a_{10} < S + 44.$$

$$S_7 = S = 7a_1 + d \cdot (\overset{7\cdot 3}{1+2+3+\ldots+6}) = 7a_1 + 21d.$$

$$a_7 = a_1 + 6d \qquad a_{12} = a_1 + 11d \qquad a_9 = a_1 + 8d \qquad a_{10} = a_1 + 9d.$$

$$\begin{cases} (a_1+6d)(a_1+11d) > 7a_1 + 21d + 20 \\ (a_1+8d)(a_1+9d) < 7a_1 + 21d + 44. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 17da_1 + 66d^2 > 7a_1 + 21d + 20 \\ a_1^2 + 17da_1 + 72d^2 < 7a_1 + 21d + 44 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underbrace{a_1^2 + 17da_1}+66d^2 > \underbrace{7a_1 + 21d} + 20 \\ \cancel{a_1^2 + 17} \\ \underbrace{7a_1 + 21d} + 44 > \underbrace{a_1^2 + 17da_1} + 72d^2 \end{cases} \quad (+)$$

$$44 + 66d^2 > 20 + 72d^2 \longleftrightarrow \underline{d^2 < 4} \xrightarrow{d>0} \underline{d \in (0;2)}$$

Прогрессия состоит из целых чисел $\Rightarrow d \in Z \xrightarrow{d>0} d \in N$

$\underline{\underline{d=1}}$. Тогда: $\begin{cases} a_1^2 + 17a_1 + 66 > 7a_1 + 21 + 20 \\ a_1^2 + 17a_1 + 72 < 7a_1 + 21 + 44. \end{cases}$

$$\begin{cases} (a_1+5)^2 > 0, \\ a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 \neq -5 \\ a_1 \in (-5-3\sqrt{2}; -5+3\sqrt{2}) \end{cases}$$

$$\underline{a_1 = -9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1}$$

$$\boxed{\text{Ответ: } -9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1}$$

Чистовик

Задача 3 M – фигура ∈ (xoy) из (x;y) удовлетворяющих:

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 5\\ a^2+b^2 \le \min(4a-2b,\ 5)\end{cases} \qquad S_M - ?$$

Решение: $a^2+b^2 \le \min((4a-2b),5)$ можно представить в виде

$$\begin{cases}a^2+b^2 \le 5\\ a^2+b^2 \le 4a-2b\end{cases} \qquad \begin{cases}a^2+b^2 \le (\sqrt5)^2\\ (a-2)^2+(b+1)^2 \le (\sqrt5)^2\end{cases}$$

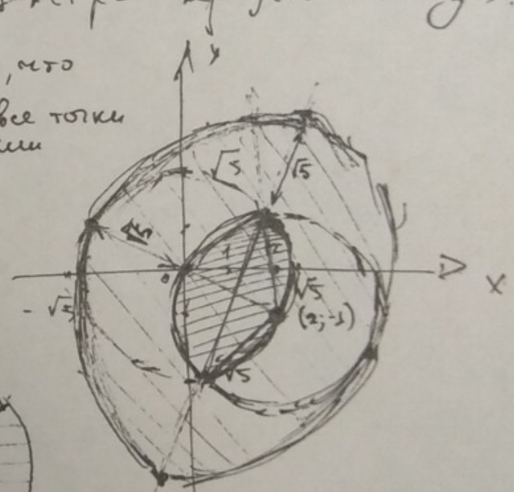
графики обоих неравенств в (aOb) сист. – круги с $R=\sqrt5$

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 5,\\ a^2+b^2 \le (\sqrt5)^2;\\ (a-2)^2+(b+1)^2 \le 5;\end{cases}$$

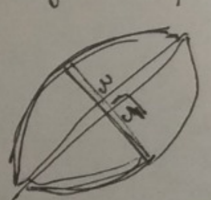
– график – круг с центром в (a; b) и радиусом $\sqrt5$.

Построим области возможных центров круга в (xoy).

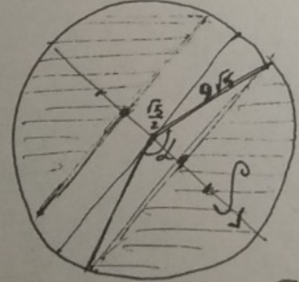
А теперь нарисуем фигуру M, зная, что она вкл. в себя все точки на расстоянии до $\sqrt5$



Получили



Её площадь можно найти из круга с $R = 2\sqrt5$



$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac14 \quad \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$

$\sin\alpha = 2\cdot\frac14\cdot\frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{\sqrt{15}}{8}$

$S_1 = S_{сек} - S_\Delta =$

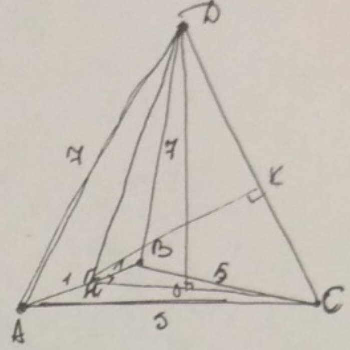
$= \frac{\arcsin\frac{\sqrt{15}}{8}}{\cancel{2\pi}}\cdot\cancel{\pi}\cdot\cancel{4}^{2}\cdot 5 - \frac{\sqrt{15}}{16}\cdot 4\cdot 5 = 10\arcsin\frac{\sqrt{15}}{8} - \frac{5\sqrt{15}}{4}$

$S_M = 2S_1 = 20\arcsin\frac{\sqrt{15}}{8} - 2{,}5\sqrt{15}$

$\boxed{\text{Ответ: } 20\arcsin\frac{\sqrt{15}}{8} - 2{,}5\sqrt{15}}$

(Чистовик)

Задача 2



Дано: ABCD- тетраэдр, вписан в цилиндр

AB = 2 AC = BC = 5 AD = BD = 7

Найти: DC ~~min~~ - ? при R_{min}

Решение: Все вершины тетраэдра принадлежат цилиндру (его БП) => D и C ∈ боковой поверхности.

DC ∥ оси цилиндра => DC принадлежит одной из образующих цилиндра

Т.к △ ADB и △ AKB - равнобедренные с общим основанием, то их высоты на AB падают в общую точку H, и ~~которая~~ будут серединным перпендикуляром к AB.

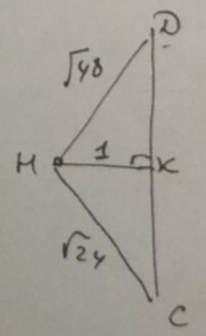
DO- высота тетраэдра упадёт на CH BO и (CHD) - плоскость перпендикулярная (ABC) и (ADB) т.к AB ⊥ (ADC)

Таким образом, CD всегда ⊥ AB, т.к DC ∈ (CDH)

=> AB всегда лежит в сечении цилиндра, перпендикулярном его оси, то есть является хордой окружности сечения

=> чтобы R было минимально AB = D = 2R → R = 1.

Тогда расстояние от середины AB (центра сечения) до DC (части образующей) будет равно R = 1 и ⊥ DC. H - середина AB => HK ⊥ DC и HK = R = 1



$DH = \sqrt{DB^2 - BH^2} = \sqrt{48}$

$CH = \sqrt{AC^2 - AH^2} = \sqrt{24}$

Тогда $DC = CK + DK = \sqrt{HD^2 - HK^2} + \sqrt{HC^2 - HK^2} =$

$= \sqrt{47} + \sqrt{23}$

$$\boxed{\text{Ответ: } \sqrt{47} + \sqrt{23}}$$

Черновик

$a_1 a_2 a_3 \dots a_7$ $\quad \underline{S_7}$ $\quad a_7 a_{12} > S + 20$

$a \in \cancel{Z}$. $\quad a_9 a_{10} < S + 44 \quad a_1 - ?$

$S_7 = 7a_1 + d \cdot \left(\frac{7 \cdot 6}{2}\right) = 7a_1 + 21d.$

$a_7 = a_1 + 6d$

$a_{12} = a_1 + 11d.$

$a_9 = a_1 + 8d$

$a_{10} = a_1 + 9d$

$\begin{cases} (a_1+6d)(a_1+11d) > 7a_1 + 21d + 20 \\ (a_1+8d)(a_1+9d) < 7a_1 + 21d + 20 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1^2 + 17da_1 + 66d^2 > 7a_1 + 21d + 20 \\ a_1^2 + 17da_1 + 72d^2 < 7a_1 + 21d + 44 \end{cases}$

$a_1^2 + 17da_1 + 66d^2 > 7a_1 + 21d + 20$

$7a_1 + 21d + 44 > a_1^2 + 17da_1 + 72d^2 \rightarrow 66d^2 + 44 > 20 + 72d^2$

$6d^2 < 24$

$d^2 < 4$

$\cancel{\boxed{d^2 > 1}}$ $\quad \boxed{|d| < 2}$

$\cancel{d > 0}$

$\underline{d>0}$ - возрастающая, т.к. целые числа, то

$d \in Z \; d > 0 \rightarrow d \in N \rightarrow \underline{d = 1}$

$a_1^2 + 17a_1 + 66 > 7a_1 + 21 + 20$

$a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0 \quad (a_1+5)^2 > 0 \quad a_1 \neq -5$

$a_1^2 + 17a_1 + 72 < 7a_1 + 21 + 44$

$a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0 \rightarrow (a_1+5)^2 < 18$

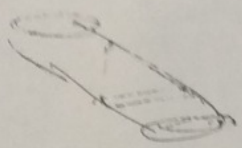
$D_1 = 25 - 7 = 18 = (3\sqrt{2})^2 \quad a_1 = -5 \pm 3\sqrt{2} \quad$ > -9 $\quad$ ok

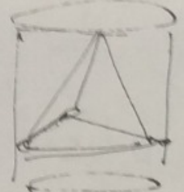
$\underline{a_1 \in (-5 - 3\sqrt{2}; -5 + 3\sqrt{2})}$

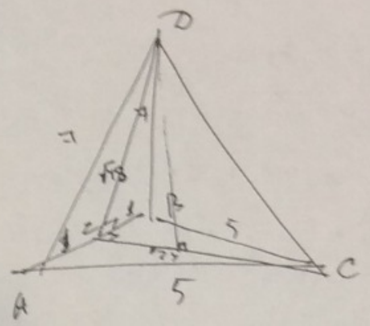
$-9; -8; -7 \dots -1$

$\underline{a_1 = -9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1.}$

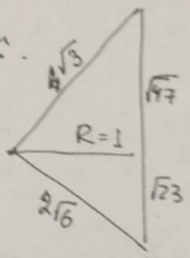
Черновик







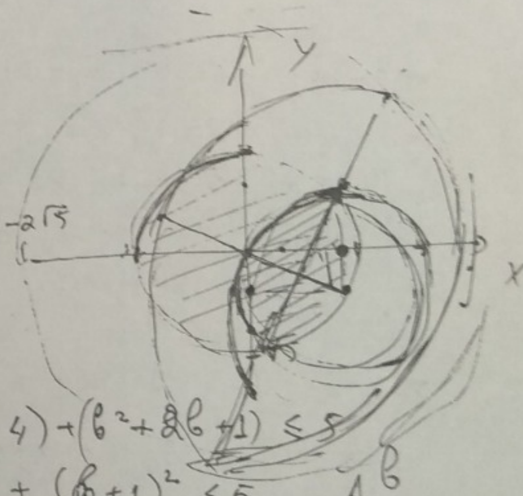
$CD \in$ б.П. цилиндра, т.к $C \in (\cdot)$ и $DC \parallel$ оси.



$AB = 2R \to R = 1$

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 5 \\ a^2+b^2 \le \min(4a-2b, 5) \end{cases}$$

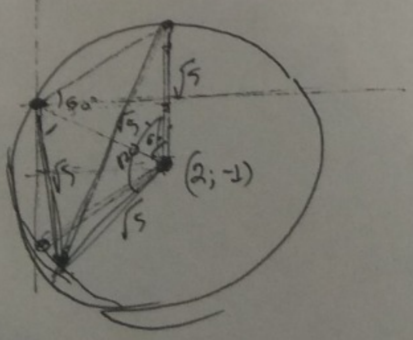
$$\begin{cases} \begin{cases} a^2+b^2 \le 5 \\ a^2+b^2 \le 4a-2b \end{cases} \to \min \checkmark \\ (x-a)^2+(y-b)^2 \le 5 \end{cases}$$

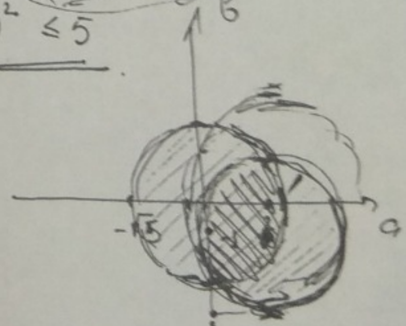


$a_{max} =$

$$(a^2-4a+4)+(b^2+2b+1) \le 5$$

$$(a-2)^2+(b+1)^2 \le 5$$





$$\begin{cases} a^2+b^2 = 5 \\ a^2+b^2 = 4a-2b \end{cases}$$

$S = \pi r^2 = 5\pi$.

$5 = 4a - 2b$.

$S_1 = \frac{5\pi}{3}$ $S' = \frac{5\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 = \frac{5\pi}{3} - \frac{5\sqrt{3}}{4}$

$4b^2 + 20b + 25 + 16b^2 = 80$ $4a = 2b + 5$

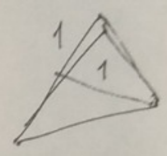
$20b^2 + 20b - 55 = 0$

$b = 1$

Черновик

$$S_M = 2\cdot 4\cdot S' = \frac{40\pi}{3} - 10\sqrt{3}$$

① $-9;\quad S = \frac{(3+9)\cdot 7}{2} = -42.\qquad a_7 = -3 \quad a_{12} = 2$



Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102912**

ID профиля: **374492**

Вариант 18

Чистовик

Задача 4 Найти число пар $(a; b; c)$ при которых

$$\begin{cases} НОД(a;b;c) = 15 \\ НОК(a;b;c) = 3^{15} \cdot 5^{18} \end{cases} \longrightarrow$$ Тогда $a = 15m$ $m \in N$

$b = 15n$ $n \in N$

$c = 15k$ $k \in N$.

$НОК(a;b;c) = 15 \cdot m \cdot n \cdot k = 3^{15} \cdot 5^{18}$ Причём m, n и k не имеют общих делителей.

$\boxed{mnk = 3^{14} \cdot 5^{17}}$ а т.к n, m и k не имеют НОД (он $= 1$), то

возможны лишь такие m, n и k тройки, что ~~так~~ m, n и k в любом порядке равны:

1) 3^x; 3^{14-x}; 5^{17} $\rightarrow$ 7 сочетаний $x \in N$ < 14.

2) 3^{14}; 5^x; 5^{17-x} $\rightarrow$ 8 сочетаний

3) $3^x 5^y$; 3^{14-x}; 5^{17-y} $\rightarrow$ $14 \cdot 17 = 238$ вариантов

Всего же различных троек $(a;b;c)$ таких как и $(m;n;k)$ будет $6 \times (\overset{253}{238 + 8 + 7}) = 1200 + 300 + 18 = 1518$ троек

Ответ: 1518 троек $(a;b;c)$

Чистовик

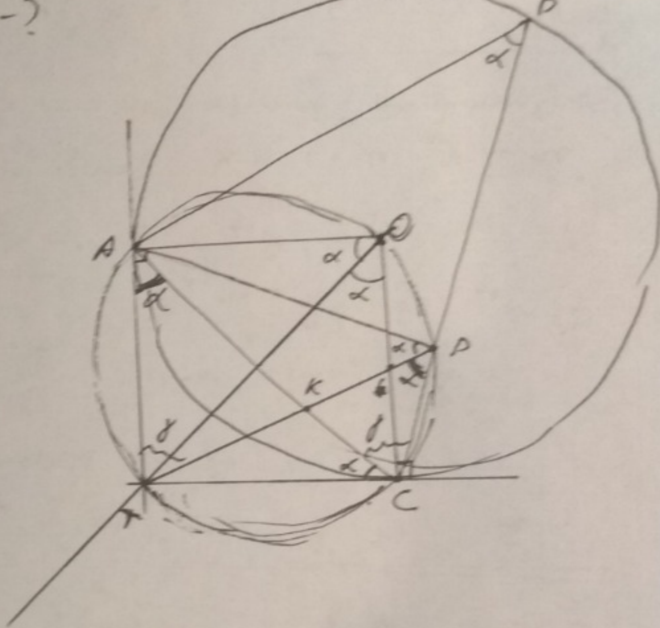
Задание 6.

Дано: ω описана около остроуг. △ABC.

Ω : = (A; O; C) $S_\triangle APK = 6$. $S_\triangle CPK = 5$.

Найти: а) S(△ABC) -?

б) ∠ABC = arctg $\frac{1}{2}$ AC-?



Решение:

а) T ∈ Ω, т.к.

∠ACT = ∠OAC = 90°

∠KPC = ∠TAC

(γ =) ∠KCP = ∠ATK (вписанные на одну дугу)

∠B = α ∠BAC = β ∠BCA = γ

∠ATC = 180° − 2α (∠AOC = 2∠B)

OT - бисс углов ∠ATC и ∠AOC

∠AOT = α = ∠APT = ∠ACT

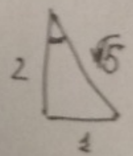
∠APC = 2α ∠APK = α → ∠KPC = α → $\underline{PK \parallel AB}$

$$\Rightarrow \frac{S(KPC)}{S(ABC)} = \left(\frac{KC}{CA}\right)^2 \quad \frac{KC}{CA} = \frac{S_\triangle PKC}{S_\triangle APC} = \frac{5}{11}$$

$$S(\triangle ABC) = \frac{121}{25} \cdot (S_\triangle KPC) = \frac{121}{5} = 24,2$$

$\boxed{\text{а) Ответ: } 24,2}$

б) Решение: $tg\,\alpha = \frac{1}{2}$. $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$



$AP \cdot PC \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin 2\alpha = 11$ $\quad \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$AC^2 = AP^2 + PC^2 - 2\cos 2\alpha\, AP \cdot PC$. PK - бисс ∠APC →

$AC^2 = AP^2 + PC^2 - 2\cos 2\alpha \cdot \frac{11 \cdot 2}{\sin 2\alpha}$. $\quad PA : PC = 6 : 5 = (AK : KC)$

$AC^2 = \frac{22}{\sin 2\alpha}\left(\frac{6}{5} + \frac{5}{6} - 2\cos 2\alpha\right) \Rightarrow$ см. сл. стр. $\quad AP^2 = \frac{11 \cdot 6 \cdot 2}{5 \sin 2\alpha}$. $\quad PC^2 = \frac{5}{6} \cdot \frac{11 \cdot 2}{\sin 2\alpha}$

Чистовик

$$AC^2 = \frac{22}{4}\cdot 5\left(\frac{\overset{61}{36+25}}{30} - 2\,\frac{3\cdot 6}{5\cdot 6}\right) = \frac{25\cdot \cancel{5}\cdot \overset{11}{\cancel{22}}}{\cancel{4}_2\cdot \cancel{30}_6} = \frac{25\cdot 11}{12}$$

$\sin 2\alpha = \frac{4}{5}$ $\cos 2\alpha = \frac{3}{5}$

$$AC = 5\sqrt{\frac{11}{12}} = \frac{5}{2}\sqrt{\frac{11}{3}}$$

$\boxed{5,\ \text{Ответ: } \frac{5}{2}\sqrt{\frac{11}{3}}}$

③

Черновик

наиб. общ. делитель

(4) $\begin{cases} НОД(a;b;c) = 15 \\ НОК(a;b;c) = 3^{15}\cdot 5^{18} \end{cases}$

н. общее кратное наименьшее.

$\begin{cases} 15\cdot n = a \\ 15\cdot m = b \\ 15\cdot k = c \end{cases}$ n, m и $k \in N$

n, m и k не имеют общих множителей.

$a \cdot$ ⋮ $3^{15}\cdot 5^{18}$

b ⋮

k –

$\boxed{3^{15}\cdot 5^{18} = nmk\cdot 15}$

$\boxed{3^{14}\cdot 5^{17} = nmk}$

$3^n\cdot 5^m$ и 3^n и 5^m

Чтобы не было общих множителей:

либо (3^n и 5^m) либо ($3^n 5^m$ и 3^2 и 5^n)

2:1 1:2 1:1:1

Возможные перетасовки

$\times 6$.

1) $3^n + 3^k + 5^m$

$3^n + 3^{14-n} + 5^m$ $m = 17$.

7 вариантов.

2) $5^n + 5^{17-n} + 3^n$ $n = 13$

8 вариантов

3) $3^n 5^m + 3^{14-n} + 5^{17-m}$

$14\cdot 17 = 170 + 68 = 238$ вариантов

$(7+8+138)\cdot 6 = \cancel{918}$.

$15 \cdot 18 =$

$= 150 + 120 =$

$= 370$

---

(5) $\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)$; $\log_{6x-14}(x-1)^2$; $\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)$

a b c^2 c a^2

возрастающий возрастающий.

$\Delta y = 1$ $y_1 = y_2$ $(y_1 - y_3 = 1)$

$\begin{cases} \frac{x}{3}+3>0 \\ \frac{x}{3}+3 \ne 1 \\ 6x-14>0 \\ 6x-14\ne 1 \\ x-1>0 \\ x-1\ne 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x>-9 \\ x\ne -6 \\ x>\frac{7}{3} \approx 2\frac{1}{3} \\ x \ne \frac{5}{2} = 2{,}5 \\ x>1 \\ x\ne 2 \end{cases}$

$x \in \left(\frac{7}{3}; 2{,}5\right) \cup (2{,}5; +\infty)$

$\left[\begin{array}{l} \log_a b = \log_b c^2 \\ \log_b c^2 = \log_c a^2 \\ \log_a b = \log_c a^2 \end{array} \right.$

$\log_a b$; $2\log_b c$; $2\log_c a$

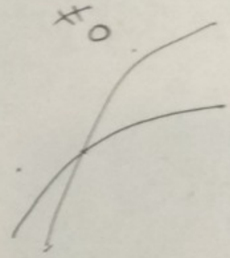
Черновик

(5) 1) $\log_a b = \log_b c^2$

$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}} (6x-14) = \log_{6x-14} (x-1)^2 \leftrightarrow \frac{\log(6x-14)}{\log\sqrt{\frac{x}{3}+3}} = \frac{\log(x-1)^2}{\log_{6x-14}}$

$\log^2(6x-14) = \log(x-1)^2 \log\sqrt{\frac{x}{3}+3}$. $\neq 0$ $\neq 0$

$x=3: \log^2(4) = \log(4)\log 2$



~~log~~ $\frac{\ln b}{\ln a}$ $\cdot \frac{2\ln c}{\ln b}$ $\cdot \frac{2\ln a}{\ln c}$

$\begin{cases} \ln^2 b = 2\ln a \ln c \\ \frac{\ln b}{\ln a} = 1 + \frac{2\ln a}{\ln c} \end{cases}$ $\begin{cases} 2\ln^2 c = 2\ln a \ln b \\ \frac{2\ln c}{\ln b} - \frac{\ln b}{\ln a} = 1 \end{cases}$ $\to$

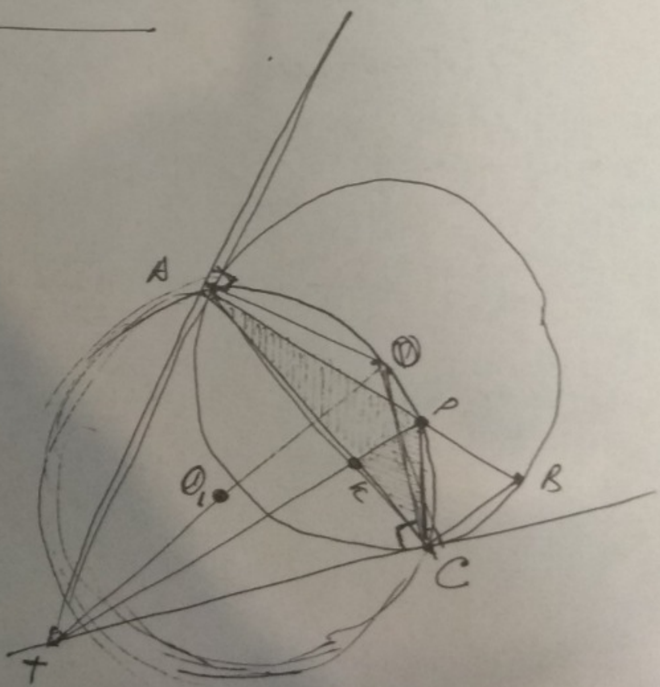
$\begin{cases} \frac{\ln b}{\ln a} = \frac{2\ln c}{\ln b} \\ \frac{\ln b}{\ln a} = 1 + \frac{2\ln a}{\ln c} \end{cases} \to \frac{2\ln c}{\ln b} = 1 + \frac{\ln a}{\ln c}$

$\begin{cases} \frac{2\ln c}{\ln b} = \frac{\ln a}{\ln c} \\ 2\frac{\ln c}{\ln b} = 1 + \frac{\ln b}{\ln a} \end{cases} \to$

---

(6) $S_\triangle APK = 6$ $S_\triangle CPK = 5$

a) $S_\triangle(ABC) - ?$



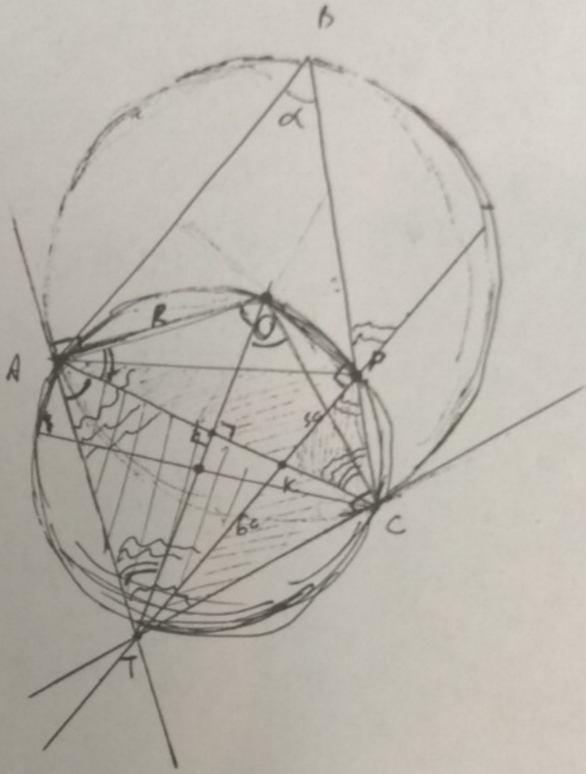
21102912 (U374492 M1298812)

(Черновик)

$S_\triangle APK = 6 \quad AK:KC = 6:5$

$S_\triangle CPK = 5.$

$S_\triangle ABC - ?$



$AK \cdot KC = PK \cdot KP = 30$

$\frac{PK}{5} = \frac{6}{}$

$11 = \cancel{PC}.$

$\frac{\sin 2\alpha \cdot PA \cdot PC}{2} = 11$

$\boxed{\cos\alpha \sin\alpha \, PA \cdot PC = 11}$

$PC^2 + AP^2 - 2\cos 2\alpha \, PC \cdot AP = AC^2$

$\frac{AC \cdot PA \cdot AC}{4r} = 11.$ $\quad \frac{AC}{2r} = \sin 2\alpha$

$\boxed{AC = 2r \sin 2\alpha}$

$\frac{S_\triangle ABC}{S_\triangle APC} = \frac{PC.}{CB}$

$S_\triangle CTK = S_\triangle APK = 6$

APCT – трапеция

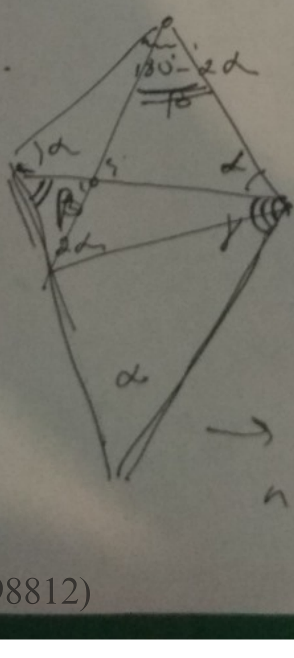
$S(\triangle ATK) = \frac{6}{5} \cdot 5 = 6.$

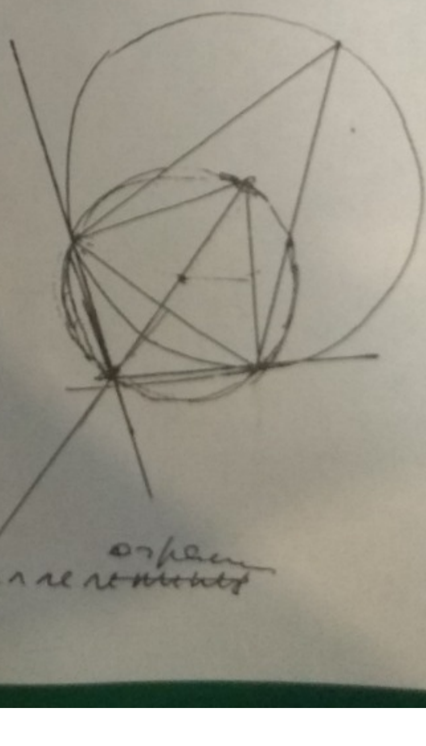
$T \in$ описок (OAC)

$\angle A = 180° - 2\alpha$

$180° - (180° - (\alpha + \beta) + \beta) =$

$= \alpha$





→ параллельные отрез

③

21102912 (U374492 M1298812)