Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102903**

ID профиля: **892228**

Вариант 18

Чистовик

N 1

~~a_i - целое число.~~

a_1, a_2, a_3 - целые числа. Пусть x - разность арифметической прогрессии, тогда $x = a_2 - a_1 \Rightarrow x$ тоже целое

$$S = a_1+a_2+\ldots+a_7 = \frac{a_1+a_7}{2}\cdot 7 = \frac{2a_7-6x}{2}\cdot 7 = (a_7-3x)\cdot 7$$

$a_7 a_{12} = a_7(a_7+5x)$ $\quad a_7^2+5xa_7 > S+20$

$a_9 a_{10} = (a_7+2x)(a_7+3x)$ $\quad a_7^2+5xa_7+6x^2 < S+44$

$$\begin{cases} a_7^2+5xa_7 > (7a_7-21x)+20 \\ a_7^2+5xa_7+6x^2 < (7a_7-21x)+44 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Следовательно так как ~~Так как~~ $a_7^2+5xa_7 > 7a_7-21x+20$,

то $6x^2 < 44-20 \Leftrightarrow x^2<4$; $x=1$ (так как по усл. $x>0$)

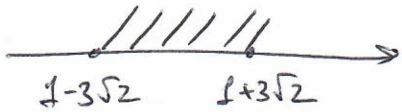
(~~сист.~~ $a_7^2-5xa_7+6x^2<(7a_7-21x)+44$)

Разность арифметической прогрессии $x = 1$.

$$\begin{cases} a_7^2+5a_7 > 7a_7-1 \\ a_7^2+5a_7+6 < 7a_7+23 \end{cases} \quad \begin{matrix} (a_7-1)^2>0 \\ \Rightarrow a_7^2-2a_7-17<0 \end{matrix} \Rightarrow$$

Пусть $a_7^2-2a_7-17=0$

$$a_7 = \frac{2\pm\sqrt{4+4\cdot 17}}{2} = 1\pm 3\sqrt{2}$$



~~т~~ значит $1-3\sqrt{2} < a_7 < 1+3\sqrt{2}$

$-3 \le a_7 \le 5$, $a_7 \ne 1$

$-9 \le a_1 \le -1$, кроме $a_1 = -5$

Чистовик

№1

$a_1=-9$

$S=(-6)\cdot 7=-42$

$a_7 a_{12}=(-3)\cdot 2=-6>S+20$

$a_9 a_{10}=(-1)(0)=0<S+44$

подходит

$a_1=-8$

$S=(-5)\cdot 7=-35$

$a_7 a_{12}=(-2)(3)=-6>S+20$

$a_9 a_{10}=(0)(1)=0<S+44$

подходит

$a_1=-7$

$S=(-4)\cdot 7=-28$

$a_7 a_{12}=(-1)(4)=-4>S+20$

$a_9 a_{10}=(1)(2)=2<S+44$

подходит

$a_1=-6$

$S=(-3)7=-21$

$a_7 a_{12}=(0)(5)=0>S+20$

$a_9 a_{10}=(2)(3)=6<S+44$

подходит

убедимся, что не подходит $a_1=-5$

$\boxed{a_1=-5}$

$S=(-2)7=-14$

$a_7 a_{12}=(1)6=6 \ngtr S+20$

$a_9 a_{10}=3\cdot 4=12<S+44$

не подходит

$a_7 a_{12}=1\cdot 6=S+20$

$a_1=-4$

$S=(-1)\cdot 7=-7$

$a_7 a_{12}=14>S+20$

$a_9 a_{10}=20<S+44$

подходит

$a_1=-3$

$S=0$

$a_7 a_{12}=24>S+20$

$a_9 a_{10}=30<S+44$

подходит

$a_1=-2$

$S=7$

$a_7 a_{12}=36>S+20$

$a_9 a_{10}=42<S+44$

подходит

$a_1=-1$

$S=14$

$a_7 a_{12}=50>S+20$

$a_9 a_{10}=56<S+44$

подходит

($a_1=0$

$S=21$

$a_7 a_{12}=66>S+20$

$a_9 a_{10}=72 \cancel{<65}$

не подходит

$a=-10$

$S=-49$

$a_7 a_{12}=-4>S+20$

$\cancel{a_9 a_{10}=0<-5}$

не подх.)

Ответ: $-9, -8, -7, -6, -4, -3, -2, -1$.

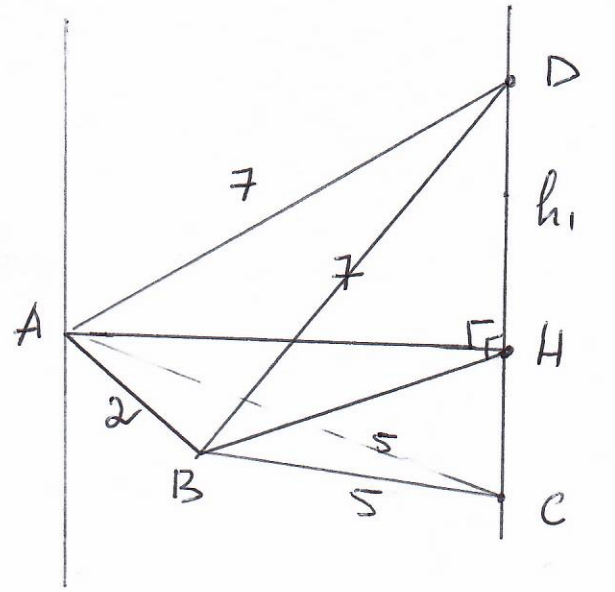
Чистовик

№2

Дано:
тетр. $ABCD$
$AB=2$, $AC=CB=5$;
$AD=DB=7$
$CD \parallel$ оси цил.
$r_{min} \Rightarrow$

CD - ?

h_1 - длина DH
h_2 - длина CH

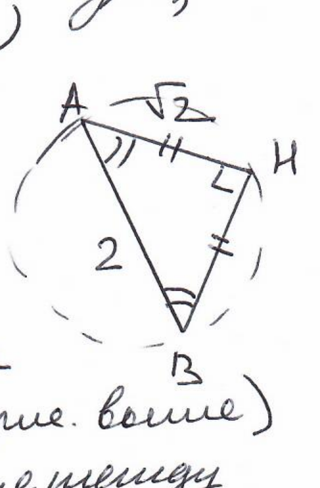


Решение

~~1) Опустим перпендикуляр из т. A на CD, основание перпендикуляра назовем H, тогда $AD^2 = AH^2 + h_1^2 = BD^2 = h_1^2 + BH_1^2$, где H_1 - основание перпендикуляра.~~ ~~Опустим теперь перп. из т. B на CD, основание его - т. H_1~~
~~$BD^2 = h$~~

1) Заметим, что пл-ть ABH перпендикулярна оси цилиндра, ~~тогда~~ (H - основание перпендикуляра, проведенного из т. A на CD). Тогда $r_{цил} \geq AB/2 \Leftrightarrow r_{min} = AB/2 = 1$
(AB может быть диаметром цилиндра, но больше, чем $2r$ быть не может)

2) По теор. Пифагора $h_1^2 = 7^2 - AH^2$;



$h_2^2 = 5^2 - AH^2$, $AH = \sqrt{2}$
($AH = BH$, т.к. $AH^2 + h_1^2 = AD^2 = BH^2 + h_1^2$)
$h_1^2 = 7^2 - 2 = 47$; $h_2^2 = 23$; $CD = h_1 \pm h_2$

3) $CD = h_1 + h_2 = \sqrt{47} + \sqrt{23}$ (как показ. на рис. выше)
$CD = h_1 - h_2 = \sqrt{47} - \sqrt{23}$ (т. C находится между т. D и т. H)

Ответ: $\sqrt{47} + \sqrt{23}$; $\sqrt{47} - \sqrt{23}$

Участовии

№3

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 5 & (1)\\ a^2+b^2\le \min(4a-2b,5) & (2)\end{cases}$$

$$\begin{cases}a^2+b^2\le 4a-2b\\ a^2+b^2\le 5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(a-2)^2+(b+1)^2\le 5\\ a^2+b^2\le 5\end{cases} \text{ - 2 окружности}$$

Найдём точки пересечения окружностей

$$\begin{cases}(a-2)^2+(b+1)^2\le 5\\ a^2+b^2\le 5\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a^2+b^2=4a-2b\\ a^2+b^2=5\end{cases} \Rightarrow 4a-2b=5$$

$$a=\frac{2b+5}{4} \Rightarrow a^2+b^2=\left(\frac{2b+5}{4}\right)^2+b^2=5$$

$$\frac{4b^2+20b+25}{16}+16\frac{b^2}{16}=\frac{20b^2+20b+25}{16}=5$$

$$20b^2+20b+25=80$$

$$4b^2+4b-11=0$$

$$b=\frac{-4\pm\sqrt{4^2+4^2\cdot 11}}{8}=\frac{-1\pm 2\sqrt{3}}{2}$$

$\nearrow a=\frac{2b+5}{4}=\frac{2+\sqrt{3}}{2}$

$\searrow a=\frac{2b+5}{4}=\frac{2-\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow$ У окружностей 2 т. пересечения

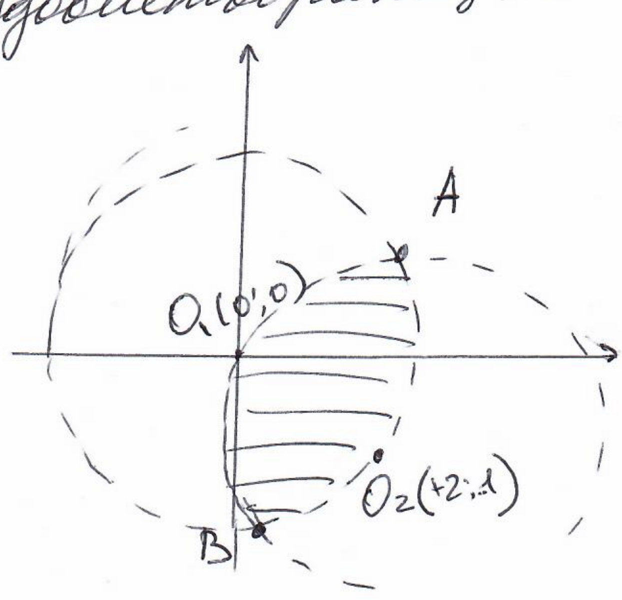
(A) 1 т. $\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2};\frac{2\sqrt{3}-1}{2}\right)$ и (B) 2 т. $\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2};\frac{-1-2\sqrt{3}}{2}\right)$

На рисунке изображено множество пар $(a;b)$, удовлетворяющих второму (2) условию

(окружности проходят через центры друг друга $R_{\text{окр}}=\sqrt{5}=\sqrt{2^2+1^2}$)

подберём $X(x;y)$, удовл. мн-ву $(a;b)$, изображ. правее.

стр 4 и 4



Черновик

N1

X целые

$a_7 a_{12} > S+20$

$a_9 a_{10} < S+44$

$a_1 - ?$

$a_1, a_2, a_3, \dots a_7, a_8, \dots$

$S = a_1 + a_2 + \dots + a_7 = \frac{a_1+a_7}{2} \cdot 7$

$S = \frac{2a_7 - 6x}{2} \cdot 7 = (a_7 - 3x)7$

$(a_1+3)7 = S$

$(a_1+6)(a_1+11) > S+20$

$(a_1+8)(a_1+9) < S+44$

$a_1^2 + 17a_1 + 66 > S + 20$

$a_1^2 + 17a_1 + \cancel{72} 28 < S + \cancel{44}$

$7a_1 + 3$

$a_7(a_7+5x) > (a_7-3x)7+20$

$(a_7+2x)(a_7+3x) < (a_7-3x)7+44$

$a_7^2 + 5xa_7 > 7a_7 - 21x + 20$

$a_7^2 + 5xa_7 + 6x^2 < 7a_7 - 21x + 44 - 24 + 24$

$6x^2 < 24$

$x^2 < 4$

$x = 1$ т.к. все a_i цел.

- это мест. числ

$S = (a_7 - 3)7 = 7a_7 - 21$

$a_7(a_7+5) > 7a_7 - 1$

$(a_7+2)(a_7+3) < 7a_7 + 23$

$\cancel{a_7^2 + 5a_7 + 6 < 7a_7 + 23}\ 17$

$\cancel{a_7^2 + 5a_7 > 7a_7 - 1}$

$a_1^2 + 17a_1 + 28 < 7a_1 + 3$

$a_1^2 + 10a_1 + 25 < 0$

$a_1^2 + 10a_1 + 43 > 0$

$a_1^2 + 10a_1 + 25 < 0$

$7a_7$

$a_7 = \frac{2 \pm \sqrt{4+4 \cdot 17}}{2} = 1 \pm 3\sqrt{2}$

$3{,}4 + 1 = \approx 5{,}2$

$1-4{,}2 = -3{,}2$

стр 1 из 6

Черновик

a

$a_7 - 3 =$
$= a_1 + \cancel{3}$

$a_7^2 + 5a_7 + 6 < 7a_7 \underbrace{-21 + 44}_{+23}$

0 1 2 3 4 5 6 . . 8 9 10 11 12

a_7

$a_7^2 - 2a_7 - 17 < 0$

$S = 21$

$a_7 a_{12} = 66 >$

$a_9 a_{10} = 72 < 44 + 21$

65

$a_7^2 + 5a_7 > 7a_7 - 1$

$(a_1 + 3) \cdot 7$

$(-5) \cdot 7$

$a_7 = -2 \quad -5$

$a_7^2 - 2a_7 + 1 > 0$

$(a_7 - 1)^2 > 0 \quad \cancel{a_7 \neq 0} \quad \cancel{a_7 \neq -6}$

$a_7^2 + 5a_7 + 6 < 7a_7 + 23$

$a_7^2 - 2a_7 - 17 < 0$

$3\sqrt{2} - 1 \quad 4 \quad 5 \quad 3\sqrt{2} + 1$

$1{,}4 \cdot 3 = 4{,}2 - 1$

$3 \cdot 1{,}4 + 1$
$5{,}2$

$a_7 = \dfrac{+2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 17}}{2} = +1 \pm 3\sqrt{2}$

~~-2 -1 0 1 2 3 4~~

~~-1 0 1 2 3 4 5~~

$\boxed{\begin{array}{l} a_7 = 4 \\ a_1 = -2 \end{array}}$ $\quad$ $\boxed{\begin{array}{l} a_7 = 5 \\ a_1 = -1 \end{array}}$

$S = (2) \cdot 7 = 14\ 7$ $\quad$ $S = 2 \cdot 7 = 14$

$a_7 a_{12} = 4 \cdot 9 = 36 > \cancel{14} + 20$

$a_9 a_{10} = 6 \cdot 7 = 42 < \cancel{7} + 44$

~~подх~~

~~$5 \cdot 10 = 50$~~

-1 0 1 2 3 4 5, 6, 7 9 10

$a_7 \quad a_8 \quad a_9 \quad 0$

~~Ответ: -2, -1~~

$a_7 a_{12} = 50 > 14 + 20$

21

$6 \cdot 11 >$

$90 < 44 + 66 \quad a_9 a_{10} = 7 \cdot 8 = 56 < 14 + 44$

подх

возраст прогр
разность > 0

$a_7^2 - 2a_7 + 1 > 0$

min(x, y) – минимум
из двух чисел
x и y

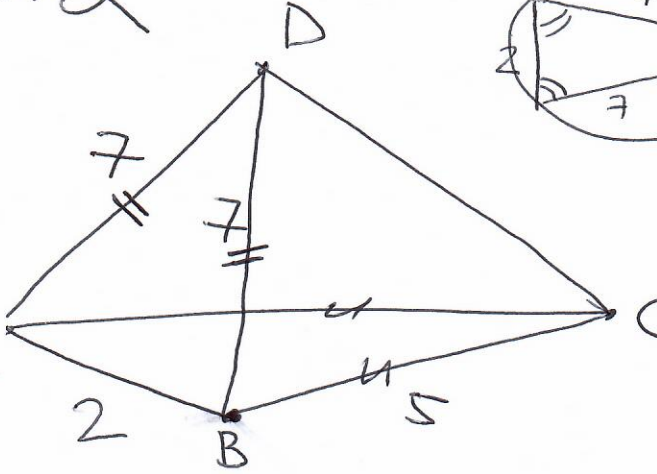
$a_7^2 - 2a_7 - 17 \geq 0$

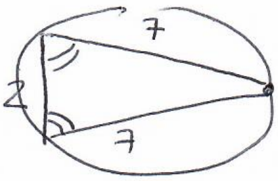
$a_7^2 - 2a_7 - 17$

стр 2 из 6

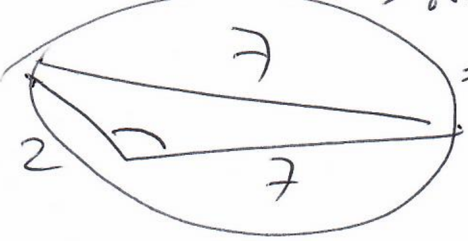
Черновик №2

$AC = CB = 5$
$AB = 2$
$AD = DB = 7$





$R_{оп_1} = \frac{7}{2 \cdot \frac{4\sqrt{3}}{7}} = \frac{49}{8\sqrt{3}} = \frac{49\sqrt{3}}{24}$



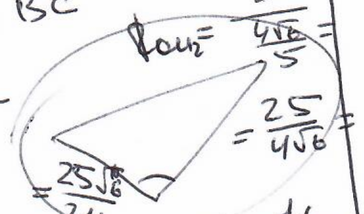
$\cos\alpha = \frac{4}{4 \cdot 7} = \frac{1}{7}$
$\sin\alpha = \frac{\sqrt{48}}{7} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$

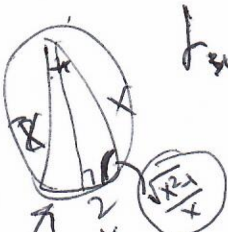
$DB + BC$

$CD < 12$

$R_{оп_2} = \frac{5}{\frac{4\sqrt{6}}{5}} = \frac{25}{4\sqrt{6}} = \frac{25\sqrt{6}}{24}$

$\cos\alpha = 1/5$
$\sin\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$





$R_{оп} = \frac{x}{2\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}} = \frac{x^2}{2\sqrt{x^2-1}}$

$a = 7\cos\alpha = 5\cos\beta$

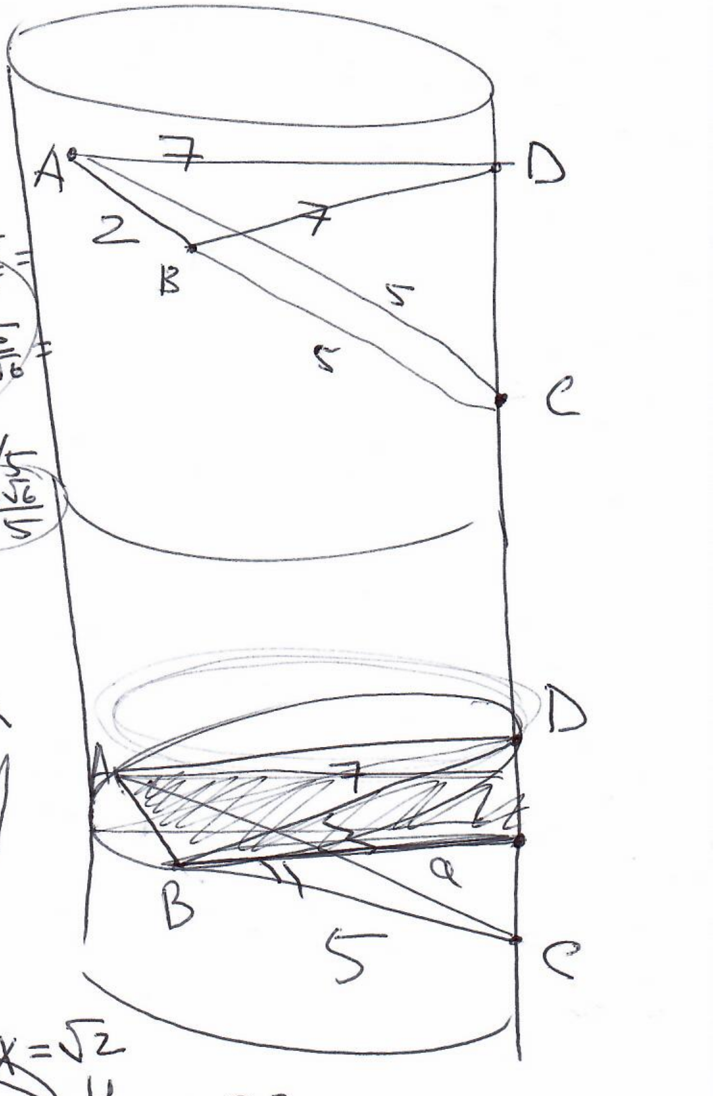
$R_{оп_1} \cdot \cos\alpha = R_{оп_2} \cdot \cos\beta$

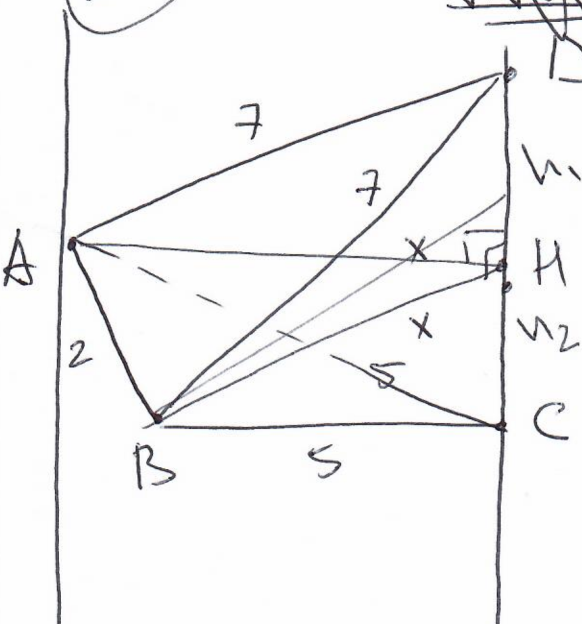
$\frac{\cancel{49}\,7\sqrt{3}}{\cancel{24}} \cos\alpha = \frac{\cancel{25}\,5\sqrt{6}}{24} \cdot \frac{\cancel{7}}{5}\cos\alpha$

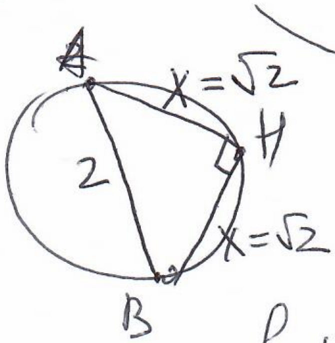
$R_{min} = 2$

$D = 2$

$R = $





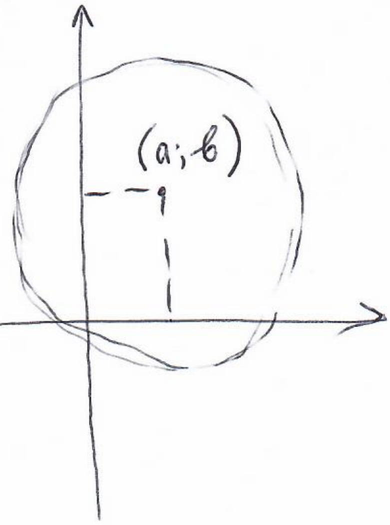


$h_1^2 = 7^2 - x^2 = 49 - 2 = 47$
$h_2^2 = 25 - 2 = 23$
$h_1 + h_2 = \sqrt{47} + \sqrt{23}$
$h_1 - h_2 = \sqrt{47} - \sqrt{23}$

стр 3 из 6

Черновик

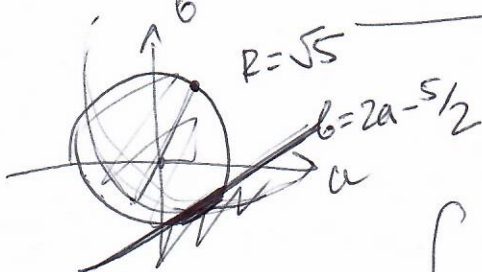
N3 $S_м$ - ?



$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 5$

$a^2+b^2 \le \min(4a-2b, 5)$

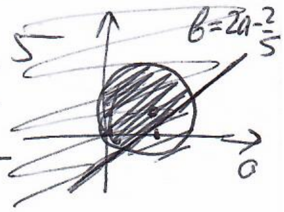
$\cancel{2\sqrt{5} \vee \sqrt{5}}$
$\cancel{20>15}$
5
$\cancel{2 \vee \sqrt{5}}$
$\cancel{2\sqrt{5} \vee 20}$



$$\begin{cases} a^2+b^2 \le 5 \\ 4a-2b \ge 5 \quad b \le 2a-5/2 \\ (x-a)^2+(y-b)^2 \le 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a-2b < 5 \\ a^2+b^2 \le 4a-2b \\ (x-a)^2+(y-b)^2 \le 5 \end{cases}$$

$b > 2a - \frac{2}{5}$



$4a-2b<5$

$a^2+b^2 \le 5$
$-4a+2b<5 \Rightarrow (a-2)^2+(b+1)^2<15$

$(a-2)^2+(b+1)^2 \le 5$

$\cancel{b=-1}$
$\cancel{a=2}$

$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 5$

$a_7=-3$

$S=-42$

$a_7 a_{12} = -6 > -22$

$a_9 a_{10} = -1 \cdot 0 < -42+44$

$-4 \vee 1-3\sqrt{2}$
$-3 \vee -3\sqrt{2}$
$25>18$

стр 4 из 6

$(x-a)^2+(y-b)^2 \leq 5$ Черновик

$a^2+b^2 \leq \min(4a-2b, 5)$

$$\begin{cases}(a-2)^2+(b+1)^2 \leq 5 \\ a^2+b^2 \leq 5\end{cases} \rightarrow -4a+2b=-5$$

т. пер

$4a-2b=5$

$a=\frac{5+2b}{4}$

$\left(\frac{5+2b}{4}\right)^2+b^2=5$

$\frac{4b^2+20b+25}{16}+b^2=5$

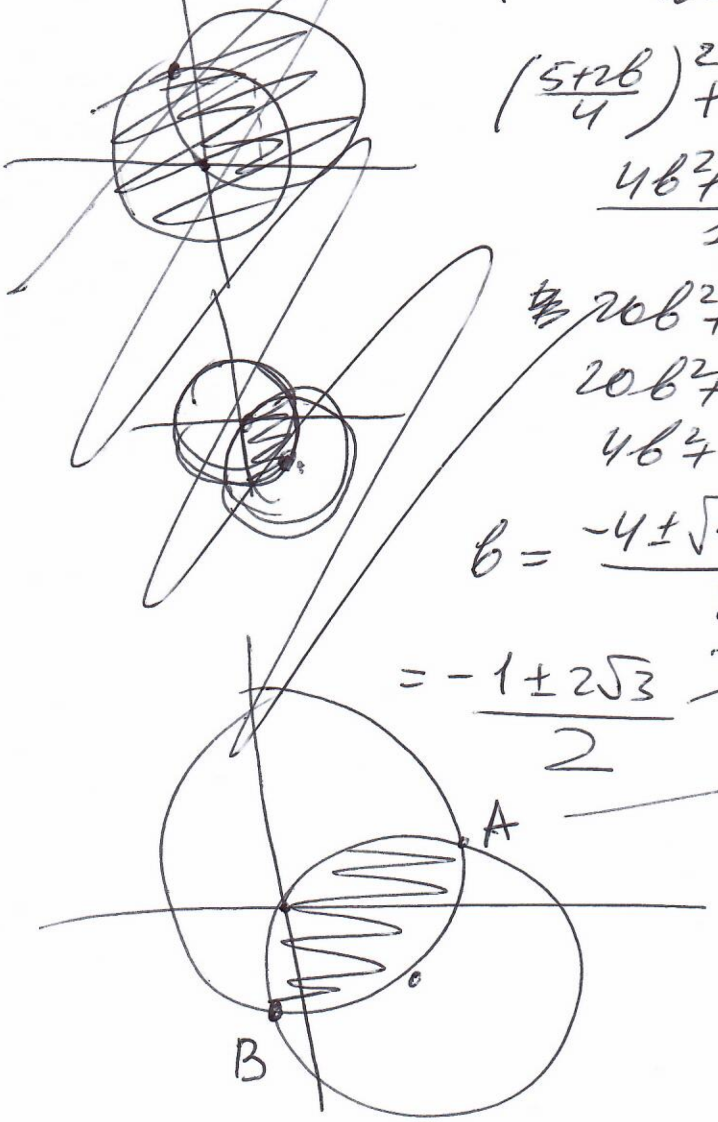
$20b^2+20b+25=5\cdot 16=80$

$20b^2+20b-55=0$

$4b^2+4b-11=0$

$b=\frac{-4\pm\sqrt{4^2+4^2\cdot 11}}{8}=\frac{-1\pm\sqrt{12}}{2}=$

$=\frac{-1\pm 2\sqrt{3}}{2} \rightarrow a=\frac{5+2b}{4}$



$\frac{2-\sqrt{3}}{2} \vee 0$

ABCD-тетраэдр №2

$AB=2$

$AC=CB=5$

$AD=DB=7$

Рассмотрим всевозможные цилиндры

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102903**

ID профиля: **892228**

Вариант 18

Числовик

№4

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=15 \\ НОК(a;b;c)=3^{15}\cdot 5^{18} \end{cases}$$

Пусть $a=3^{\alpha_1}\cdot 5^{\alpha_2}$, $b=3^{\beta_1}\cdot 5^{\beta_2}$; $c=3^{\gamma_1}\cdot 5^{\gamma_2}$,

тогда $НОД(a;b;c)=3^{\min(\alpha_1;\beta_1;\gamma_1)}\cdot 5^{\min(\alpha_2;\beta_2;\gamma_2)}=15$

$НОК(a;b;c)=3^{\max(\alpha_1;\beta_1;\gamma_1)}\cdot 5^{\max(\alpha_2;\beta_2;\gamma_2)}=3^{15}\cdot 5^{18}$

Значит $\min(\alpha_1;\beta_1;\gamma_1)=1$; $\max(\alpha_1;\beta_1;\gamma_1)=15$

$\Rightarrow$ $\alpha_1;\beta_1;\gamma_1$ могут быть $1, 15, a$, где $a=1, 2, 3, 4, \dots, 15$

Если $a=1$, то троек, удовлетворяющих условию, будет 3 штуки: $(1,1,15)$, $(1;15,1)$, $(15,1,1)$

Если $1<a<15$, то троек 6 штук: $(1,15,a)$; $(15,1,a)$, $(a;1,15)$, $(a;15,1)$, $(1,a,15)$ и $(15,a,1)$ $(a=2,3,\dots,14)$

~~Возможные тройки $(\alpha_1;\beta_1;\gamma_1)$ всего 87е~~

Если $a=15$, то троек 3 штуки.

Значит всего троек $(\alpha_1;\beta_1;\gamma_1)$ $3+3+6\cdot 13=84$

Аналогично посчитаем всевозможные тройки чисел $(\alpha_2;\beta_2;\gamma_2)$

$\min(\alpha_2;\beta_2;\gamma_2)=1$; $\max(\alpha_2;\beta_2;\gamma_2)=18$

$\Rightarrow$ среди $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ могут быть $1, 18, a$, где $a=1, 2, 3, \dots, 18$.

Если $a=1$, то троек значений $(\alpha_2;\beta_2;\gamma_2)$ всего 3

При $a=18$ троек 3 штуки

При $1<a<18$ кол-во троек по 6 на каждое значение a. $(a=2,3,\dots,17)$

Значит всего троек $(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)$ $3+3+6\cdot 16=102$

Чистовик

№4 продолжение

Чтобы ~~удается~~ составить всевозможные значения $(a;b;c)$ необходимо выбрать тройку чисел $(\alpha_1;\beta_1;\gamma_1)$ и тройку $(\alpha_2;\beta_2;\gamma_2)$. Значит ~~#~~ количество троек, удовлетворяющие условию $= 84 \cdot 102 = 8568$

Ответ: 8568

Чистовик

№5

$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)$, $\log_{6x-14}(x-1)^2$, $\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)$

** см конец задачи О.Д.З.

Пусть 2 равные числа равны t, тогда третье из них $= t-1$.

$$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)\cdot\log_{(6x-14)}(x-1)^2\cdot\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)=4$$

$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)$ преобразуется в $2\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)$, а $\log_{(6x-14)}(x-1)^2$ преобразуется в $2\log_{(6x-14)}(x-1)$ на О.Д.З.

$$4=t^2(t-1)$$
$$t^3-t^2-4=0$$
$$(t-2)(t^2+t+2)=0$$
$$\Downarrow$$
$$t=2$$

$t^2+t+2=0$ не имеет решений $D<0$

Значит два числа равны 2, а третье $=1$.
Рассмотрим три случая:

1) $\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)=2$ $\quad\left(\cancel{\frac{x}{3}+3>0}\right)$

$2\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)=2 \iff 6x-14=\frac{x}{3}+3$

$\frac{17}{3}x=-17 \Rightarrow x=3$

подставим $x=3$

$\log_{6x-14}(x-1)^2=\log_4 4=1$

$\log_{x-1}(x/3+3)=\log_2 4=2$

Получаем, что $x=3$ нам подходит.

Чистовик

N5 продолжение

2) $\log_{6x-14}(x-1)^2=2$

$\log_{6x-14}(x-1)=1 \Leftrightarrow 6x-14=x-1 \Rightarrow x=\frac{13}{5}$

$5x=13$

$\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)=\log_{6/5}\left(\frac{58}{15}\right)$

число $\log_{6/5}\left(\frac{58}{15}\right)\neq 1$ и $\neq 2$, значит $x=13/5$ не подходит.

3) $\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)=2$

$(x-1)^2=\frac{x}{3}+3$

$x^2-\frac{7}{3}x-2=0 \quad x=\frac{7/3\pm\sqrt{\frac{49}{9}+8}}{2}=\frac{7}{6}\pm\frac{11}{6}$ → 3 подходит (учли в п.1) → $-\frac{2}{3}$ не подходит по О.Д.З. **

Значит подходит лишь ~~одно~~ ~~значение~~ $\underline{\underline{x=3}}$, при котором

$\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)=2=\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)$

и $\log_{6x-14}(x-1)^2=1$

О.Д.З.

$$\begin{cases} x-1>0 \\ 6x-14>0 \\ x/3+3>0 \\ x/3+3\neq 1 \\ 6x-14\neq 1 \\ x-1\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \overset{**}{\begin{cases} x>7/3 \\ x\neq 5/2 \end{cases}}$$

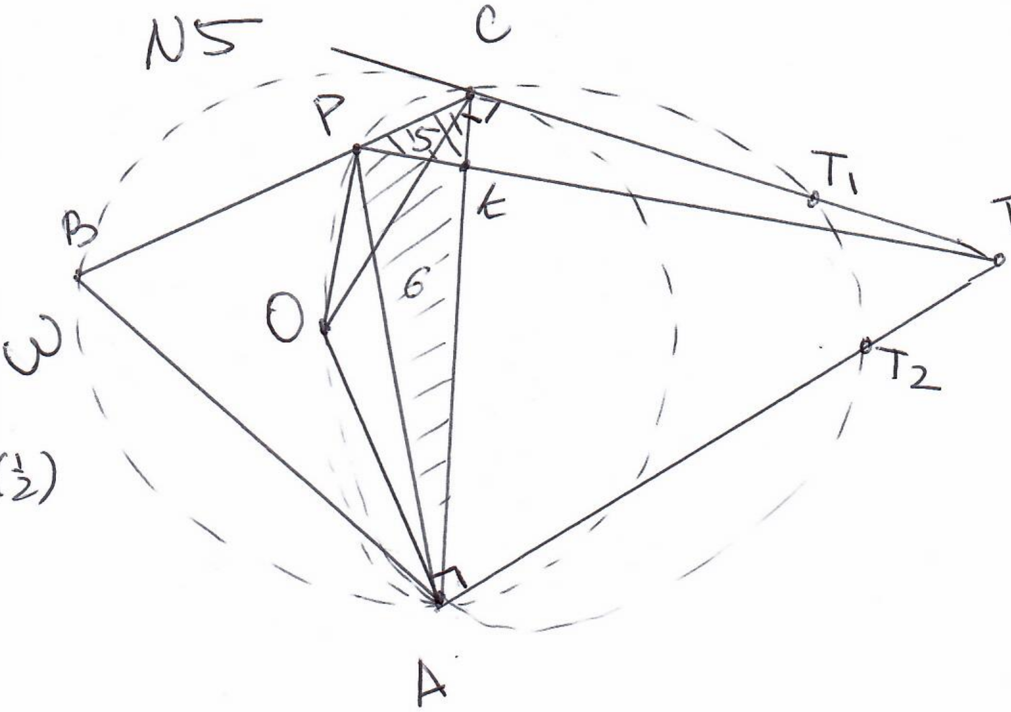
Ответ: при $x=3$.

Чистовик

N5

Дано
$S_{APK} = \cancel{4}6$
$S_{CPK} = 5$
CT и AT - кас. к ω
см. рис

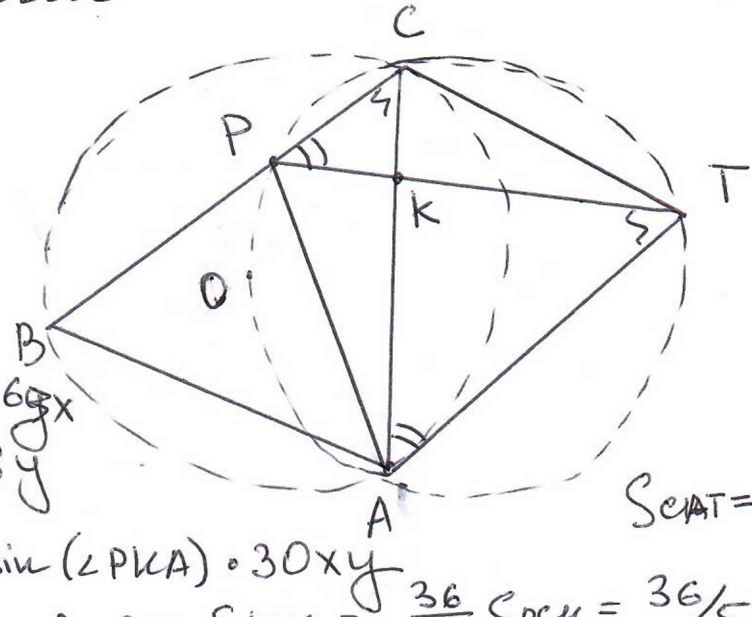
а) S_{ABC} - ?
б) $\angle ABC = \operatorname{arctg}(\frac{1}{2})$
AC - ?



Решение:

1) $\angle OCT = \angle OAT = 90^\circ$, т.к. CT и AT - касательные к окружности ω. Назовём T_1 точку пересечения второй окружности с CT, T_2 - т. пересечения AT со второй окружностью. OT_1, OT_2 - диаметр окр-ти, так как на них опираются прямые углы OCT и OAT $\Rightarrow$ T_1 и T_2 совпадают $\Rightarrow$ T лежит на второй окружности

2) $\frac{CK}{KA} = \frac{S_{APK}}{S_{CPK}} = \frac{6}{5}$



$\Rightarrow \frac{PK}{KT} = \frac{6}{5} \left(= \frac{CK}{KA}\right)$

($\Delta PCK \sim \Delta KAT$ по равенству углов)

Пусть $CK = 5x \Rightarrow KA = 6x$

тогда $PK = 5y$; $KT = 6y$

$\Rightarrow S_{PKA} = S_{KCT} = \frac{1}{2}\sin(\angle PKA) \cdot 30xy$

$S_{CAT} = 13,2$

$S_{KCT} = 6$; при этом $S_{KTA} = \frac{36}{25} S_{PCK} = 36/5 = 7,2$

N5

3) $S_{COA} = S_{APC}$

$\frac{1}{2}\sin(\angle AOC)\cdot R^2 = \frac{1}{2}\sin(\angle AOC)\cdot PC\cdot PA$

при этом $OC^2 + CT^2 = 4R^2$

$CT = \sqrt{3}R$

$\Downarrow$

$R^2 = PC\cdot PA$

$R^2 = PC\cdot CT = \sqrt{3}R\cdot PC$

($PA = CT$ т.к. $\triangle$ равны)

$\underline{\underline{PC = R/\sqrt{3}}}$ $\quad PA = CT = R\sqrt{3}$

4) $S_{ABC} = S_{APC}\cdot \frac{\cancel{BC}}{\cancel{BC}}\frac{BC}{PC} =$

$= (S_{APK} + S_{CPK})\cdot \frac{BC\cdot\sqrt{3}}{R} = 3(11) = 33$

5) $R = \frac{R\sqrt{3}}{2\sin(\angle PCA)} \Rightarrow \sin(\angle PCA) = \sqrt{3}/2$

по теор. синусов.

$AT = R\cdot\sqrt{3}$
$PA = R\sqrt{3}$ $\Rightarrow PT = R\sqrt{3}$ (р/к $\triangle$)

Ответ: 33

$a = 3^{\alpha_1} \cdot 5^{\alpha_2}$

$b = 3^{\beta_1} \cdot 5^{\beta_2}$

$c = 3^{\gamma_1} \cdot 5^{\gamma_2}$

3 $a=1 \Rightarrow (1,1,15),(1,15,1)(15,1,1)$

$\boxed{3}$ $a=15$

$14 \cdot 6$ $a = 2,3,\ldots,14$

Черновик

N4

$$\begin{array}{r} \times\, 84 \\ 102 \\ \hline 168 \\ +\,84 \\ \hline 8568 \end{array}$$

Общее число троек

$3+3+13 \cdot 6 = 6 \cdot 14 = 84$

~~если с 0 то $14 \cdot 6$~~

~~$3+3+14 \cdot 6 = 15 \cdot 6 = 90$~~

$84 \cdot 102 = 8568$

$90 \cdot 108$

Аналогично считаем тройки $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$

$a = 1$

$\Rightarrow 3$

$a = 18$

$\Rightarrow 3$

$1 < a < 18$

$16 \cdot 6$

$3+3+16 \cdot 6 = 17 \cdot 6 = 102$

с 0 $17 \cdot 6$

~~$18 \cdot 6 = 108$~~

$$\begin{array}{r} \times\, 84 \\ 102 \\ \hline 168 \\ +\,84 \\ \hline 8568 \end{array}$$

Черновик

15. N4

$1 \le \alpha_1, \alpha_2 \le 15$

Упорядоченные тройки

$a = 15$ $3^{\alpha_1} \cdot 5^{\beta_1}$

$b = 3^{\beta_1} 5^{\beta_2}$ $3^{\alpha_2} \cdot 5^{\beta_2}$

$c = 3^{\alpha_1} \cdot 5$ $3^{\alpha_3} \cdot 5^{\beta_3}$

$18 \cdot 6 = 60 + 48$

~~$a = 15$~~

~~b вар $\alpha_2 \cdot \beta_2 =$~~

α_2 – 15 вар

$15 \cdot 6$ к перест

$\overset{108}{(18 \cdot 6)}\overset{80}{(15 \cdot 6)} = 8640$

$\log_{\frac{x}{3}+3}(6x+14) =$

N5

$2\log_{\frac{x}{3}+3}(6x+14)$ $2\log_{(6x-14)}(x-1)^3$ $\log_{(x-1)}\left(\frac{x}{3}+3\right)$

$2a$ $2b$ c

$x-1>0$ $x>1$

$6x-14>0$ $x>7/3$

$\frac{x}{3}+3>0$ $x>-9$

$\frac{x}{3}+3 \ne 1$ $x \ne -6$

$6x-14 \ne 1$ $x \ne 15/6 = 5/2$

$x-1 \ne 1$ $x \ne 2$

$4ab = 4\log_{(x-1)}\left(\frac{x}{3}+3\right)$

произвед $= 4$

$\cancel{4}ab = \cancel{4}c$

~~$2a \cdot c$~~ $4 = x^2(x-1)$

$x^3 - x^2 - 4 = 0$ → $D<0$ нет реш

$\frac{5}{2} > \frac{7}{3}$ $15 > 14$

$(x-2)(x^2+x+2) = 0$

$x > 7/3$

$x \ne 5/2$

~~$x \ne 2$~~

~~$x = 2$~~

2 2 1

$x > 7/3$

стр 2 из 6

Черновик

№ 4

НОК$(a; b; c)$ $\quad a = 3^{\alpha_1} \cdot 5^{\alpha_2}$

$b = 3^{\beta_1} \cdot 5^{\beta_2}$

$c = 3^{\gamma_1} \cdot 5^{\gamma_2}$

стр 3 из 6

по 1 в паре $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$

по 1 $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$

$3 \cdot 5^{\alpha_2}$

$3^{\beta_1} \cdot 5 \Rightarrow$ 2) α_2 ~~от 1 до 18~~ ≤ 18

$3^{\gamma_1} \cdot 5^{\gamma_2}$ $\quad 1 \leq \beta_1, \gamma_1 \leq 15$

$18^2 \cdot 15^2$

Ответ: ~~$18 \cdot 15 = \boxed{270}$~~

1) ~~$2\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14) = 1$~~ $\quad$ ~~$-\frac{17}{3}x + 3 = -14$~~ $\quad x = 3$

~~log~~ $\sqrt{\frac{x}{3}+3} = 6x - 14$

1) $\cancel{2}\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14) = \cancel{2}\ 1$ $\quad \frac{x}{3} + 3 = 6x - 14$

$-\frac{17}{3}x = -17 \quad x = 3$

$\log_{6x-14}(x-1)^2 = \log_4 4 = 1$

$\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right) = \log_2 4 = 2$

$1\frac{13}{5} + \frac{45}{15} =$

2) $\log_{6x-14}(x-1) = \cancel{3}\ 1$ $\quad 6x - 14 = x - 1$

$5x = 13 \quad x = \frac{13}{5}$

$2\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14) = 2\log_{\frac{58}{15}}\left(\frac{78}{5} - 14\right) \neq 1 \cancel{3}2$

не подх $\qquad \frac{8}{5}$

$72 + 49 =$
$= 121$

3) $\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right) = 2 \quad (x-1)^2 = \frac{x}{3} + 3$

подх

~~x~~ $\quad x^2 - \frac{7}{3}x - 2 = 0$ $\qquad 3$

$(\cancel{3}x = \frac{\frac{7}{3} \pm \sqrt{\frac{49}{9} + 8}}{2} = \frac{\frac{7}{3} \pm \frac{11}{3}}{2} = \frac{7}{6} \pm \frac{11}{6} \rightarrow -\frac{2}{3}$ не подх по ОДЗ

Черновик

N 5

$4\ ^{t}/_{2}$

1) $\cancel{2}\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14) = \cancel{3}\ 1$

$\frac{x}{3}+3=6x-14$

$-\frac{17}{3}x=-17 \quad x=3$

~~подх~~

$x=3$

$2\log_{6x-14}(x-1) = 2\log_4 2 = 1$

$\log_{(x-1)}\left(\frac{x}{3}+3\right) = \log_2 4 = 2$

2) $\cancel{2}\log_{(6x-14)}(x-1) = \cancel{2}\ 1$

$6x-14=x-1$

$5x=13 \quad \cancel{x=3} \quad x=\frac{13}{5}$

$x=\frac{13}{5}$ не подх

~~$2\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)=2$~~

~~все 2~~

~~$\log_{(x-1)}\left(\frac{x}{3}+3\right) = \log_2 4 = 2$~~

$\neq 1$

?- $2\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14) = 2\log_{\frac{58}{15}}\left(\frac{138}{15}\right)$

$\frac{13}{15}+\frac{45}{15}=\frac{58}{15}\ \frac{68}{15}=$

$58\cdot 6 = 348$

$14\cdot 15 = 210$

$\frac{58\cdot 6-14\cdot 15}{15} = \frac{138}{15} = \frac{46}{5}$

$\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right) = \log_{\frac{8}{5}}\left(\frac{58}{15}\right) \neq 1$

3) $\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)=2$ ~~$\frac{13}{15}+\frac{45}{15}=$~~

N 4

$3\cdot 5$

$15 \quad 18$

$3^{15}\cdot 5^{18}$

$90\cdot 18 = 1620$

$(18\cdot 15)\cdot 6 = 1620$

$3^{\alpha_3}\cdot 5^{\beta_3}$

от 1 до 15 $\quad$ 15 $\quad$ от 1 до 18

$3\cdot 5$

$\to 3\cdot 5^{18}$

$3^{15}\cdot 5$

стр 4 из 6

N 6 Черновик

1 3 $3^1 \cdot 5$

от 2 до 14 $3 \cdot 5$ ~~≤ 3 ст ст $\frac{1}{5}$~~

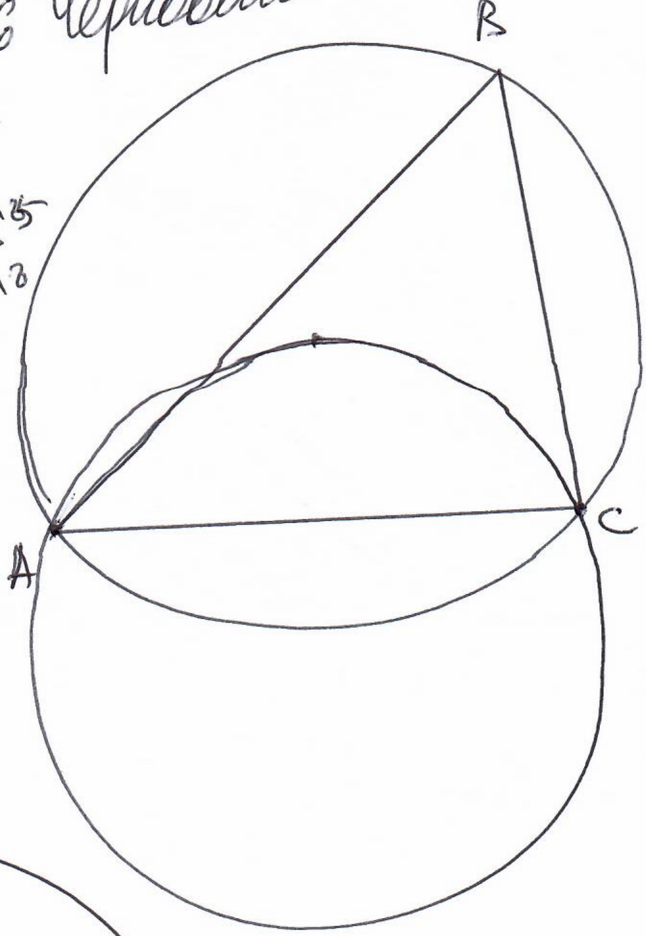
$12 \le x \le 18$ ~~3 ст 3^1~~

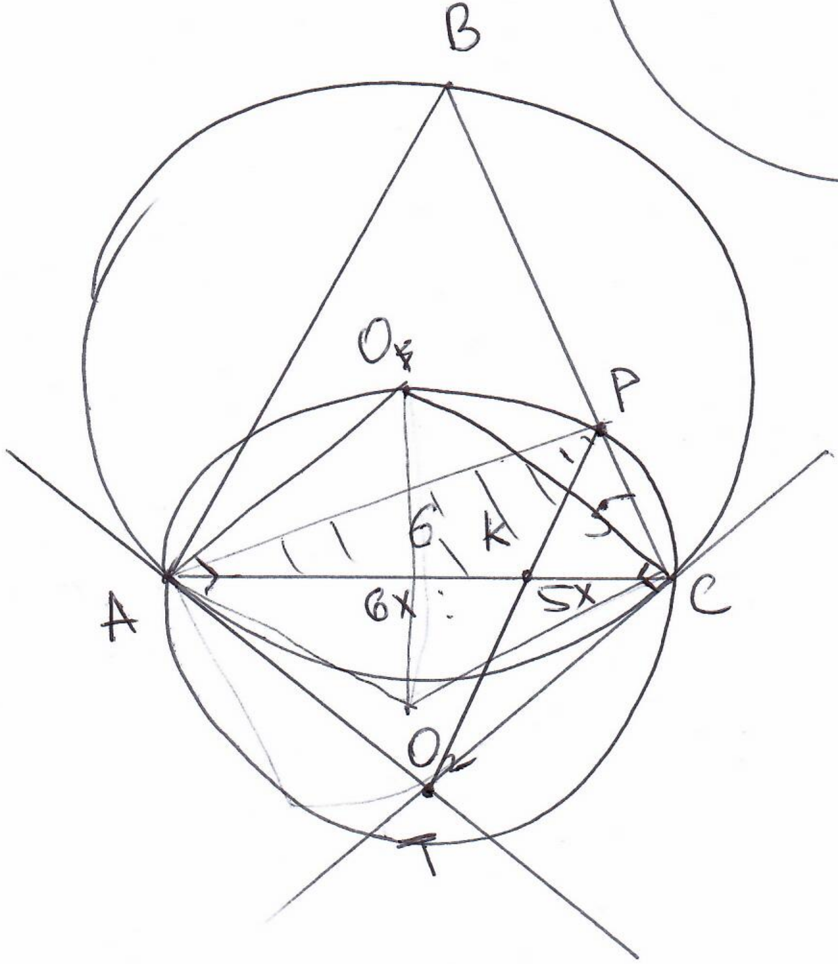
$1 \le y \le 18$ $3 \cdot 5$ 6 3^1 и 3^{18}

~~если 5 и 18~~ 6 3^1 и 5^{18}

$36 \cdot (13 \cdot 16 +$

$+$

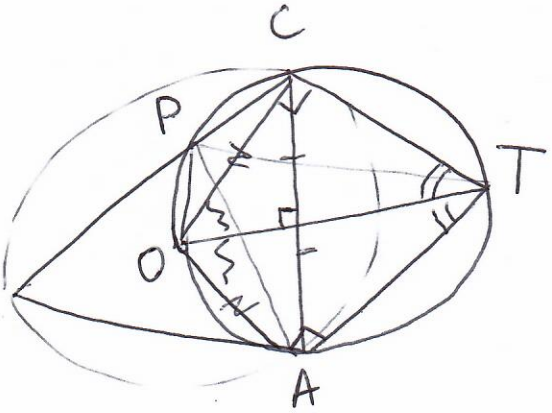




стр 5 и 6

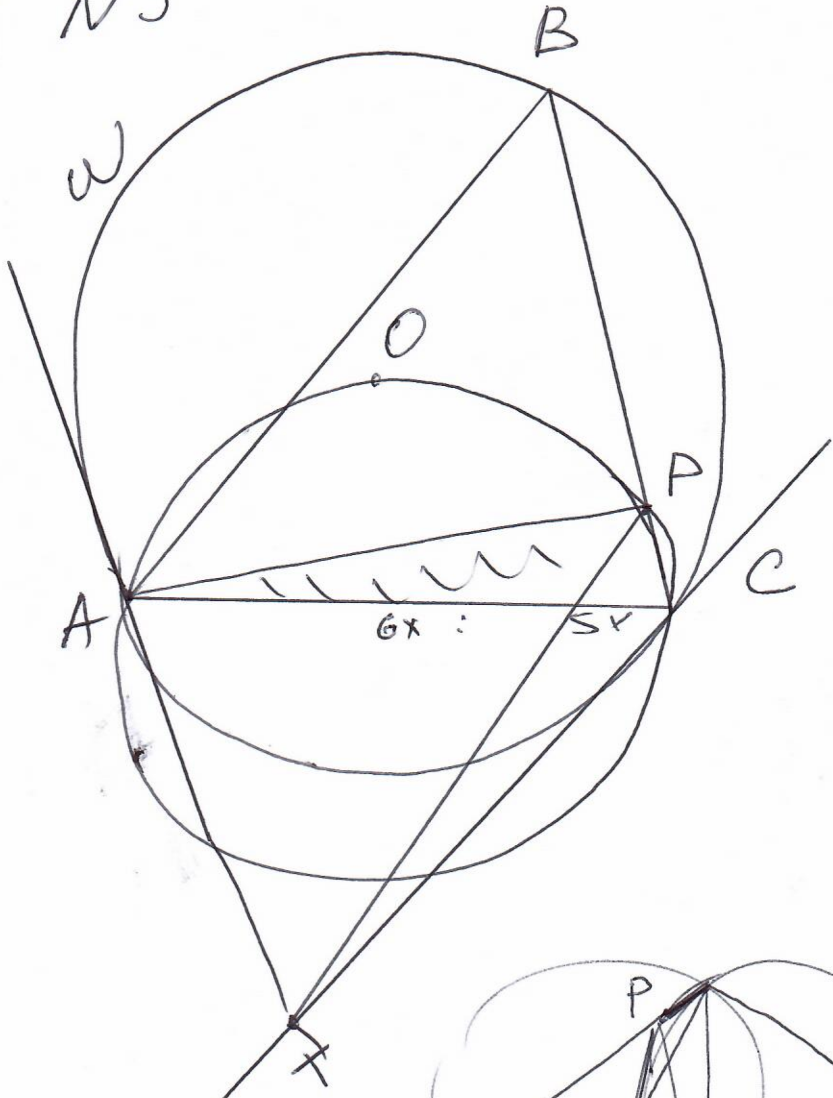
Чорновик
N5

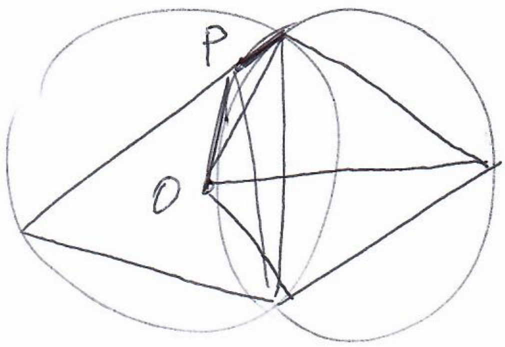
$S_{APK} = 6$
$S_{CPK} = 5$



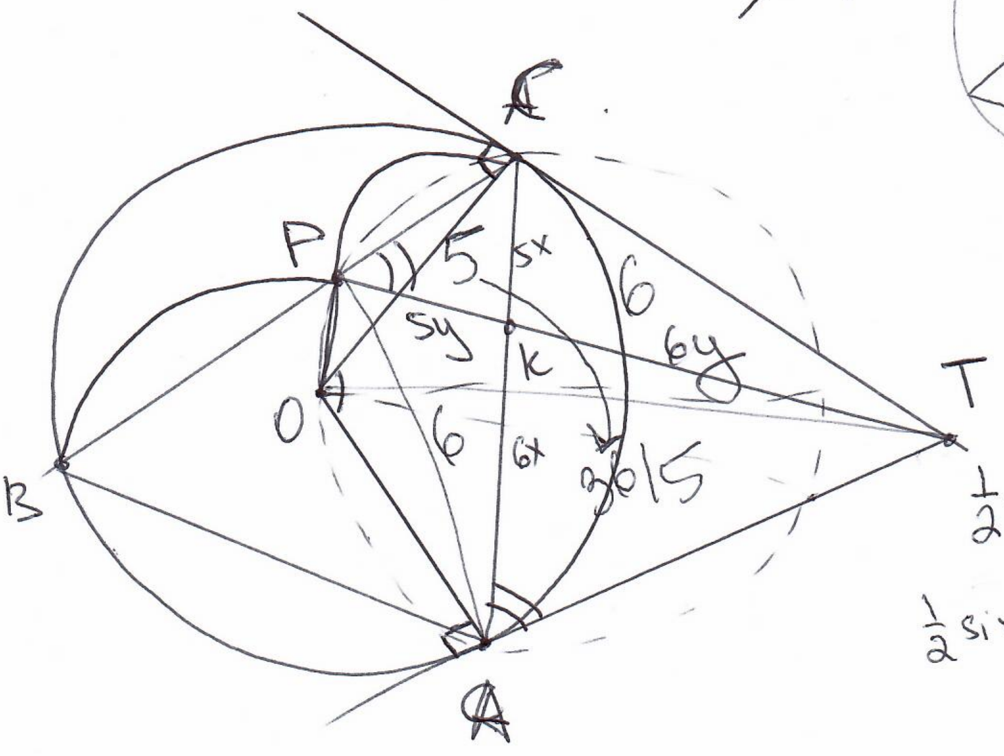
arctg $\frac{1}{2}$

AC - ?





$\frac{36}{5} = 7{,}2$



$\frac{1}{2}\sin 2\alpha \cdot PC \cdot PA$

$\frac{1}{2}\sin\alpha \cdot BC$

стр 6 из 6