Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102815**

ID профиля: **343877**

Вариант 18

Черновик

$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_7$

$a_7 a_{12} > S + 20$

$a_9 a_{10} < S + 44$

$S = \frac{a_1 + a_7}{2} \cdot 7 = \frac{7}{2}(a_1 + a_1 + 6d) =$

$= 7(a_1 + 3d)$

$a_7 = a_1 + 6d$

$a_{12} = a_1 + 11d$

$a_9 = a_1 + 8d$

$a_{10} = a_1 + 9d$

$a_7 a_{12} = (a_1 + 6d)(a_1 + 11d)$

$-b^2 + 2b + 4 = 0$

$\begin{array}{r} 51 \\ -44 \\ \hline 7 \end{array}$

$\begin{array}{r} 66 \\ -41 \\ \hline 25 \end{array}$ $\begin{array}{r} 1,4 \\ \times\ 3 \\ \hline 4,2 \end{array}$

$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \le 5 \\ a^2 + b^2 \le \min(4a - 2b, 5) \end{cases}$

$D = 16 - 4(b^2 - 2b) = 4b^2 + 8b + 16 = 4(b^2 + 2b + 4)$

$a = \frac{4 \pm 2\sqrt{b^2 + 2b + 4}}{2} = 2 \pm \sqrt{b^2 + 2b + 4}$

$b^2 - 2b + a^2 - 4a = 0$

$D = 4 - 4(a^2 - 4a) = 4a^2 + 16a + 4 = 4(a^2 + 4a + 1)$

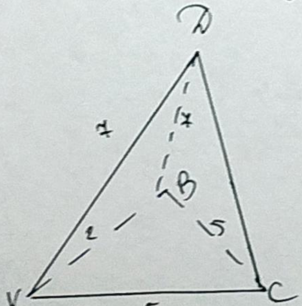
$D = 16 - 4 = 12$ $a = \frac{-4 \pm 2\sqrt{3}}{2}$

$4a - 2b < 5$

$b > 2a - \frac{5}{2}$.

$b = \frac{2 \pm 2\sqrt{a^2 + 4a + 1}}{2} = 1 \pm \sqrt{a^2 + 4a + 1}$

$a^2 + 4a + 1 = (a + 2 + \sqrt{3})(a + 2 - \sqrt{3})$



$b^2 + 2b + 4 \le 3$

$b = -1$

$a = 2 \pm \sqrt{3}$

Черновик

Чистовик

Вариант 18

№ 1

$$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_7 = \frac{a_1 + a_7}{2} \cdot 7 = \frac{a_1 + a_1 + 6d}{2} \cdot 7 = (a_1 + 3d) \cdot 7$$

$$a_7 a_{12} = (a_1 + d \cdot 6)(a_1 + 11d) = a_1^2 + 17ad + 66d^2$$

$$a_9 a_{10} = (a_1 + 8d)(a_1 + 9d) = a_1^2 + 17ad + 72d^2$$

d – разность арифметической прогрессии, $d \in \mathbb{Z}$, $d > 0$.

$$a_7 a_{12} > S + 20 \iff a_1^2 + 17ad + 66d^2 > 7(a_1 + 3d) + 20$$

$$a_1^2 + 17ad + 66d^2 > 7a_1 + 21d + 20$$

$$a_1^2 + a(17d - 7) + 66d^2 - 21d - 20 > 0$$

$$a_9 a_{10} < S + 44 \iff a_1^2 + 17ad + 72d^2 < 7(a_1 + 3d) + 44$$

$$\begin{cases} a_1^2 + a_1(17d - 7) + 72d^2 - 21d - 44 < 0 \quad (1) \\ a_1^2 + a_1(17d - 7) + 66d^2 - 21d - 20 > 0 \quad (2) \end{cases}$$

Умножим (2) на -1.

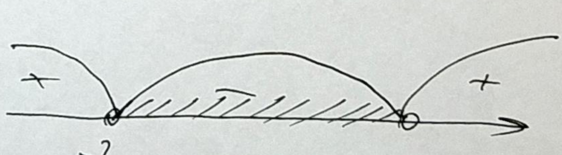
$$\begin{cases} a_1^2 + a_1(17d - 7) + 72d^2 - 21d - 44 < 0 \\ -a_1^2 - a_1(17d - 7) - 66d^2 + 21d + 20 < 0 \end{cases}$$

Сложим неравенства

$$6d^2 - 24 < 0$$

$$d^2 - 4 < 0$$

$$(d - 2)(d + 2) < 0$$



$$d \in (-2; 2)$$

Так как последовательность состоит из целых чисел и возрастает, $d \in \mathbb{Z}$, $d > 0 \Rightarrow d \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} d \in \mathbb{N} \\ d \in (-2; 2) \end{cases} \Rightarrow d = 1$$

Чистовик

№1

Подставим $d = 1$ в (1) и (2).

1) $a_1^2 + a_1(17-7) + 72 - 21 - 44 < 0$

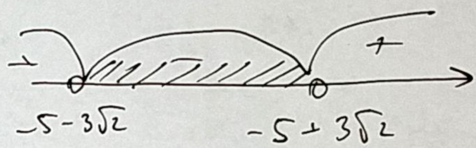
$a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0$

$a_1^2 + 10a_1 + 7 = 0$

$D = 100 - 4 \cdot 7 = 100 - 28 = 72$

$$\left[\begin{array}{l} a_1 = \frac{-10+6\sqrt{2}}{2} = -5+3\sqrt{2} \\ a_1 = -5-3\sqrt{2} \end{array}\right.$$

$(a_1+5+3\sqrt{2})(a_1+5-3\sqrt{2}) < 0$



$a_1 \in (-5-3\sqrt{2}; -5+3\sqrt{2})$

2) $\cancel{a_1^2 + a_1(17-7) - 66 + 21 + 20 < 0}$

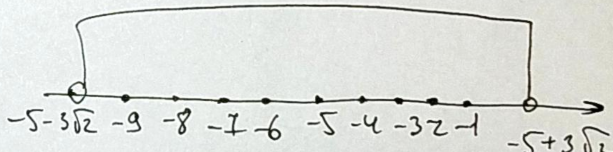
$a_1^2 + a_1(17-7) + 66 - 21 - 20 > 0$

$a_1^2 + a_1 \cdot 10 + 25 > 0$

$(a_1+5)^2 > 0$

$a_1 \neq -5$

$$\begin{cases} a_1 \in \mathbb{Z}, \text{ т.к. прогрессия состоит из целых чисел} \\ a_1 \in (-5-3\sqrt{2}; -5+3\sqrt{2}) \\ a_1 \neq -5 \end{cases}$$



$\sqrt{2} \approx 1,4$

$-5 - 3 \cdot 1,4 = -5 - 4,2 = -9,2$

$-5 + 3 \cdot 1,4 = -5 + 4,2 = -0,8$

$$\begin{cases} a_1 \in \{-1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8, -9\} \\ a_1 \neq -5 \end{cases}$$

$a_1 \in \{-1, -2, -3, -4, -6, -7, -8, -9\}$.

Ответ: $a_1 \in \{-1, -2, -3, -4, -6, -7, -8, -9\}$.

Чистовик

N 3

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 5 \text{ — круг с центром в точке } (a;b) \text{ и радиусом } \sqrt{5}.\\ a^2+b^2 \le \min(4a-2b, 5)\end{cases}$$

1) $4a-2b<5$

$a^2+b^2 \le 4a-2b$

$a^2-4a+b^2-2b \le 0$ (1)

Сначала рассмотрим (1) как квадратный трехчлен относительно a:

$a^2-4\cdot a+b^2-2b=0$

$D=16-4(b^2-2b)=-4b^2+8b+16=4(-b^2+2b+4)$

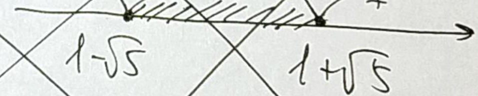
$4(-b^2+2b+4) \ge 0$, т.к. иначе $a^2-4a+b^2-2b>0$ $\forall a\in\mathbb{R}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ решений не будет.

$b^2-2b-4 \le 0$

$b^2-2b+1-5 \le 0$

$(b-1-\sqrt{5})(b-1+\sqrt{5}) \le 0$



$b\in[1-\sqrt{5}; 1+\sqrt{5}]$

$a=\dfrac{4\pm 2\sqrt{-b^2+2b+4}}{2}=2\pm\sqrt{-b^2+2b+4}$

$a^2-4a+4+b^2-2b+1 \le 5$

$(a-2)^2+(b-1)^2 \le 5$ — круг с центром в точке $(2;1)$ и радиусом $\sqrt{5}$.

$$\begin{cases}(a-2)^2+(b-1)^2 \le 5\\ b>2a-\frac{5}{2}\end{cases}$$

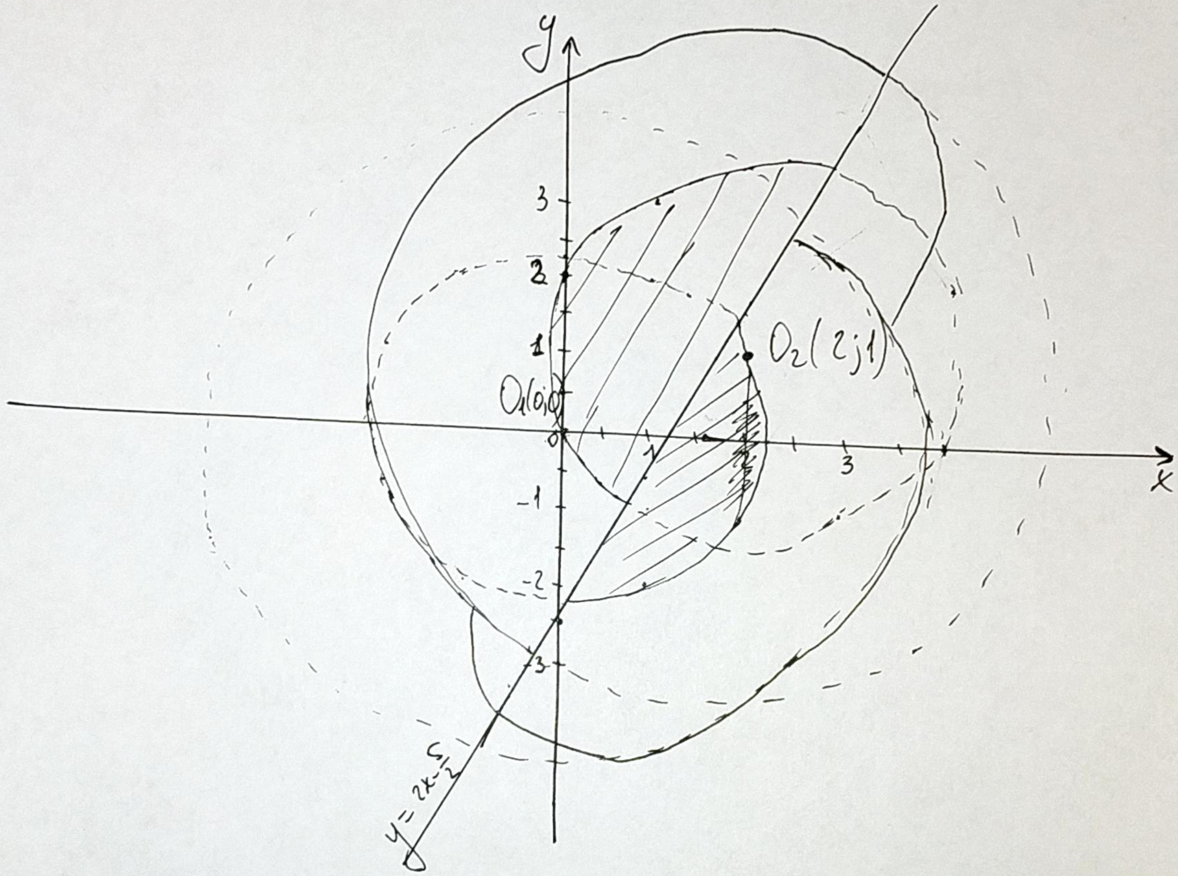
3

№3 Чистовик

г) $4a-2b \geq 5$

$a^2+b^2 \leq 5$ – круг с центром в точке $(0;0)$ и радиусом $\sqrt{5}$.

$b \leq 2a - \frac{5}{2}$.



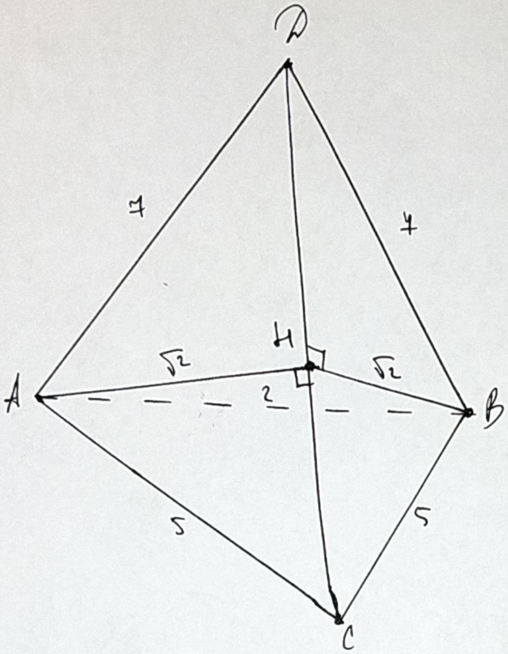
В закрашенной области могут лежать центры ~~кр~~ кругов, заданных ~~уравнениями~~ неравенством $(x-a)^2+(y-b)^2 \leq 5$

Часть круга в верхней полуплоскости ($y \geq 2x - \frac{5}{2}$) задана неравенством

Чистовик

№2

Дано:



ABCD вписан в цилиндр, ~~Ок~~ ось которого $\parallel CD$. Радиус цилиндра минимальный

Найти: CD

Решение: A, B, C, D лежат на боковой поверхности; т.к. $CD \parallel$ оси цилиндра $\Rightarrow$ CD лежит на боковой поверхности цилиндра

$\triangle ACD = \triangle BCD$ по 3 сторонам ($AD = DB$, $AC = BC$, DC — общая).
Проведём AH — высоту $\triangle ACD$. Проведём BH. BH — тоже высота $\triangle BCD$, т.к. $\triangle ACD = \triangle BCD$.

В (AHB) $AH \cap HB = H$, $AH \perp CD$, $BH \perp CD \Rightarrow CD \perp (AHB) \Rightarrow$
$\Rightarrow (AHB) \perp$ оси цилиндра. $\Rightarrow$ Т.к. $H \in CD \subset$ боковой пов-ти цилиндра, $A, B \in$ боковой пов-ти цилиндра, $(AHB) \perp$ оси цилиндра $\Rightarrow (AHB) \cap$ боковой поверхности цилиндра = окружность, описанная вокруг $\triangle ABH$.

5

№2 Чистовик

~~Пусть~~ По обобщенной теореме синусов для $\triangle ABH$

$$\frac{AB}{\sin AHB} = 2R$$, R - радиус описанной вокруг $\triangle ABH$ окружности.

$R \to \min \Rightarrow \sin AHB \to \max$

$\max(\sin AHB) = 1$ при $\angle AHB = 90^\circ \Rightarrow \angle AHB = 90^\circ$,

$$R = \frac{AB}{2\sin AHB} = \frac{2}{2 \cdot 1} = 1.$$

При $\angle AHB \neq 90^\circ$ радиус цилиндра больше $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ такие случаи не подходят.

Из $\triangle ADC = \triangle BDC \Rightarrow$ равны их высоты, $AH = BH$.

По теореме Пифагора для $\triangle ABH$ $AH^2 + BH^2 = AB^2$

$2AH^2 = 4$

$AH = BH = \sqrt{2}$.

по т. Пифагора

$\triangle AHD$ и $\triangle AHC$ - прямоугольные $\Rightarrow HD^2 = AD^2 - AH^2$,

$HC^2 = AC^2 - HC^2$.

$HD = \sqrt{49 - 2} = \sqrt{47}$

$HC = \sqrt{25 - 2} = \sqrt{23}$

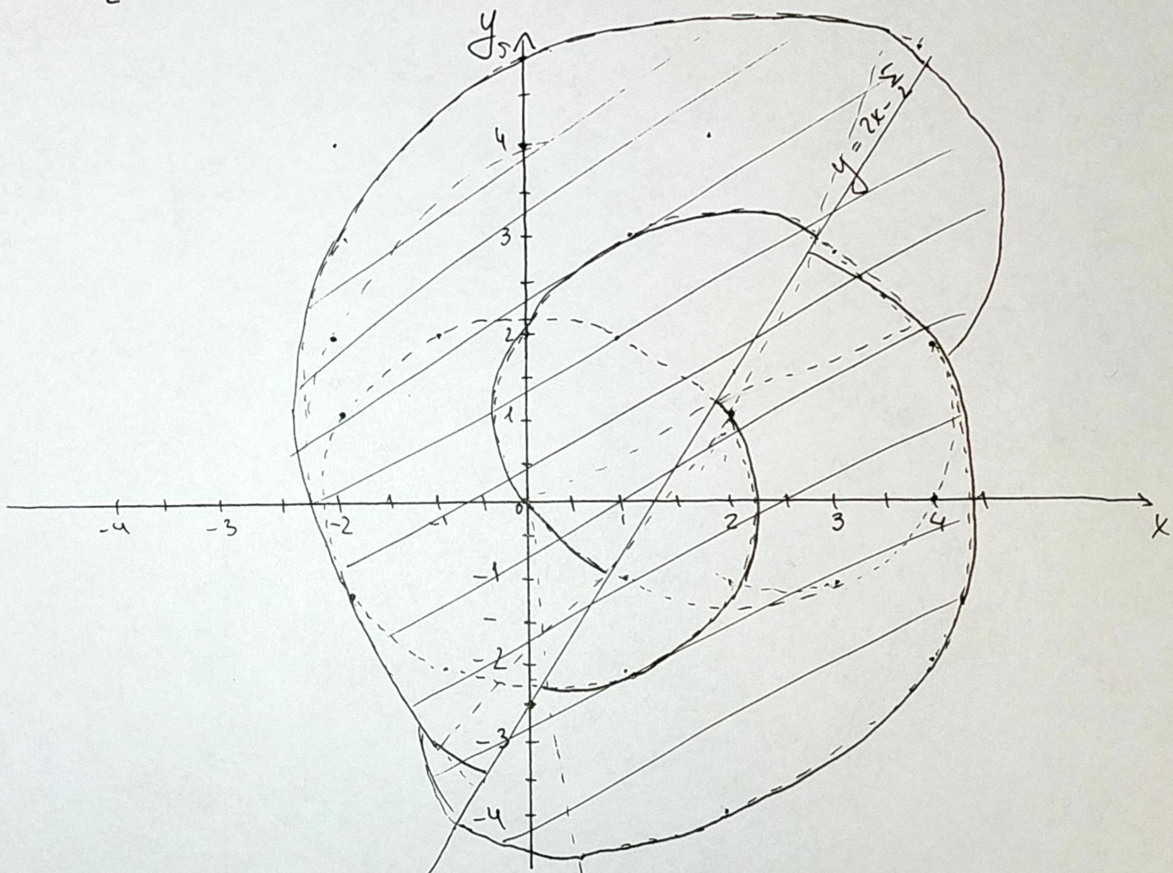
$CD = HC + HD = \sqrt{23} + \sqrt{47}$.

Ответ: $\sqrt{23} + \sqrt{47}$.

Чистовик

№3

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 5 & \text{— круг с центром в т. } (a;b) \text{ и радиусом } \sqrt{5} \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (a-2)^2+(b-1)^2 \le 5 & \text{— круг с центром в т. } (2;1) \text{ и радиусом } \sqrt{5} \\ b > 2a-\frac{5}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} a^2+b^2 \le 5 & \text{— круг с центром в т. } (0;0) \text{ и радиусом } \sqrt{5}. \\ b \le 2a-\frac{5}{2} \end{cases} \end{array}\right. \end{cases}$$



$\cancel{y = 2x - \frac{5}{2}}$

$\cancel{(x-2)^2+(y-1)^2=5}$

$\cancel{(x-2)^2+(2x}$

Заштрихованная фигура — фигура M.

Площадь фигуры M — $\pi \cdot (2\sqrt{5})^2 = 20\pi$,

так как фигура состоит из двух частей круга радиуса $2\sqrt{5}$.

Ответ: 20π.

7

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102815**

ID профиля: **343877**

Вариант 18

Чистовик

Вариант 18

№4

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=15 \\ НОК(a;b;c)=3^{15}\cdot 5^{18} \end{cases}$$

Т.к. $НОК(a;b;c)=3^{15}\cdot5^{18}$ – степени только 3 и 5, то каждое из чисел a, b, c можно представить как произведения степеней 3 и 5.

Пусть $a=3^{x_1}\cdot5^{x_2}$, $b=3^{y_1}\cdot5^{y_2}$, $c=3^{z_1}\cdot5^{z_2}$.

$НОК(a,b,c)=НОК(3^{x_1}\cdot5^{x_2}, 3^{y_1}\cdot5^{y_2}, 3^{z_1}\cdot5^{z_2})=$

$=3^{\max(x_1,y_1,z_1)}\cdot5^{\max(x_2,y_2,z_2)} \Rightarrow \max(x_1,y_1,z_1)=15$, $\max(x_2,y_2,z_2)=18$.

$НОД(a,b,c)=НОД(3^{x_1}\cdot5^{x_2}, 3^{y_1}\cdot3^{y_2}, 3^{z_1}\cdot5^{z_2})=$

$=3^{\min(x_1,y_1,z_1)}\cdot5^{\min(x_2,y_2,z_2)} \Rightarrow$

$\Rightarrow \min(x_1,y_1,z_1)=1$, $\min(x_2,y_2,z_2)=1$.

$\min(x_1,y_1,z_1)=1$, $\max(x_1,y_1,z_1)=15 \Rightarrow$ Одно из чисел x_1,y_1,z_1 равно 1, одно – 15, а оставшееся – лежит на отрезке [1;15]. Количество перестановок 3-элементного множества – $P_3=3! \Rightarrow$ троек (x_1,y_1,z_1), удовлетворяющих условию – $P_3\cdot C_{13}^1+2C_3^2$,

$P_3\cdot C_{13}^1$ – количество троек из различных чисел,

C_3^2 – количество троек, где два числа совпадают

1

Чистовик

№4

(равны 1 или 15).

$$P_3 \cdot C_{13}^1 + 2C_3^2 = 3! \cdot 13 + 2 \cdot 3 = 6 \cdot 13 + 6 = 6 \cdot 14 = 84$$

$\min(x_2, y_2, z_2) = 1$, $\max(x_2, y_2, z_2) = 18 \Rightarrow$ Одно число – 1, одно – 18, третье $a \in [1; 18]$. Как и со степенями 3, количество троек (x_2, y_2, z_2) равно $P_3 \cdot C_{16}^1 + 2C_3^2$, C_{16}^1 – количество способов выбрать отличное от 1 и 18 целое число на промежутке $[1; 18]$, $P_3 \cdot C_{16}^1$ – количество троек различных чисел, C_3^2 – количество троек, в которых два числа совпадают (равны 1 или 18).

Так как тройки (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) выбираются независимо, то количество троек чисел (a, b, c) равно $(P_3 \cdot C_{13}^1 + C_3^2)(P_3 \cdot C_{16}^1 + C_3^2) = (3! \cdot 13 + 6)(3! \cdot 16 + 6) = 84 \cdot 102 = 8568$

Ответ: 8568

Чистовик

N5

$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)$, $\log_{6x-14}(x-1)^2$, $\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)$

1) Пусть $\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)=\log_{(6x-14)}(x-1)^2$,

$\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)=\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)-1$.

$2\log_{(\frac{x}{3}+3)}(6x-14)=2\log_{(6x-14)}(x-1)$, $x-1>0$, т.к.

$x-1$ является основанием третьего логарифма.

$\log_{(\frac{x}{3}+3)}(6x-14)=\log_{(6x-14)}(x-1)$

$\frac{\ln(6x-14)}{\ln\left(\frac{x}{3}+3\right)}=\frac{\ln(x-1)}{\ln(6x-14)}$, $\frac{x}{3}+3\neq1$, $6x-14\neq1$.

$\ln^2(6x-14)=\ln(x-1)\ln\left(\frac{x}{3}+3\right)$

$\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)=2\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)-1$

$\log_{x-1}\left(\frac{x+9}{3(x-1)}\right)=2\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)$

$\cancel{\frac{\ln(x+9)-\ln(3(x-1))}{\ln(x-1)}=2\frac{\ln(6x-14)}{\ln\left(\frac{x}{3}+3\right)}}$

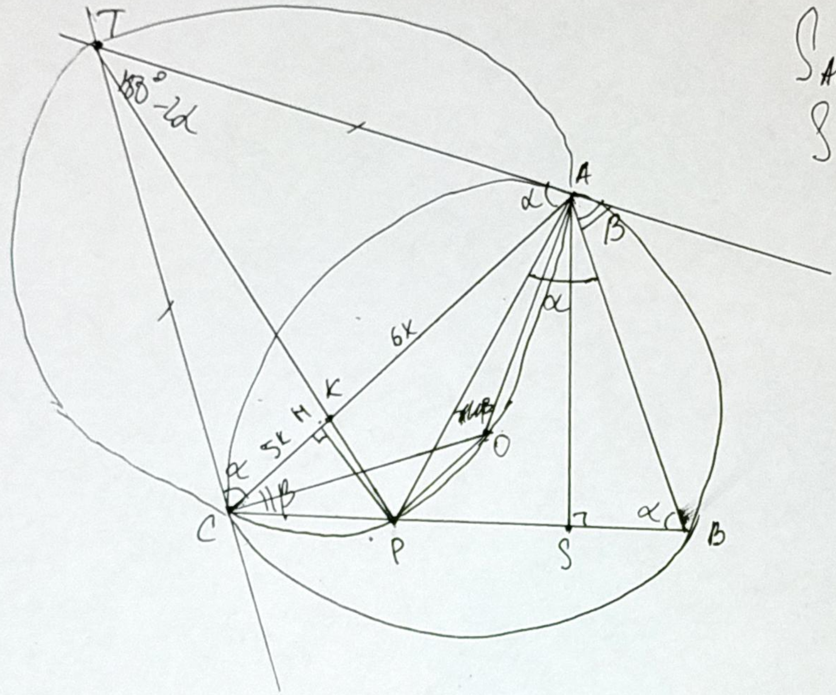
$\log_{6x-14}\left(\frac{x}{3}+3\right)\log_{(6x-14)}(x-1)=1$

$\cancel{\left(\frac{x}{3}+3\right)(x-1)=(6x-14)^2}$

Чистовик

№6

Дано:



$S_{APK} = 6$

$S_{CPK} = 5$

а) Найти: $S_{\triangle ABC}$

Решение: $AT = CT$ по св-ву касательных

$\angle ABC = \angle ACT = \alpha$ по св-ву угла между касательной и секущей. $\angle ACT = \angle CAT$, т.к. $\triangle ATC$ — равнобедренный.

$AOPC$ — вписанный четырехугольник $\Rightarrow \angle ACP + \angle AOP = 180^\circ$

Пусть $\angle ACB = \beta$.

Проведём PH — высоту $\triangle CPK$

$S_{CPK} = \frac{1}{2} CK \cdot PH$

$S_{APK} = \frac{1}{2} AK \cdot PH$ $\Rightarrow$ $\dfrac{CK}{AK} = \dfrac{S_{CPK}}{S_{APK}} = \dfrac{5}{6}$

Проведём высоту AS в $\triangle ABC$.

Черновик

$$\frac{S_{ABC}}{S_{APC}} = \frac{\frac{1}{2} BC \cdot AS}{\frac{1}{2} CP \cdot AS} = \frac{BC}{CP}$$

$AOCT$ - вписанный, т.к. $\angle TAO = \angle TCO = 90^\circ \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle AOC = 180^\circ - \angle ATC = 180^\circ - 180^\circ + 2\alpha = 2\alpha \Rightarrow \angle CPA =$
$= \angle COA = 2\alpha$ как опирающиеся на одну дугу.

$\angle APB = 180^\circ - \angle APC = 180^\circ - 2\alpha$

$\angle PAB = 180^\circ - \angle APB - \angle PBA = 180^\circ - 180^\circ + 2\alpha - \alpha = \alpha =$
$= \angle ABP \Rightarrow$ треугольник $\triangle ABP$ - равнобедренный $\Rightarrow$
$\Rightarrow AP = PB$

$AOCT$ - вписанный, $\Rightarrow T$ лежит на окружности, описанной вокруг $\triangle AOC$.

$\angle TAP = 180^\circ - \angle TCP = 180^\circ - \alpha - \beta$

$\angle CAP = \angle TAP - \angle TAC = 180^\circ - \alpha - \beta - \alpha = 180^\circ - 2\alpha - \beta$

Черновик

$13 \cdot 3! + \cancel{2}C_3^2$

$$\begin{array}{r} \times\, 14 \\ 6 \\ \hline 84 \end{array}$$

$6 \cdot 17$

$$\begin{array}{r} \times\, 102 \\ 84 \\ \hline 408 \\ 816 \\ \hline 8568 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times\, 17 \\ 6 \\ \hline 102 \end{array}$$

$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14) = \log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)+1$

$2\cancel{\frac{1}{\log_{6x-14}}}\ 2\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14) = \left(\log_{\frac{x}{3}+3}(x-1)\right)^{-1}+1$

$\frac{1}{\log_{\left(\frac{x}{3}+3\right)}(6x-14)} = \log_{(6x-14)}(x-1)$

$a^{\log_b a} = a^{\frac{1}{\log_a b}} =$

$=$

$\log_a b = \log_c a$

$\log_c a \log_b a = 1$

$a^{\log_b a} = c$

$a = c^{\log_c a}$ $\frac{1}{\cancel{}}$ $\log_a b$

$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$

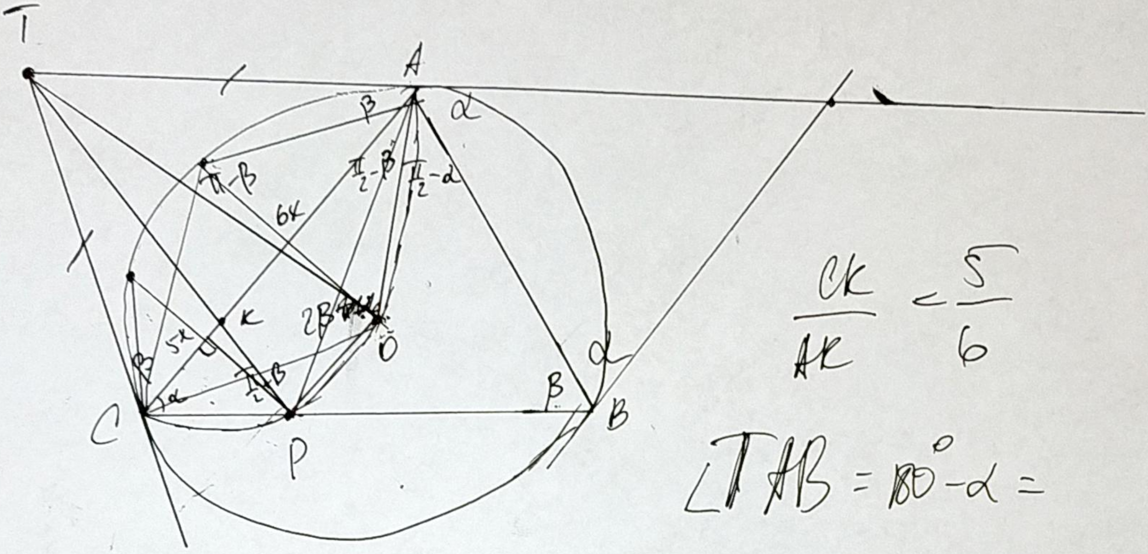
$a^{\frac{1}{\log_a b}} = c$

$2\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14) = \log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)+1$

$2\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)\log_{\frac{x}{3}+3}(x-1) = 1 + \log_{\frac{x}{3}+3}(x-1)$

$2\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)\log_{\frac{x}{3}+3}(x-1) - \log_{\frac{x}{3}+3}(x-1) - 1 = 0$

Черновик

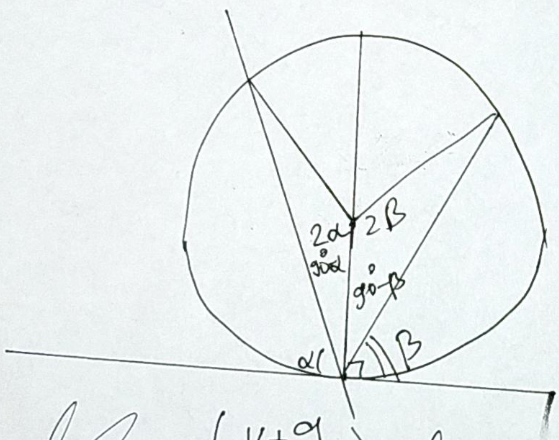


$$\frac{CK}{AK} = \frac{5}{6}$$

$\angle TAB = 180^\circ - \alpha =$

$=$

$\angle CAB = 180^\circ - \alpha - \beta$



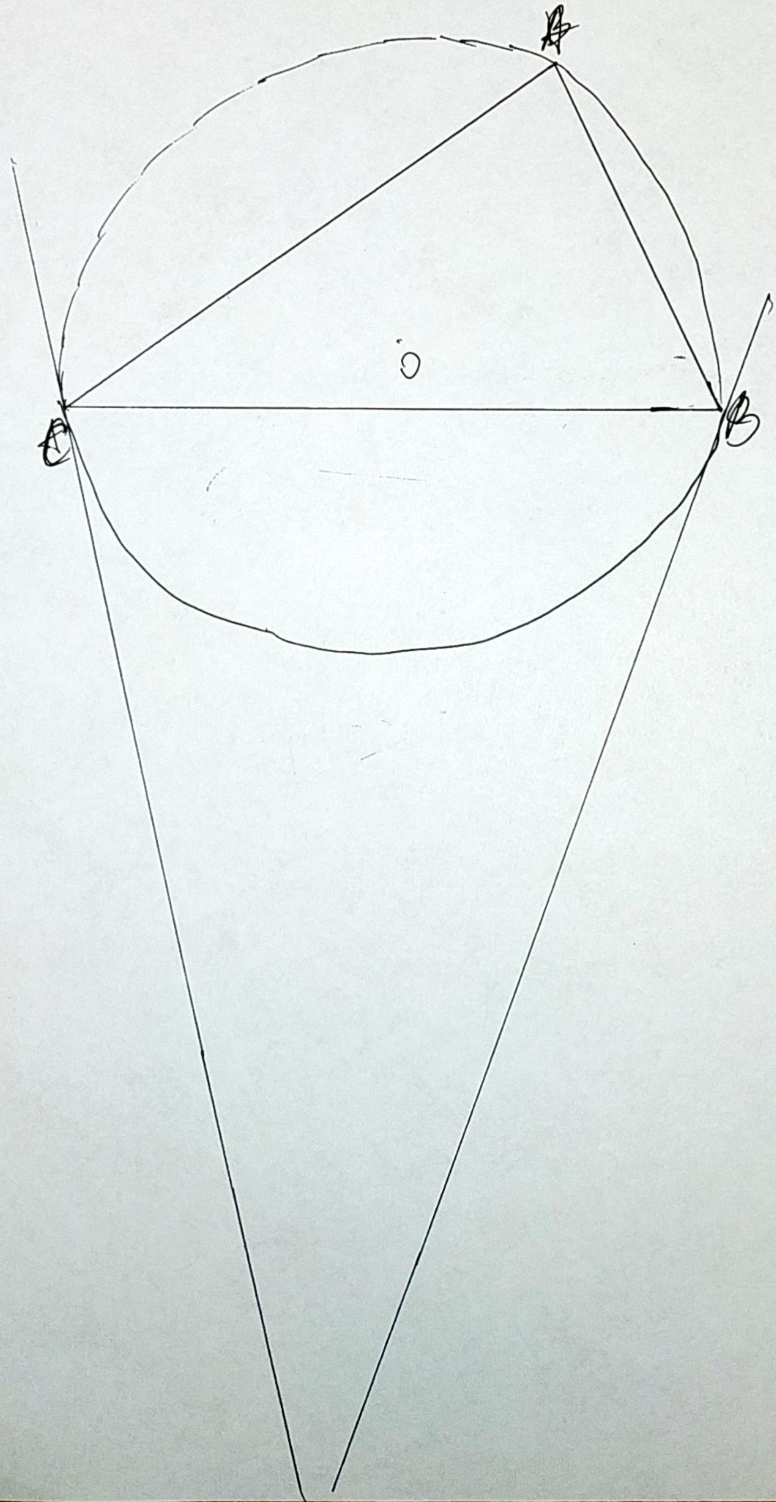
$\log_{x-1}\left(\frac{x+9}{3}\right) = 2\log_{\frac{x+9}{3}} - 1$

$\log_{(x-1)}\left(\frac{x+9}{3}/(x-1)\right) = 2\log_{\frac{x+9}{3}}(6x-14)$

7

Черновик

$\cancel{180^{\circ}} - \cancel{180^{\circ}} + 2\alpha - \alpha = \alpha$



8

Черновик

$2\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)$

$2\log_{6x-14}(x-1)$

$\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)$

$2\log_{6x-14}(x-1)=\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)$

$2\ln^2(x-1)-\ln(6x-14)\ln\left(\frac{x}{3}+3\right)=0$

$2\frac{1}{\log_{x-1}(6x-14)}=\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)$

$\log_{x-1}(6x-14)\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)$