Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102798**

ID профиля: **319911**

Вариант 18

Чистовик

Задача 1

$S = a_1 + a_2 + \dots a_7$; $a_1, a_2 \dots a_7 \in Z$; $a_1, \dots, a_7$ - члены возраст. арифметической прогрессии

$\begin{cases} a_7 a_{12} > S + 20 \\ a_9 \cdot a_{10} < S + 44 \end{cases}$ $S = a_1 + \dots + a_7 = \frac{a_1 + a_7}{2} \cdot 7 = \frac{a_1 + 6d + a_1}{2} \cdot 7 =$

$= \frac{2a_1 + 6d}{2} 7 = (a_1 + 3d) \cdot 7 = 7a_1 + 21d$

$\begin{cases} (a_1 + 6d)(a_1 + 11d) > 7a_1 + 21d + 20 \\ (a_1 + 8d)(a_1 + 9d) < 7a_1 + 21d + 44 \end{cases}$

$+\begin{cases} a_1^2 + 11a_1d + 6a_1d + 66d^2 - 7a_1 - 21d - 20 > 0 \\ a_1^2 + 9a_1d + 8a_1d + 72d^2 - 7a_1 - 21d - 44 < 0 \,|\cdot(-1) \end{cases}$

$-6d^2 + 24 > 0$

$d^2 < 4$

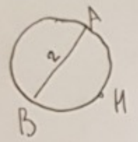
$d \in (-2; 2)$, т.к. прогрессия возрастающая и состоит из целых чисел, тогда $d = 1 \Rightarrow S = 7a_1 + 21$

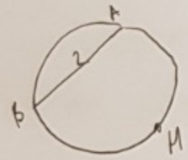
$7a_1 = S - 21 \Rightarrow a_1 = \frac{S}{7} - 3$

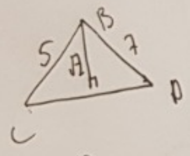
Чистовик

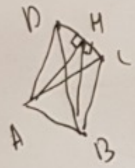
Задача №2

I - вариант





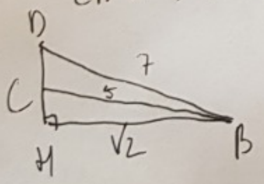




CD - на образующей конуса, рассмотрим поперечное сечение проходящее через точки A и B,, $BH \perp CD \Rightarrow AH \perp CD$, т.к. $\Delta BCD = \Delta ACD$, то сечение проходящее через точку H, радиус минимален, если AB диаметр, тогда $AH = BH = \sqrt{2}$, рассмотрим ΔBCD, $BC = 7 \cdot \sin\beta + 5\sin\alpha$, $\cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{7} \Rightarrow \sin\beta = \frac{\sqrt{47}}{7}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{5} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{23}}{5}$, $DC = \sqrt{47} + \sqrt{23}$

II вариант

$$CD = 7 \cdot \sin\beta - 5 \cdot \sin\alpha = \sqrt{47} - \sqrt{23}$$



Ответ: I-вариант: $\sqrt{47} + \sqrt{23}$; II-ой вариант $\sqrt{47} - \sqrt{23}$

Чистовик

Задача 3

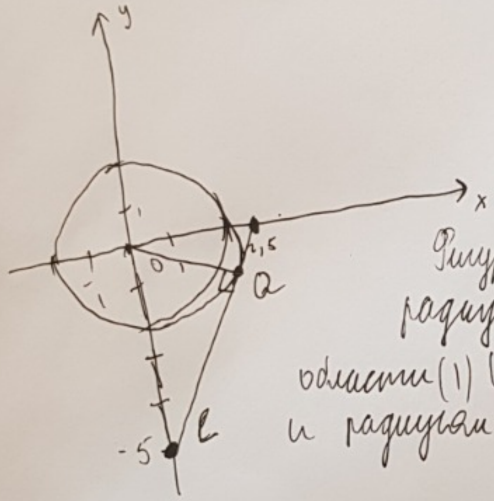
Фигура состоит из полуокружности радиусом $2\cdot\sqrt{5}$, в двух четвертей окружностей радиусов $\sqrt{5}$ и прямоугольника $\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{5}$

$S=\frac{1}{2}\pi\cdot(2\sqrt{5})^2+2\cdot\frac{1}{4}\pi\cdot(\sqrt{5})^2+\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{5}=10\pi+10+\frac{5}{2}\pi=12{,}5\pi+10$

$\begin{cases} b<2a-5 \\ a^2+b^2\le 5 \end{cases}$ т.к $OQ \perp a$: $y=-\frac{1}{2}x$ коэффициенты соответствуют перпендикулярным прямым $\Rightarrow$

$b: y=2x-5$

$\Rightarrow$ окружность косается прямой b $\Rightarrow$ в этой области точек нет



Фигура — объединение всех кругов радиуса $\sqrt{5}$ с центром в точках области (1) (т.е. полукруга с центром $2;-1$ и радиусом $\sqrt{5}$

$(x-a)^2+(y-b)^2=5$ — круг с центром в точке $(a;b)$

определим все возможные $(a;b)$

$a^2+b^2\le \min(4a-2b,5) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a^2+b^2\le 4a-2b \\ 4a-2b\le 5 \end{cases} \\ \begin{cases} a^2+b^2\le 5 \\ 4a-2b>5 \end{cases} \end{array}\right.$

(1) $\begin{cases} b\ge 2a-5 \\ (a^2-4a+4)+(b^2+2b+1)\le 5 \end{cases}$

$\Downarrow$

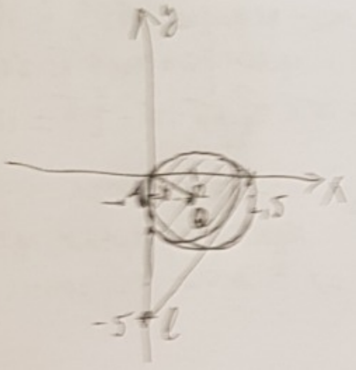
$(a-2)^2+(b+1)^2\le 5$

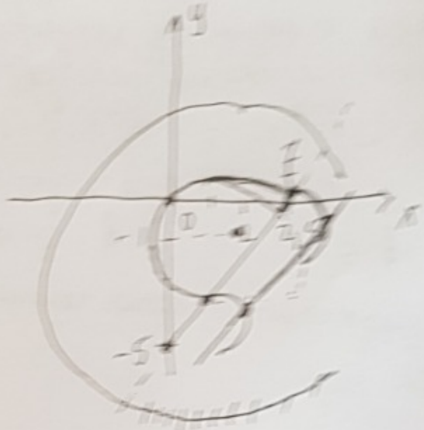
область выше прямой $b: y=2x-5$ $\qquad (a-2)^2+(b+1)^2\le 5$

центр круга лежит на прямой, окружность проходит через $0;0$

3

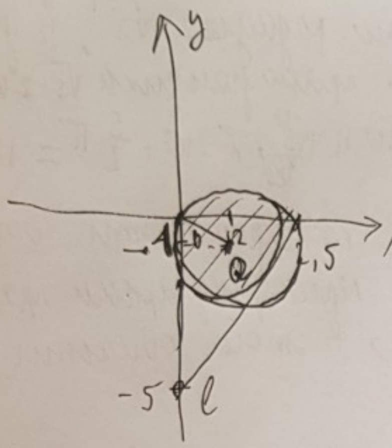
Чистовик

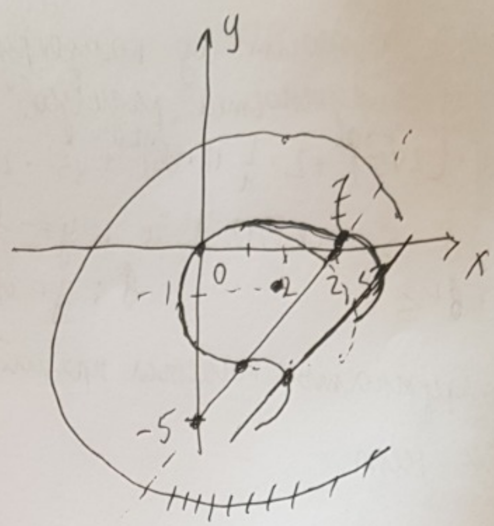




4

Чистовик





4

21102798 (U319911 M1292731)

3 Черновик

$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_7$

$a_1, a_2, \ldots a_7 \in Z$

$a_1, \ldots, a_7$ члены возрастающей арифметической прогрессии

$$\begin{cases} a_7 \cdot a_{12} > S+20 \\ a_9 \cdot a_{10} < S+44 \end{cases}$$

$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_7 = \frac{a_1 + a_7}{2} \cdot 7 = \frac{a_1 + 6d + a_1}{2} \cdot 7 =$

$= \frac{2a_1 + 6d}{2} 7 = (a_1 + 3d)7 = 7a_1 + 21d$

$S = \frac{2a_1 + 6d}{2} \cdot 7 = 7a_1 + 21$

$\frac{14a_1 + 42d}{2} = 7a_1 + 21$

$7a_1 - 7a_1 = -7a_1 + 21$

-21

$$\begin{cases} (a_1 + 6d)(a_1 + 11d) > 7a_1 + 21d + 20 \\ (a_1 + 8d)(a_1 + 9d) < 7a_1 + 21d + 44 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 11a_1 d + 6a_1 d + 66d^2 - 7a_1 - 21d - 20 > 0 \\ a_1^2 + 9a_1 d + 8a_1 d + 72d^2 - 7a_1 - 21d - 44 < 0 \quad | \cdot (-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 11a_1 d + 6a_1 d + 66d^2 - 7a_1 - 21d - 20 > 0 \\ -a_1^2 - 9a_1 d - 8a_1 d - 72d^2 + 7a_1 + 21d + 44 > 0 \end{cases}$$

$2a_1 d - 4a_1 d - 6d^2 + 24 > 0$

$a_1 = \frac{\frac{2S}{7} - 6}{2} \cdot 7$

$\frac{2S - 42}{2}$

$\boxed{S = 21}$

$$\begin{cases} a_1^2 + 11a_1 d + 6a_1 d + 66d^2 - 7a_1 - 21d - 20 > 0 \\ a_1^2 + 9a_1 d + 8a_1 d + 72d^2 - 7a_1 - 21d - 44 < 0 \quad | \cdot 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 17a_1 d + 66d^2 - 7a_1 - 21d - 20 > 0 \\ -a_1^2 - 17a_1 d + 72d^2 + 7a_1 + 21d + 44 > 0 \end{cases}$$

$\frac{2a_1 + d}{2} = 7a_1 + 21$

$-66d^2 + 24$ ⇓

$2a_1 + 1 = 14a_1 + 21$

$12a_1 = -20$

$-6d^2 + 24 > 0$

$6d^2 < 24$

$d^2 < 4$

$d \in (-2; 2)$ т.к. прогрессия возрастающая и состоит из целых чисел тогда $d = 1 \Rightarrow S = 7a_1 + 21$

$7a_1 = S - 21, \quad a_1 = \frac{S - 21}{7} = \frac{S}{7} - 3$

$\frac{\frac{S}{7} - 3 + 6}{2} \cdot 7 =$

21102798 (U319911 M1299731)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102798**

ID профиля: **319911**

Вариант 18

Чистовик

Чистовик

№4

$НОД(a,b,c)=15 \Rightarrow a=15k$

$b=15n$

$c=15m$

$НОК(a,b,c)=3^{15}\cdot 5^{18} \Rightarrow$ простые делители $a, b, c = 3; 5$

$$\left.\begin{array}{l} a=3^{a_1}\cdot 5^{a_2} \\ b=3^{b_1}\cdot 5^{b_2} \\ c=3^{c_1}\cdot 5^{c_2} \end{array}\right\} \Rightarrow НОК = 3^{max(a_1;b_1;c_1)}\cdot 5^{max(a_2,b_2,c_2)}$$

$a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \geq 1$ из условия про НОК

кроме того одно из $a_1, b_1, c_1 = 1$, т.к иначе НОД был бы больше, аналогично a_2, b_2, c_2

Пусть $a_1=15$, $b_1=1$, тогда c_1 может быть от 1 до 15 всего 15 комбинаций

Тоже самое если $c_1=15$ $b_1=1$ и т.д. всего таких перестановок $3!=6 \Rightarrow 6\cdot 15=90$ комбинаций с учетом повторов

Аналогично с a_2 b_2 c_2, только числа меняются до 18

всего $18\cdot 3!=108$

Правило произведения

$90\cdot 108=9720$

Ответ: 9720

1

Чистовик

№5

$$\begin{cases} \log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14) = \log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right) \\ \log_{6x-14}(x-1)^2 = \log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right) - 1 \end{cases}$$

$$\cancel{\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}} \cdot \log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right) = \cdot}$$

$$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}} \cdot \log_{6x-14}(x-1)^2 = \log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right) \cdot \left(\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right) - 1\right)$$

$$\frac{4 \cdot \log_{6x-14}(x-1)}{\log_{6x-14}\left(\frac{x}{3}+3\right)} = \log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right) \cdot \left(\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right) - 1\right)$$

$$\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right) = t$$

$$\frac{4}{t} = t(t-1)$$

$$\frac{4}{t} = t^2 - t$$

$$t^3 - t^2 = 4$$

$$t^3 - t^2 - 4 = 0$$

$$(t-2)(t^2+t+2) = 0$$

$$t = 2$$

$$\log_{x-1} \frac{x}{3}+3 = 2$$

$$(x-1)^2 = \frac{x}{3}+3$$

$$x^2 - 2x + 1 = \frac{x+9}{3}$$

$$3x^2 - 6x + 3 = x + 9$$

$$3x^2 - 7x - 6 = 0$$

$$x_1 = 3$$

$x_2 = -\frac{2}{3}$ - посторонний корень

2

21102798 (U31991I-ML299732)

ОДЗ: №5 Чистовик

$$\begin{cases} \frac{x}{3}+3>0 \Rightarrow x>-9 \\ \frac{x}{3}+3\neq 1 \Rightarrow x\neq -8 \\ 6x-14>0 \Rightarrow x>\frac{7}{3} \\ 6x-14\neq 1 \Rightarrow x\neq \frac{5}{2} \\ x-1\neq 0 \Rightarrow x\neq 1 \\ x-1\neq 1 \Rightarrow x\neq 2 \end{cases}$$

$x\in\left(\frac{7}{3};\frac{5}{2}\right)\cup\left(\frac{5}{2};+\infty\right)$

Ответ: 3

3

Чистовик

№6

Пусть $\angle B = \alpha$, тогда $\angle AOC = 2\alpha$ (т.к. центральный)

$\angle AOC = \angle APC$ (вписанные ω_2) $\angle BPA = 180^\circ - 2\alpha$, тогда $\angle BAP = 180^\circ - \cancel{(2\alpha)}\ (180^\circ - 2\alpha) - \alpha = \alpha \Rightarrow \triangle ABP$ равнобедр ($PB = PA$)

$\angle CAT = \angle ACT = \angle B = \alpha$ (как углы между касательной и хордой)

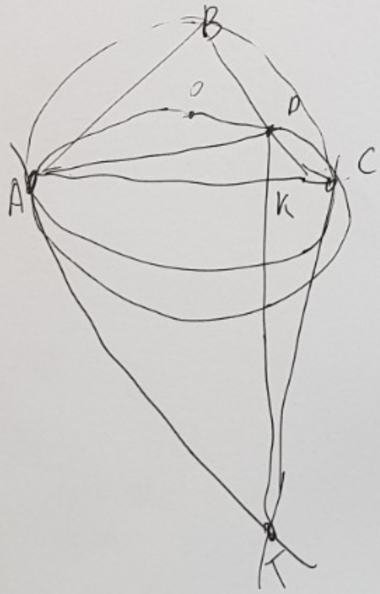
$\angle ATC = 180^\circ - 2\alpha$, тогда $ABCP$ – вписанный четы-х угольник $\Rightarrow \angle ABD = \angle ACT = \alpha$ и тогда $\angle TBC = \alpha$ и BT биссектриса $\triangle ABC$ и PK биссектриса APC

$$\frac{S_{APK}}{S_{PKC}} = \frac{6}{5} \Rightarrow \frac{AK}{KC} = \frac{6}{5} \Rightarrow \frac{AP}{PC} = \frac{6}{5} \Rightarrow \frac{BP}{PC} = \frac{6}{5} \Rightarrow$$

$$\frac{S_{ABP}}{S_{APC}} = \frac{6}{5} \quad S_{APC} = 6+5 = 11 \quad S_{ABP} = \frac{11 \cdot 6}{5} = 13{,}2$$

$S_{ABC} = 13{,}2 + 11 = 24{,}2$

Ответ а) 24,2



6

III Черновик

$$\begin{cases} \text{НОД}(a,b,c) = 15 = 3^1 \cdot 5^1 \\ \text{НОК}(a,b,c) = 3^{15} \cdot 5^{18} \end{cases}$$

$$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14); \quad \log_{6x-14}(x-1)^2; \quad \log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)$$

$$\frac{1}{\frac{1}{2}\log_{(x-1)}(6x-14)} = \log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)$$

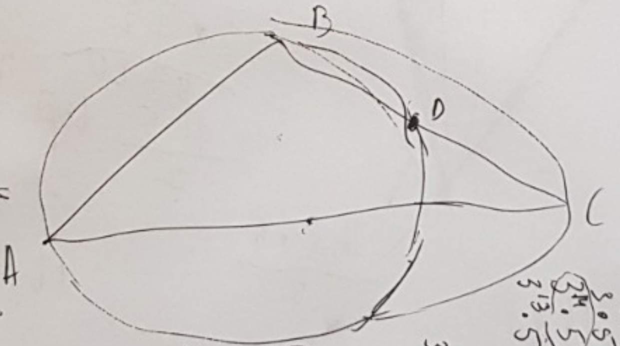
$$\frac{1}{2\log_{x-1}(6x-14)} - \log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right) = 0$$

$$\frac{1}{12x-28} = \frac{x+9}{3}$$

$$3 = (x+9)(12x-28)$$

$$12x^2+108x-152-28x-3=0$$

$$12x^2+80x-155=0$$



$$\begin{cases} \text{НОД}(a,b,c) = 15 = 3 \cdot 5 \\ \text{НОК}(a,b,c) = 3^{15} \cdot 5^{18} \end{cases}$$

$+2$ варианта

$15 \cdot 18$

$\boxed{2452}$