Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102775**

ID профиля: **185191**

Вариант 18

Черновик

№1

b – разность , $b>0$

$a_1,\ a_1+b\ ,\ \dots\ ,a_1+6b$

$S=7a_1+(b+2b+3b+4b+5b+6b)=7a_1+21b$

$a_7=a_1+6b$

$a_{12}=a_1+11b$

$(a_1+6b)(a_1+11b)=a_1^2+17b\cdot a_1+66b^2>7a_1+21b+20$

$(a_1+8b)(a_1+9b)=a_1^2+17b\cdot a_1+72b^2<7a_1+21b+44$

$66b^2+44>72b^2+20$

$6b^2<24$

$b^2<4$

$b\in(0;2)$

$b=1$ (числа целые)

$S=7a_1+21$

$a_1^2+17a_1+66>7a_1+21+20$

$a_1^2+10a_1+25>0$

$(a_1+5)^2>0$; $a_1\neq-5$

$a_1^2+17a_1+72<7a_1+21+44$

$a_1^2+10a_1+7<0$

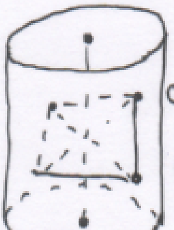
$D=100-\cancel{49\cdot4}\ 7\cdot4=72$

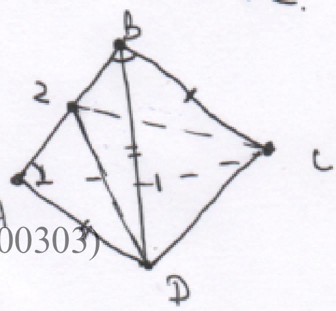
$a_1=\frac{-10+3\cdot2\sqrt2}{2}=-5+3\sqrt2$; $a_2=-5-3\sqrt2$

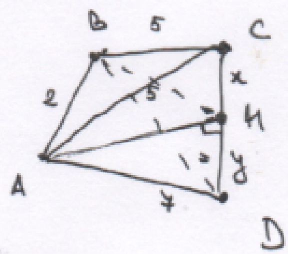
$-9;-8;-7;-6;-4;-3;-2;-1$

1

№2.







Черновик.

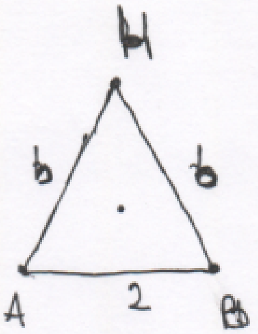
№3.

круг с центром (a,b)

$$(x-a)^2+(y-b)^2 \leq 5$$

$$a^2+b^2 \leq \min(4a-2b, 5)$$

$$a \geq b$$



$5^2 = x^2 + AM^2$

$7^2 = y^2 + AM^2$

$\cancel{(x-y)(x+y)=}$

$y^2 - x^2 = 24$

$\cos\angle A = \frac{1}{b}$

$\sin\angle A = \frac{\sqrt{b^2-1}}{b}$

$S = \sqrt{b^2-1}$

$\frac{b}{\sin\angle A} = 2R$

$\frac{b^2}{\sqrt{b^2-1}} = 2R$

$\frac{b^2}{\sqrt{b^2-1}} \to \min$

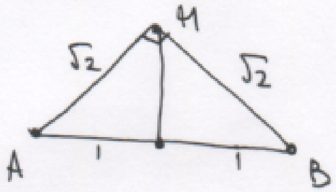
$b^2 = 2R\cdot\sqrt{b^2-1}$

$b^4 = 4R^2\cdot(b^2-1)$

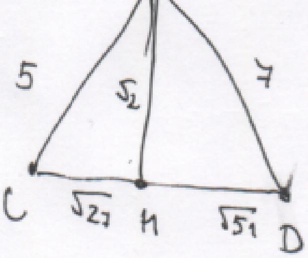
$b^4 - 4R^2\cdot b^2 + 4R^2 = 0$

$\cancel{16R^4 - 16R^2 > 0}$ $D = 16R^4 - 16R^2 = 4^2\cdot R^2(R^2-1)$

$b = \sqrt{2}$



$\boxed{\sqrt{27}+\sqrt{51}}$



2

21102775 (U185191 M1300303)

Черновик.

№3

$(a-x)^2+(b-y)^2\le 5$

$a^2+b^2\le \min(4a-2b,5)$

$4a-2b\le 5$

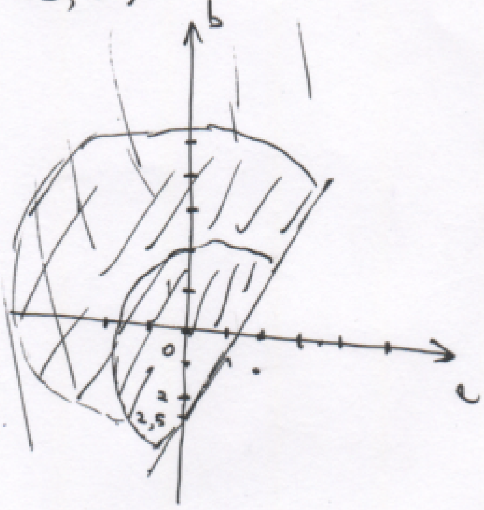
$b\ge 2a-2,5$

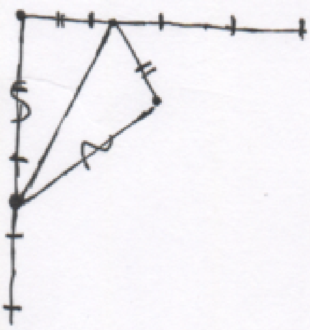
$a^2+b^2\le 4a-2b$

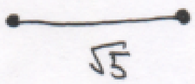
$a^2-4a+4+b^2+2b+1\le 5$

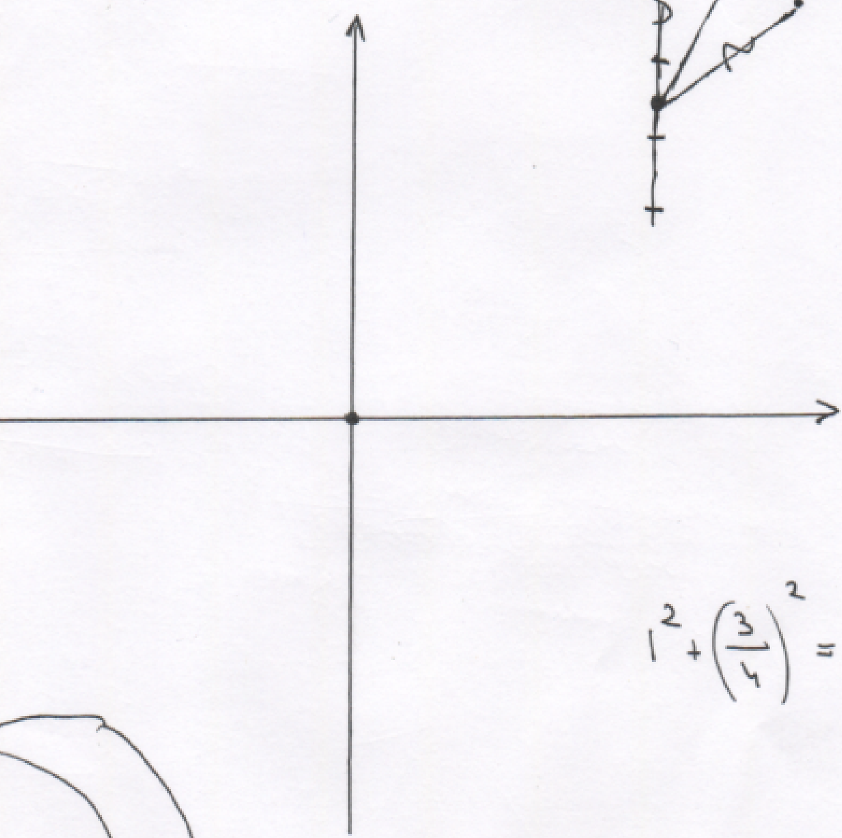
$(a-2)^2+(b+1)^2\le 5$

$a^2+b^2\le 5$

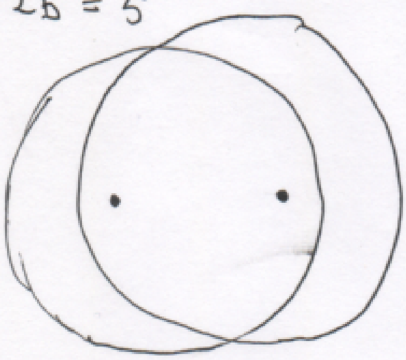








$$\begin{cases} a^2+b^2=5 \\ 4a-2b=5 \end{cases}$$



$1^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2=1\frac{9}{16}=\frac{25}{16}=\left(\frac{5}{4}\right)^2$

$2^2+(1,5)^2=6,25=(2.5)^2$

Чистовик

№1.

Пусть b – разность арифм. прогрессии $(b>0)$.

Обозначим члены прогрессии за a_1, a_1+b, a_1+2b и т.д.

$$S = a_1 + a_1 + b + \ldots + a_1 + 6b = 7a_1 + 21b$$

По условию:

$$(a_1+6b)(a_1+11b) = a_1^2 + 17b\cdot a_1 + 66b > 7a_1 + 21b + 20$$

$$(a_1+8b)(a_1+9b) = a_1^2 + 17b\cdot a_1 + 72b^2 < 7a_1 + 21b + 44$$

$$+\begin{cases} a_1^2 + 17b\cdot a_1 + 66b^2 > 7a_1 + 21b + 20 \\ 7a_1 + 21b + 44 > a_1^2 + 17b\cdot a_1 + 72b^2 \end{cases}$$

$$66b^2 + 24 > 72b^2$$

$b^2 < 4$ (и $b > 0$ по условию)

$b \in (0;2)$

Но прогрессия состоит из целых чисел, то есть $b \in \mathbb{Z}$,

значит $b = 1$

Решим теперь неравенства относительно a_1

$$\begin{cases} a_1^2 + 17a_1 + 66 > 7a_1 + 21 + 20 \\ a_1^2 + 17a_1 + 72 < 7a_1 + 21 + 44 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1 - 5)^2 > 0 \\ a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 \neq 5 \\ a_1 \in (-5-\sqrt{18}\,;\ -5+\sqrt{18}) \end{cases}$$

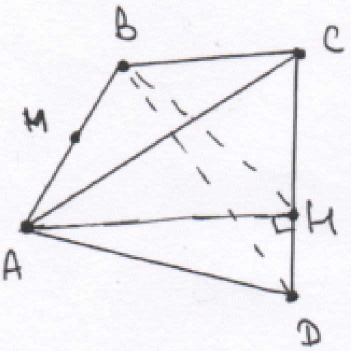
$4 < \sqrt{18} < 5$, Отсюда получаются все возможные целые a_1

$a_1 = -9$; $a_1 = -8$; $a_1 = -7$; $a_1 = -6$; $a_1 = -4$; $a_1 = -3$; $a_1 = -2$; $a_1 = -1$

Ответ: $-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1$

Чистовик.

№2.



Рассмотрим (MCD), где M — середина AB.

$MC \perp AB$ (медиана, биссектриса и высота в равнобедренном $\triangle ABC$)

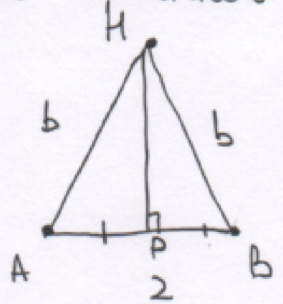
$MD \perp AB$ (аналогично для $\triangle ABD$)

Тогда $AB \perp (MCD)$, т.е. $AB \perp CD$. По условию ~~$CD \perp$~~ CD параллельна оси цилиндра, значит AB параллельна основаниям цилиндра.

Пусть ~~AD~~ AH — высота к CD в $\triangle ACD$. $\triangle ACD = \triangle BCD$ ($AD = BD$, $AC = BC$, CD общая). Заметим, что из-за общая, BH является высотой к CD в $\triangle BH$ и того, что CD

$AH \parallel$ основаниям, $BH \parallel$ основаниям (аналогично объяснению с AB)

Значит (ABH) параллельна основаниям цилиндра и является проекцией тетраэдра на нижнее основание. Получается, что радиус описанной окружности $\triangle ABH$ — это радиус цилиндра.



$\cos\angle A = \frac{1}{b}$; $\sin\angle A = \frac{\sqrt{b^2-1}}{b}$

$\frac{b}{\sin\angle A} = 2R$ (т. синусов)

$\frac{b^2}{\sqrt{b^2-1}} = 2R$

$b^4 - 4R^2 \cdot b^2 + 4R^2 = 0$

Нам нужно найти такое $\min R$, чтобы уравнение имело положительный корень

$D = 16R^4 - 16R^2 = 4^2 \cdot R^2 \cdot (R^2 - 1) \geq 0$

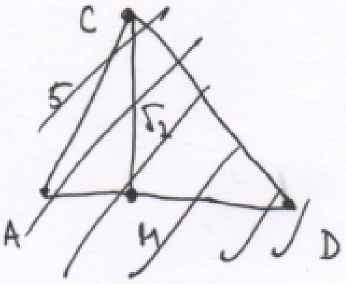
$x_{12} = \frac{4R^2 \pm \sqrt{D}}{2}$ т.е. $R \geq 1$

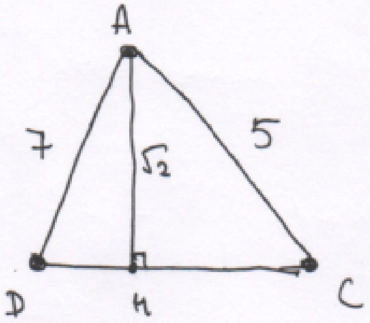
Всегда есть положительный корень при $D \geq 0$, т.к. $4R^2 + \sqrt{D} > 0$

Значит минимальный радиус цилиндра равен 1, это возможно тогда, когда $\triangle AHB$ прямоугольный, AB — гипотенуза (т.к. $2R \geq AB$).

В этом случае $AH^2 + HB^2 = 2b^2 = 4$

$b = \sqrt{2}$





$DH = \sqrt{7^2 - 2} = \sqrt{47}$

$HC = \sqrt{5^2 - 2} = \sqrt{23}$

$CD = \sqrt{47} + \sqrt{23}$

Ответ: $\sqrt{47} + \sqrt{23}$

Чистовик

№3.

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 5\\ a^2+b^2\le \min(4a-2b,\,5)\end{cases}$$

$$\begin{cases}(a-x)^2+(b-y)^2\le 5\\ a^2+b^2\le \min(4a-2b,\,5)\end{cases}$$

Из условия следует, что для каждой точки (x, y) фигуры M должны сущ. a и b, удовл. этой системе. Нарисуем график системы. При $4a-2b\ge 5$ система преобразуется в:

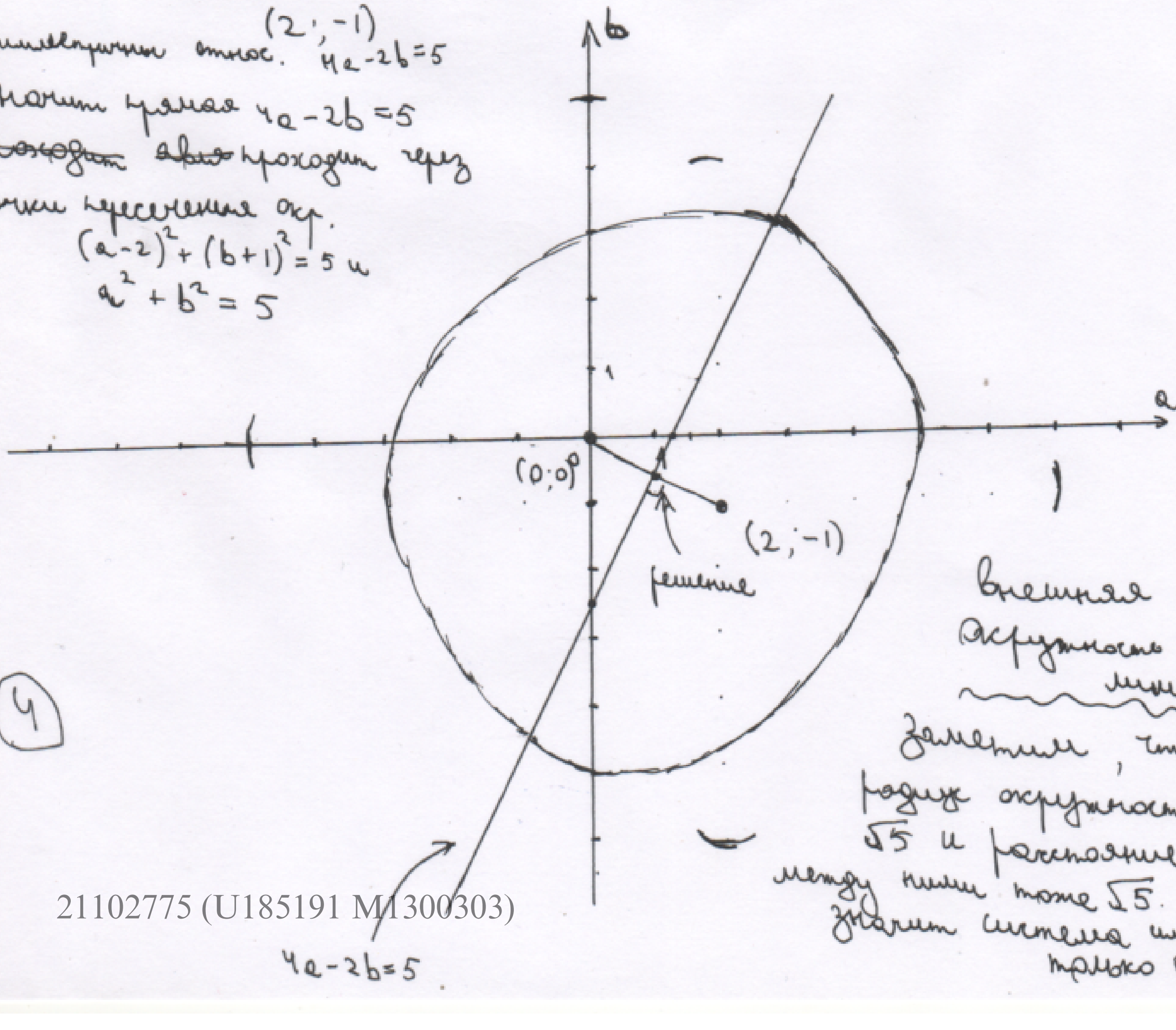
$$\begin{cases}(a-x)^2+(b-y)^2\le 5\\ (a-2)^2+(b+1)^2\le 5\end{cases}$$

При $4a-2b<5$:

$$\begin{cases}(a-x)^2+(b-y)^2\le 5\\ \cancel{4a}\ a^2+b^2\le 5\end{cases}$$

Заметим, что $(0;0)$ и $(2;-1)$ симметричны относ. $4a-2b=5$

Значит прямая $4a-2b=5$ ~~проходят~~ ~~через~~ проходит через точки пересечения окр. $(a-2)^2+(b+1)^2=5$ и $a^2+b^2=5$



4

Заметим, что радиус окружностей $\sqrt{5}$ и расстояние между ними тоже $\sqrt{5}$. Значит система имеет только одно решение

Чистовик.

№3

Решением системы является точка пересечения $4a-2b=5$ и отрезка между $(0,0)$ и $(2,1)$. Выходит, чтобы ~~урав~~ начальная система (~~x~~ x и y) имела решение (т.е. сущ. для a и b), нужно чтобы круг $(a-x)^2+(b-y)^2 \le 5$ содержал эту точку, т.е расстояние от $(x;y)$ до этой точки было меньше $\sqrt{5}$

5

21102775 (U185191 M1300303)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102775**

ID профиля: **185191**

Вариант 18

Черновик.

№4.

$$\begin{cases} НОД(a,b,c) = 3\cdot 5 \\ НОК(a,b,c) = 3^{15}\cdot 5^{18} \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} \times\ 919 \\ 401 \\ \hline +\ 919 \\ 367600 \\ \hline 368519 \end{array}$$

a^{1} b^{15} $c^{1 \dots 15}$

$18\cdot 18 = 324$

$$\begin{array}{r} \times\ 324 \\ 18 \\ \hline +\ 2592 \\ 3240 \\ \hline 5832 \end{array}$$

a b c

$3\cdot 2\cdot 16\cdot 3\cdot 2\cdot 16 = 6^2\cdot 16^2$

№5.

$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)$, $\log_{6x-14}(x-1)^2$, $\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)$

$a = \frac{x}{3}+3$; $b = 6x-14$; $c = x-1$

$17\cdot 17 = 289$

$$\begin{array}{r} \times\ 289 \\ 17 \\ \hline +\ 2023 \\ 2890 \\ \hline 4913 \end{array}$$

$2\log_a b$, $2\log_b c$, $\log_c a$

1) $\begin{cases} \log_a b = \log_b c \\ \log_c a + 1 = \log_a b \end{cases}$

$\log_x y = \frac{1}{\log_y x}$

$\log_a b \cdot \log_b c = \log_a b \cdot \frac{\log_a c}{\log_a b} =$
$= \log_a c$

$\frac{\log_b b}{\cancel{\log_a b}\log_b a} = \log_b c$

$2\log_a b \cdot 2\log_b c \cdot \log_c a = 4$

$\cancel{x^2(x-1)=4}$ $m^2\cdot(m-1) = 4$

$m^3 - m^2 - 4 = 0$

$m^3 + m^2 + 2m - 2m^2 - 2m - 4 =$
$= m^3 - m^2 - 4 =$

$$\begin{array}{l|l} -\ m^3 - m^2 - 4 & m-2 \\ \ \ m^3 - 2m^2 & \overline{m^2+m+2} \\ \quad -\ m^2 - 4 & \\ \quad\ \ m^2 - 2m & \\ \qquad 2m - 4 & \end{array}$$

$(m-2)(\underbrace{m^2+m+2}_{>0}) = 0$

$\boxed{m = 2}$

1) $2\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14) = 2$ (1)

$\frac{x}{3} + 3 = 6x - 14 \quad |\cdot 3$

$x + 9 = 18x - 42$

$17x = 51$

$x = 3$

② Черновик

$\log x = 3$ ~~не подходит~~, т.к. $6x - 14 < 0$

~~$6x-14=x-1$~~

~~$5x = 13$~~

~~$x = \frac{13}{5} = 2,6$~~

$(x-1)^2 = \frac{x}{3} + 3$

$x^2 - 2x + 1 = \frac{x}{3} + 3 \quad | \cdot 3$

$3x^2 - 7x - 8 = 0$

$D = $ ~~$49 + 96 =$~~

$\log_4 4 = 1$

$\log_2$

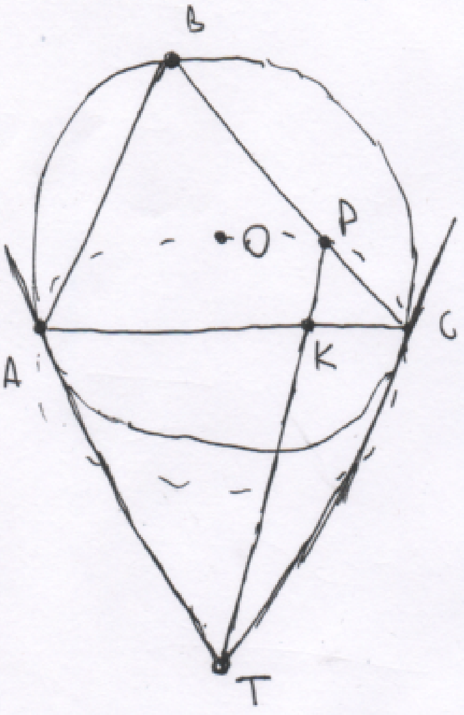
$14 \cdot 14 = 196$

$$\begin{array}{r} \times\ 196 \\ 14 \\ \hline +\ 964 \\ 1960 \\ \hline 2924 \end{array}$$

$x = 3$ подходит

$15 \cdot 15 = 225$

$$\begin{array}{r} \times\ 225 \\ 15 \\ \hline 1075 \\ +\ 2250 \\ \hline 3325 \end{array}$$



№6.

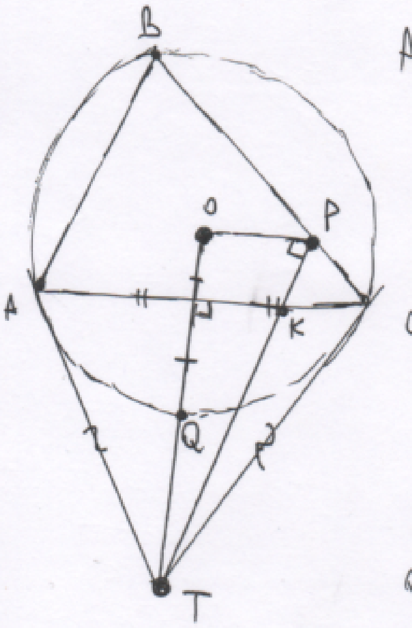
+ $HC =$

$AC = \sqrt{3}R$

$\sin\angle ABC = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$S_{APK} = 6$; $S_{CPK} = 5$

$AK : KC = 6 : 5$



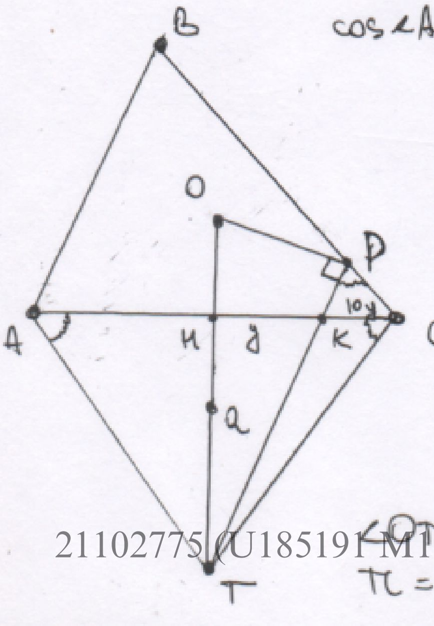
$AC = 2 \cdot \sqrt{1,5}\, R =$
$= \sqrt{6} R$

$\sin\angle ABC = \frac{AC}{2R} =$
$= \frac{\sqrt{6}}{2} =$
$= \sqrt{\frac{3}{2}}$

~~Q – центр окр.~~

Q – середина OT

$\left[\| y = \sqrt{\frac{R}{4} \cdot \frac{3R}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{4} R \right]$



$\cos\angle ABC =$

$\angle OTC = 30°$

$TC = AC = AT$

$AK = 6x$; $KC = 5x$

$AH = 5,5x$

$HK : KC = 0,5 : 5 = 1 : 10$

$\triangle AKT \sim \triangle PKC$

$PK \cdot KT = 30x^2$

$\left[TC = \sqrt{3} R \right]$

$HC = \sqrt{3R^2 - \frac{9}{16}R^2 \; 1,5R^2} =$
$= \sqrt{1,5}\, R$

Чистовик

№4

$$\begin{cases} \text{НОД}(a,b,c) = 3 \cdot 5 \\ \text{НОК}(a,b,c) = 3^{15} \cdot 5^{18} \end{cases}$$

~~НОД определяется минимальным произведением простых в минимальных~~ Т.к. НОД этих чисел равен $3 \cdot 5$, то у каждого числа должны присутствовать делители 3 и 5 в каких-то степенях, однако хотя бы у одного числа 3 присутствует в степени 1, и какого-то 5 в степени 1.

Т.к. НОК этих чисел равен $3^{15} \cdot 5^{18}$, то у чисел a, b, c нет делителей, отличных от 3 и 5, а наибольшие степени 3 и 5 равны 15 и 18 соответственно. Осталось посчитать

~~1) 3 в 1-ой степени и 5 в 1-ой принадлежат одному числу.~~

~~$3 \cdot 15^2 \cdot 18^2 =$~~

~~способов выбрать это число~~

~~способов выбрать степени 5~~

~~способов выбрать степени 3 для оставшихся чисел~~

~~2) 3 в 1-ой и 5 в 1-ой принадлежат разным числам~~

~~$3 \cdot 18 \cdot 2 \cdot 15 \cdot 15$~~

Способов распределить степени тройки:

$$15 \cdot 15 \cdot 15 - 14 \cdot 14 \cdot 14 - 14 \cdot 14 \cdot 14 =$$

$$= 15^3 - 2 \cdot 14^3 = 3325 - 2924 =$$

$$= 401$$

все возможные случаи распределения

вычитаем случаи, когда нет числа со степенью 1

вычитаем случаи, когда нет числа со степенью 15

Способов распределить степени 5:

$$18 \cdot 18 \cdot 18 - 17 \cdot 17 \cdot 17 \cdot 2 = 18^3 - 2 \cdot 17^3 =$$

$$= 5832 - 4913 = 919$$

1

Всего: $401 \cdot 919 = 368519$

Ответ. 368519

Чистовик.

№5

$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)$, $\log_{6x-14}(x-1)^2$, $\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)$

$a=\frac{x}{3}+3$; $b=6x-14$; $c=x-1$

$2\log_a b$, $2\log_b c$, $\log_c a$

Перемножим эти числа

$2\log_a b\cdot 2\log_b c\cdot \log_c a = 4\log_a c\cdot\log_c a = 4$

Пусть два из этих чисел равны m, а одно $m-1$

$m^2(m-1)=4$

$m^3-m^2-4=0$

$(m-2)(m^2+m+2)=0$

У $m^2+m+2=0$ нет корней, т.к. $D<0$.

Значит есть только один случай $m=2$

1) $\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)=2$

$\frac{x}{3}+3=6x-14$

$17x=51$

$x=3$

$\log_{6x-14}(x-1)^2=\log_4 2^2=\cancel{2=m}\ 1=m-1$

$\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)=\log_2 4=2=m$

Этот случай подходит

~~2) $\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)=1$~~

~~$\frac{x}{3}+3=(6x-14)^2$~~

~~$\frac{x}{3}+3=36x^2-168x+$~~

~~Заметим, что все равенства ($2\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)=2$, $2\log$~~

2) $\log_{6x-14}(x-1)^2=m=2$

$6x-14=x-1$

$5x=13$, $x=\frac{13}{5}$

Чистовик.

$$\log_{\frac{13}{5}-1}\left(\frac{13}{15}+3\right)=\log_{1,6}\frac{58}{15}=\log_{\frac{8}{5}}\frac{58}{15}\neq 2$$

$$\log_{\frac{8}{5}}\frac{58}{15}\neq 1$$

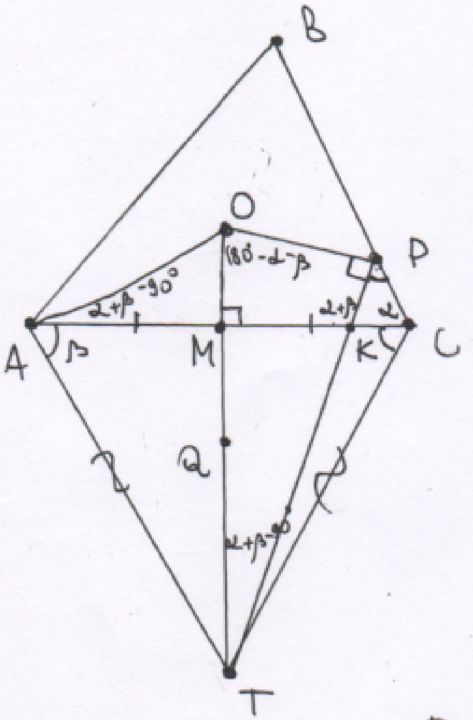
Значит этот случай невозможен.

Т.к. c, единственное решение $x=3$

Ответ: $x=3$

Чистовик.

№6.



$S_{APK}=\frac{1}{2}h'\cdot AK$; $S_{CPK}=\frac{1}{2}h'\cdot CK$

$\frac{S_{APK}}{C_{CPK}}=\frac{AK}{CK}=\frac{6}{5}$

$AK:CK=6:5$

$\angle OCT=90°$, т.к. CT – касательная, OC – радиус

Аналогично $\angle OAT=90°$

Значит AOCT – вписанный, центр окружности – это середина OT (Q)

Тогда P тоже лежит на этой окружности (ведь P лежит на описанной окр. $\triangle AOC$)

OT – сер. пер. к AC, т.к. AO=OC, AT=TC

$AK=6x$; $KC=5x$

$AC=11x$; $AM=5,5x$

$MK:KC=0,5x:5x=1:10$

21102775 (U185191 M1300304)