Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102748**

ID профиля: **282156**

Вариант 18

Чистовик.

№1.

$a_7 = a_1 + 6d$

$a_{12} = a_1 + 11d$

$a_9 = a_1 + 8d$

$a_{10} = a_1 + 9d$

$S = \frac{a_1 + a_7}{2} \cdot 7 = \frac{a_1 + a_1 + 6d}{2} \cdot 7 = (a_1 + 3d) \cdot 7 = 7a_1 + 21d$

(1) $(a_1+6d)(a_1+11d) > 7a_1 + 21d + 20$

$a_1^2 + 17a_1 d + 66d^2 > 7a_1 + 21d + 20$

(2) $(a_1+8d)(a_1+9d) < 7a_1 + 21d + 44$

$a_1^2 + 17a_1 d + 72d^2 < 7a_1 + 21d + 44$

$a_1^2 + 17a_1 d + 66d^2 < 7a_1 + 21d + 44 - 6d^2$

С учётом (1) и (2):

$7a_1 + 21d + 20 < a_1^2 + 17a_1 d + 66d^2 < 7a_1 + 21d + 20 + (24 - 6d^2)$

Чтобы условия выполнялись, необходимо, чтобы: $7a_1 + 21d + 20 < 7a_1 + 21d + 20 + (24 - 6d^2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6d^2 < 24 \Leftrightarrow \boxed{d^2 < 4}$

т. к. члены ар. прогрессии – все целые, то и d – целое. С учётом условия $d>0$, единственное возможное $d = 1$.

Тогда подставим в (1) и (2):

$$\begin{cases} a_1^2 + 17a_1 + 66 > 7a_1 + 21 + 20 \\ a_1^2 + 17a_1 + 66 < 7a_1 + 21 + 44 - 6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

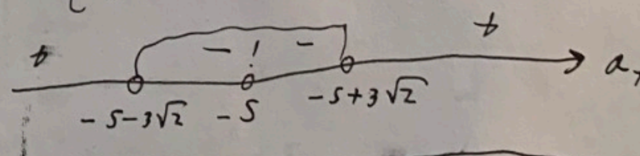
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0 \\ a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a_1+5)^2 > 0 \\ (a_1 - (-5+3\sqrt{2}))(a_1 - (-5-3\sqrt{2})) < 0 \end{cases}$$

-66, -41, 25; $38 + 21 = 59$; -66, -59, 7

$a_1^2 + 10a_1 + 7 = 0$

$a_1 = -5 \pm \sqrt{25-7} = -5 \pm \sqrt{18} = -5 \pm 3\sqrt{2}$

$3\sqrt{2} \approx 4,\ldots$



$\left[\begin{array}{l} a_1 = -9 \\ a_1 = -8 \\ a_1 = -7 \\ a_1 = -6 \\ a_1 = -4 \\ a_1 = -3 \\ a_1 = -2 \\ a_1 = -1 \end{array} \right.$

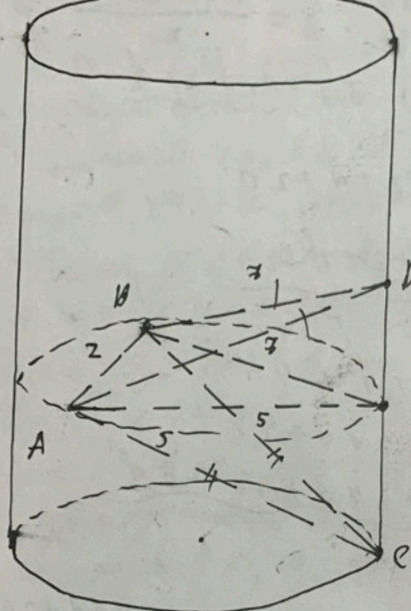
Ответ: $-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1$.

Чистовик.

N2.

R_{min}

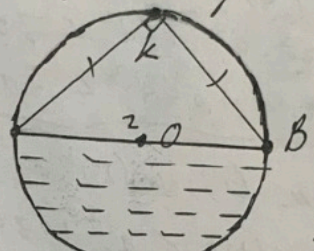
CD — ?



Решение:

Проведём плоскость $(ABK) \parallel$ основаниям, $K \in CD$. Тогда окружность, описанная вокруг $\triangle ABK$ — и есть окружность с радиусом цилиндра.

Рассмотрим это сечение:



Так как любая хорда не проходящая через центр окружности, меньше диаметра, то минимальным диаметром будет AB. Других вариантов быть не может, т.к. $(ABK) \perp CD$ (т.к. $(ABK) \parallel$ осн.) $\Rightarrow \begin{cases} AK = \sqrt{25 - CK^2} \\ BK = \sqrt{25 - CK^2} \end{cases}$ (по т. Пифагора) $\triangle AKB$ — р/б:

следовательно, мы не можем поворачивать AB, а лишь можем двигать его параллельно своего предыдущего положения.

Тогда $AK = BK = \sqrt{2}$ (по т. Пифагора)

$CD = CK + DK$. Найдём их:

$CK = \sqrt{25 - 2} = \sqrt{23}$ (Пиф.)

$DK = \sqrt{49 - 2} = \sqrt{47}$ (Пиф.)

Тогда $\underline{CD = \sqrt{23} + \sqrt{47}}$

Ответ: $\sqrt{23} + \sqrt{47}$.

№3. Чистовик.

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 5 & (1)\\ a^2+b^2\le \min(4a-2b,5) & (2)\end{cases}$$

Т.к. в (1) нер-ве (a; b) – центр окружности с радиусом $\le\sqrt{5}$, то из (2) нер-ва можно найти все точки (a; b) в декартовой системе, удовлетворяющие (2) и подставить в (1).

(2): Если $5\le 4a-2b$:

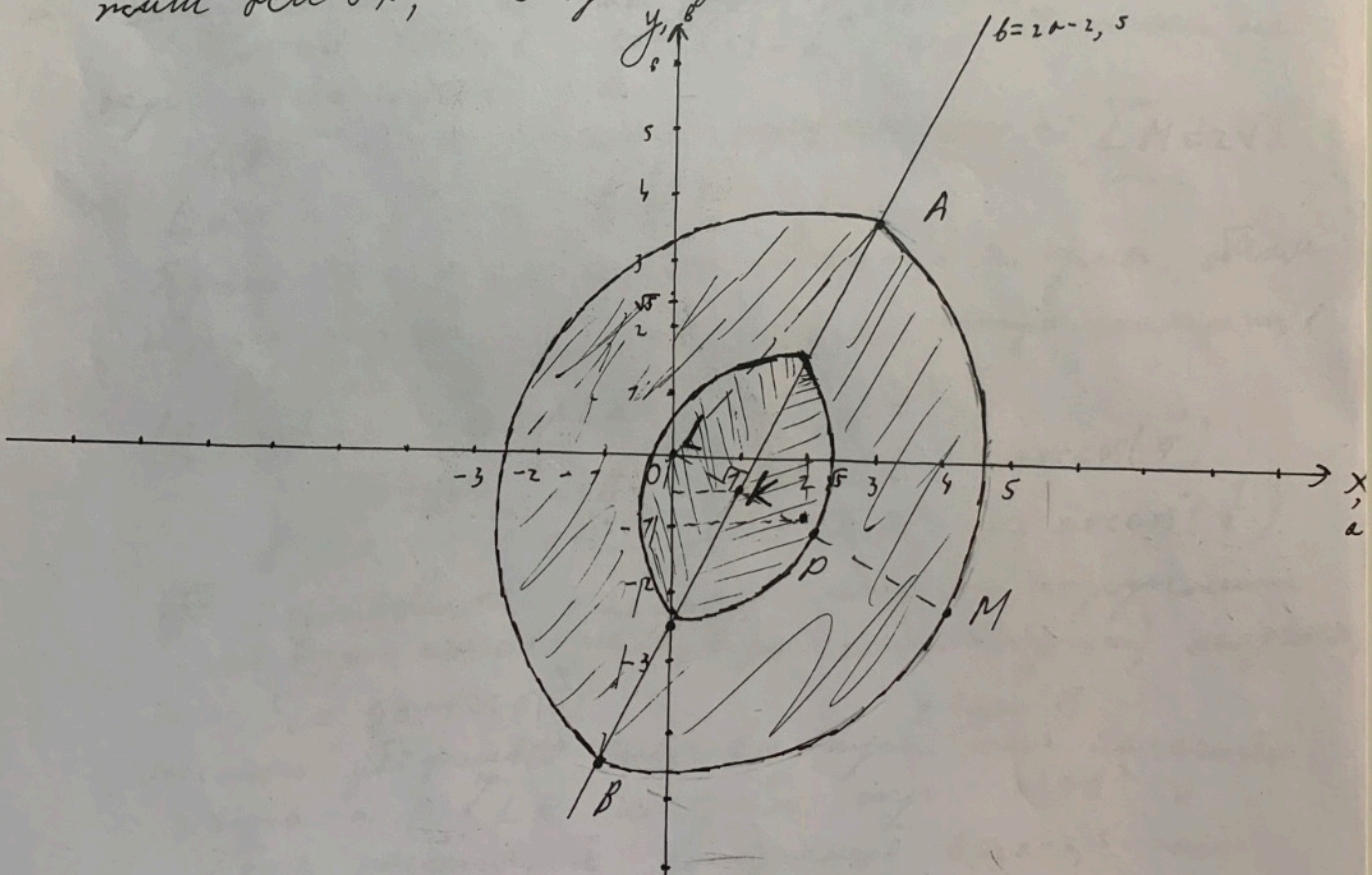
$a^2+b^2\le 5$ – окружность с центром в точке (0; 0)

Если $5>4a-2b$:

$a^2+b^2\le 4a-2b \Leftrightarrow a^2-4a+4+b^2+2b+1-1-4\le 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a-2)^2+(b+1)^2\le 5$ – окружность с центром в точке (2; -1).

В декартовой системе координата a принадлежит оси Ox, а b – принадлежит OY.



1) Начертим прямую $4a-2b=5$ $b=2a-2,5$

2) Начертим $a^2+b^2\le 5$ и $(a-2)^2+(b+1)^2\le 5$

Все эти точки (a; b) соответствуют возможному центру фигуры M.

Чистовик)

Двигая центр окружности из (1) нер-ва, где максимальный радиус $=\sqrt{5}$, ~~мы увеличиваем~~ образуется ~~дуга~~ одна дуга, расстояние до которых от двух окружностей с a и b равно $\sqrt{5}$.

Значит, искомая площадь фигуры равна площади 2 частей окружности по обе стороны от прямой $b=2a-2,5$. ~~Остается~~

Так как макс. радиусы окружностей c (a и b) $=\sqrt{5}$, а радиус ~~больших~~ (1) окружностей тоже $\sqrt{5}$, то радиус больших окружностей (линии фигуры M) равен $\sqrt{5}+\sqrt{5}=2\sqrt{5}$.

Так как центры окр. $a^2+b^2=5$ и $(a-2)^2+(b+1)^2=5$ симм. отн. прямой $b=2a-2,5$ (так как расстояния от точек до прямой равны), то и центры больших окружностей симм. отн. прямой $b=2a-2,5$.

Пусть $(0;0)-L$; $(1;-0,5)-K$ $K\in(b=2a-2,5)$; а т. M лежит на окр. и на прямой LK.

LM – радиус большой окружности $\Rightarrow LM=2\sqrt{5}$

$LK=\sqrt{1+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$ (Пиф.)

Пусть (A и B) $\in$ прямой $b=2a-2,5$ и прин. обеим окружностям. (т.к. $OM\perp AB$ т.к. центры симметричны)

$LB=LA=2\sqrt{5}$ $\cos\angle ALK=\frac{LK}{LA}$ $\frac{\sqrt{5}}{2\cdot2\sqrt{5}}=\frac{1}{4}$

~~$\angle ALK=$~~ $\angle BLA=2\angle ALK=2\arccos\left(\frac{1}{4}\right)$

Тогда $S=\frac{2\arccos\left(\frac{1}{4}\right)}{2\pi}\cdot\pi R^2=20\arccos\left(\frac{1}{4}\right)$

Учитывая площадь второй окружности (она будет такой же из-за симметрии) получаем, что $S_0=40\arccos\left(\frac{1}{4}\right)$.

Осталось убедиться, что внутри фигуры M нет полостей.

Пусть т. $P\in$ пр. LK и прин. окр. $a^2+b^2=5$

Макс. расстояние до прямой $b=2a-2,5$ это отрезок PK

$PK=\sqrt{5}-\frac{\sqrt{5}}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}<\sqrt{5}$ $\Rightarrow$ следовательно, внутри нет полостей.

Ответ: $40\arccos\left(\frac{1}{4}\right)$.

Черновик.

$d>0$ $a_1, a_n \in \mathbb{Z}$ $d \geq 1$

$S = \frac{a_1 + a_7}{2} \cdot 7$

$(a_1 + 6d) \cdot (a_1 + 11d) > \frac{2a_1 + 6d}{2} \cdot 7 + 20$

1) $a_1^2 + 17a_1 d + 66d^2 > 7a_1 + 21d + 20$

2) $(a_1 + 8d)(a_1 + 9d) < 7a_1 + 21d + 44$

$a_1^2 + 17a_1 d + 72d^2 < 7a_1 + 21d + 44$

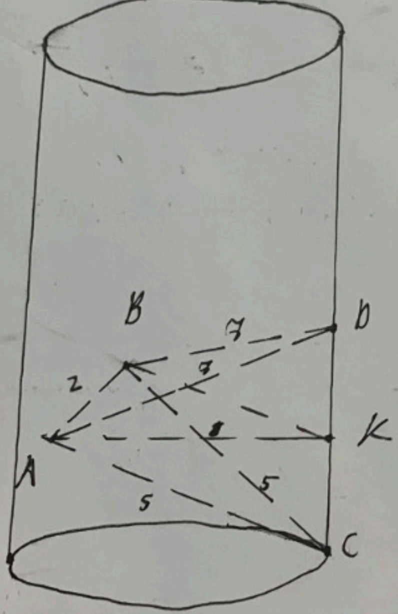
$a_1^2 + 17a_1 d + 66d^2 < 7a_1 + 21d + 44 - 6d^2$

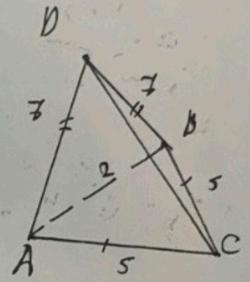
$7a_1 + 21d + 20 < a_1^2 + 17a_1 d + 66d^2 < 7a_1 + 21d + 20 + (24 - 6d^2)$

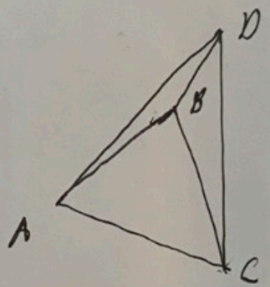
$17 \times 17 = 119 + 17\ldots = 289$ $\quad 72 \times 4 = 288$

№2.

CD-?







№3.

$a^2 + b^2 \leq 5$

$\begin{cases} a - 2b \geq 5 \end{cases}$

$\begin{cases} a \geq 5 + 2b \\ a^2 + b^2 \leq 5 \end{cases}$

$y > 2x - 2{,}5$

$a^2 + b^2 \leq 4a - 2b$

$a^2 - 4a + 4 - 4 + b^2 + 2b + 1 - 1 \leq 0$

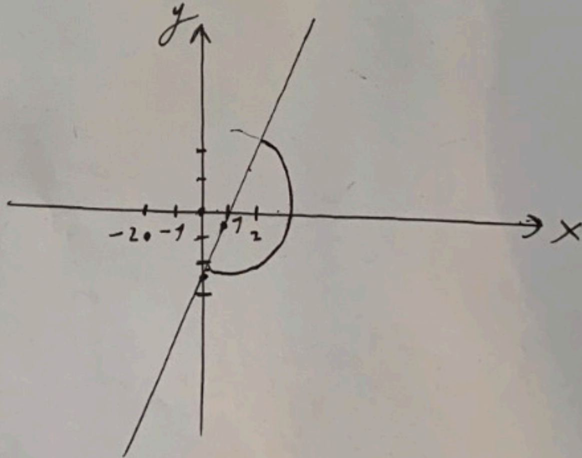
$(a-2)^2 + (b+1)^2 \leq 5$

$2b \leq 4a - 5$

$b \leq 2a - 2{,}5$

$y = 2x - 2{,}5$

$y \leq 2x - 2{,}5$



Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102748**

ID профиля: **282156**

Вариант 18

Чистовик.

№4.

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=5\cdot3 \\ НОК(a;b;c)=3^{15}\cdot5^{18}\end{cases}$$

Рассмотрим НОД. Т.к. степени 3 и 5 $=1$, то у какого-то числа одна 3, а у какого-то одна 5 в разложении на простые делители.

Теперь рассмотрим НОК. Т.к. у НОК ~~равен~~ простые делители только 3 и 5, то все числа состоят только из степеней 3 и 5. У НОК степени 3 и 5 — максимальные степени 3 и 5 среди a, b и c.

Рассмотрим случаи:

1) Пусть $a=3\cdot5=15$

Тогда $\begin{cases} b=3^n\cdot5^m \\ c=3^k\cdot5^l\end{cases}$, где $1\le n, k\le15$, $1\le m, l\le18$

у b и c в разложении обязательно есть 3^{15} и 5^{18}, чтобы удовл. НОК.

а. Если $b=3^{15}\cdot5^{18}$, то вариантов выбрать $c=15\cdot18=\underline{270}$

$18 \times 15 = 90 + 18 = 270$

б. Если $b=3^{15}\cdot5^{m}$ и $c=3^k\cdot5^{18}$, то вариантов: (т.к. уже учли случай $b=3^{15}\cdot5^{18}$) $=18\cdot15-15=17\cdot15=270-15=\underline{255}$

2) Пусть $\begin{cases} a=3^n\cdot5 \\ b=3\cdot5^m \\ c=3^k\cdot5^l\end{cases}$

Зафиксируем уже учтённые случаи: $n=1$

Тогда вариантов:

$S=$

Представим числа:

$$\begin{cases} a=3^n\cdot5^m \\ b=3^k\cdot5^l \\ c=3^\alpha\cdot5^\beta\end{cases} \quad 1\le n, k, \alpha\le15, \quad 1\le m, l, \beta\le18$$

Двое из чисел n, k, α определены: 1 и 15

Двое из m, l, β тоже определены: 1 и 18

Тогда способов выбрать степени 3:

$\frac{A_3^2\cdot15}{2}=\frac{6\cdot15}{2}=3\cdot15=45$ (делим на 2, т.к. учли дважды) 1

Чистовик

Аналогично способов выбрать степени 5:

$$\frac{A_3^2 \cdot 18}{2} = \frac{6 \cdot 18}{2} = 3 \cdot 18 = 30 + 24 = 54$$

Тогда всего вариантов:

$$S = 45 \cdot 54 = \underline{2430}$$

$$\begin{array}{r} 54 \\ \times 45 \\ \hline 270 \\ 216 \\ \hline 2430 \end{array}$$

Ответ: 2430.

Чистовик.

№5.

Всего есть 3 возможных случая. Рассмотрим их:

$$1)\begin{cases} \log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-74) = \log_{6x-74}(x-7)^2 \quad (1) \\ \log_{(x-7)}\left(\frac{x}{3}+3\right) = \log_{6x-74}(x-7)^2 - 1 \quad (2) \end{cases}$$

$$(1): \frac{2}{\log_{(6x-74)}\left(\frac{x}{3}+3\right)} = 2\log_{6x-74}(x-7)$$ – можем снять степень, т.к. уже есть ограничение $x>7$ во (1)

$$1 = \log_{6x-74}\left(\frac{x}{3}+3\right)\cdot\log_{6x-74}(x-7)$$

$$\cancel{\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-74)} + \log_{(x-7)}(x-7) = 2\log_{6x-74}(x-7) \ (2)$$

$$(2): \log_{(x-7)}\left(\frac{x}{3}+3\right)$$

$$(2)\ \frac{\log_{(x-7)}\left(\left(\frac{x}{3}+3\right)\cdot(x-7)\right)}{2} = \log_{6x-74}(x-7)$$

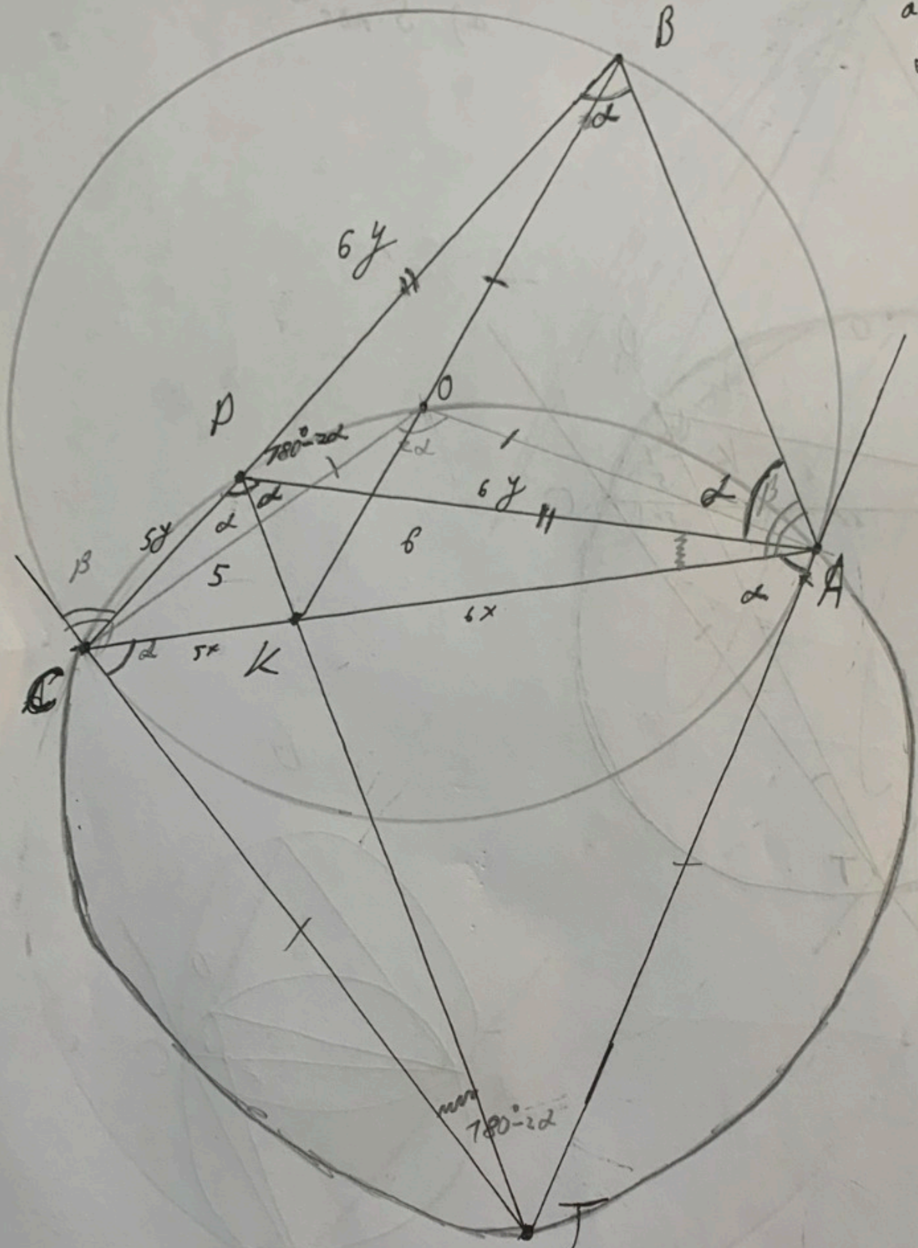
Чистовик

№6.

а) S_{ABC} – ?

б) $\angle ABC = \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$

AC – ?



Решение:

1) $\angle ACT = \angle CAT = \angle CBA$ (как угол между кас. и хордой)

$\angle CTA = 180^\circ - 2\alpha = 180^\circ - \angle COA \Rightarrow COAT$ впис.

$\angle CPT = \angle CAT = \alpha$ (одна дуга) $\Rightarrow$ PK – бисс. $\triangle CPA \Rightarrow$

$\angle APT = \angle ACT = \alpha$

$\Rightarrow \dfrac{CP}{PA} = \dfrac{CK}{AK} = \dfrac{5}{6}$ (по св. бисс.)

$\begin{cases} PC = 5y \\ AP = 6y \end{cases}$

Черновик.

$\angle BPA = 180^\circ - \alpha - \alpha = 180^\circ - 2\alpha$ | 2)

$\angle PBA = \alpha$

$\angle PAB = 180^\circ - 180^\circ + 2\alpha - \alpha = \alpha$

2) $\triangle PBA$ - р/б (по пр.) => $PB = PA = 6y$

2) По св. чевиан и 2 площадей:

$\frac{S_{APB}}{S_{APC}} = \frac{PB}{PC} = \frac{6}{5}$ $\quad S_{APC} = 11$

$\frac{S_{APB}}{11} = \frac{6}{5}$ $\quad 5 S_{APB} = 66$ $\quad S_{APB} = \frac{66}{5} = \frac{132}{10} = 13,2$

$S_{ABC} = S_{APB} + S_{APC} = 13,2 + 11 = 24,2$

2) $\angle ABC = \alpha = arctg\frac{1}{2}$

~~Пусть PK = l~~

~~По т. косинусов:~~

$\cancel{\frac{25y^2 + l^2 - 25x^2}{10yl} = \frac{36y^2 + l^2 - 36x^2}{12yl}}$

$\cancel{180y^2 + 6l^2 - 180x^2 = 180y^2 + 5l^2 - 180y^2}$

$\cancel{l^2 = 30y^2 - 30x^2}$

$\cancel{\frac{25y^2 + 30y^2 - 30x^2 - 25x^2}{10y \cdot l}}$

$2\sin x = \cos x$ $\quad \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{2}$ $\quad tg\alpha = \frac{1}{2}$

$\sin^2 x + 4\sin^2 x = 1$

$\sin^2 x = \frac{1}{5}$

$\sin x = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$\sin arctg(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$\cos arctg(\frac{1}{2}) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\frac{AC}{\sin(arctg\frac{1}{2})} = 2R$

$S = 11 = \frac{5y \cdot 6y \cdot AC}{4R} = \frac{5y \cdot 6y \cdot \cancel{AC}}{\frac{2\cancel{AC}}{\sin(arctg\frac{1}{2})}} = \frac{30y^2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{5}}{2} =$

$= 3y^2\sqrt{5}$

$y^2 = \frac{11}{3\sqrt{5}}$ $\quad y = \sqrt{\frac{11}{3\sqrt{5}}}$

$\cancel{S = p \cdot \sqrt{(p-5y)(p-6y)(p-AC)} = 11}$

По т. косинусов: $\cos 2\alpha = \frac{25y^2 + 36y^2 - AC^3}{30y^2}$

$AC = \ldots$

Ответ: 24,2; ...

Черновик.

№1.

$НОД(a;b;c)=3\cdot5$

$НОК(a;b;c)=3^{15}\cdot5^{18}$

$a=3^{n}\cdot5^{m}$

$n\geq1 \quad m\geq1$

$n\leq15 \quad m\leq18$

$a=3\cdot5^{n} \quad 1\leq n\leq18$

$b=3^{m}\cdot5 \quad 1\leq m\leq15$

$c=3^{k}\cdot5^{l} \quad 1\leq k\leq15$

$1\leq l\leq18$

$a=15$

$b=3^{m}\cdot5^{n}$

$c=3^{k}\cdot5^{l}$

$5: 1, 18$

$3: 1, 15$

$15 \quad 18$

$3\cdot3\cdot15\cdot18=$

$=$

$$\begin{cases} a=3^{n}\cdot5^{m} \\ b=3^{k}\cdot5^{l} \\ c=3^{\alpha}\cdot5^{\beta} \end{cases}$$

$C_3^2=\frac{6}{2}=3$

1	все	15
все	1	15
1	15	все
15	1	

a	–	b
1	–	15
1	15	–
15	1	–
15	–	1
–	1	15
–	15	1

1