Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102732**

ID профиля: **368171**

Вариант 18

Чистовик

① $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_7 = 7(a_1 + 3d)$

1) $a_7 a_{12} > S + 20$

$a_7 = a_1 + 6d$, $a_{12} = a_1 + 11d$.

$a_9 a_{10} < S + 44$. $\Leftrightarrow 2)$ $-a_9 a_{10} > -S - 44$.

$a_9 = a_1 + 8d$, $a_{10} = a_1 + 9d$.

$a_7 a_{12} = (a_1 + 6d)(a_1 + 11d) = a_1^2 + 17 da_1 + 66d^2$.

$a_9 a_{10} = (a_1 + 8d)(a_1 + 9d) = a_1^2 + 17 da_1 + 72d^2$.

~~Вычитаем~~ складываем 1) и 2):

$a_7 a_{12} - a_9 a_{10} > -24$.

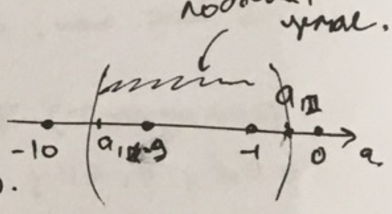
$-6d^2 > -24$. $\Big| \cdot \frac{-1}{6}$

$d^2 < 4$. & $d > 0 \Rightarrow d = 1$.

Тогда $a_1^2 + 17a_1 + 72 < 7a_1 + 21 + 44 = 7a_1 + 65$

$a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0$.

$D_{a_1} = 100 - 28 = 72$ $\begin{cases} -1 < a_{1II} = \dfrac{-10 + 6\sqrt{2}}{2} = -5 + 3\sqrt{2} < 0. \\ -10 < a_{1I} = -5 - 3\sqrt{2}. < -9 \end{cases}$



А также. $a_1^2 + 17a_1 + 66 > 7a_1 + 41$.

$a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0$

$D_{a_1} = 100 - 100 = 0$. $\Rightarrow$ $(a_1 + 5)^2 > 0$.

т.е. $a_1 \neq -5$.

То есть, $a_1 \in \{-9, -8, -7, -6, -4, -3, -2, -1\}$.

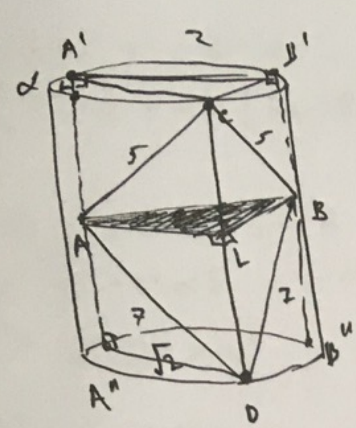
Ответ: 9

21102732 (U368171 M1299829)

Чистовик.

②

1сл.



Заметим, что из условия △ADC - равноб., △ABD - равноб. ⇒ т.к. (CD) || оси цилиндра, то (AB) || основанию цилиндра

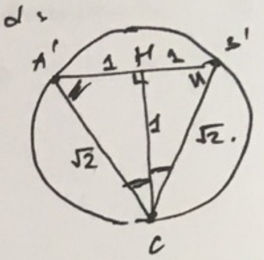
Пусть α - плоск. основания и $C \in \alpha$.

$A' = \text{Пр}_\alpha A$, $B' = \text{Пр}_\alpha B$.

$A'B' = AB = 2$.

$\triangle A'B'C$ - равноб.

Пусть $\angle A'CB' = 2\alpha$.



по теореме синусов для $\triangle A'B'C$ и его описан. окружн.:

$\frac{2}{\sin(2\alpha)} = 2R \Leftrightarrow \frac{1}{\sin(2\alpha)} = R$. R минимально, когда $\sin(2\alpha)$ максим.

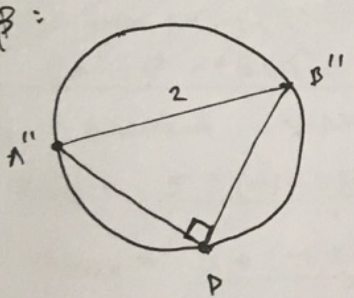
то есть $\sin(2\alpha) = 1$ $2\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$. $H = \text{Пр}_{(A'B')} C$.

$\Rightarrow \angle CA'B' = \frac{\pi}{4}$, $\angle CB'A' = \frac{\pi}{4}$. ⇒ когда радиус цилиндра наименьший, то $\angle A'CB' = \frac{\pi}{2}$. и $A'C = CB' = \sqrt{2}$.

$\triangle AA'C$: $AA' = \sqrt{25 - 2} = \sqrt{23}$ (т. Пифагора).

Аналогично. Пусть β - плоскость основания и $D \in \beta$.

β:



$A'' = \text{Пр}_\beta A$, $B'' = \text{Пр}_\beta B$. $A''B'' = 2$.

Далее аналогично, как для α.

$A''D = \sqrt{2}$.

$\triangle AA''D$: $AA'' = \sqrt{49 - 2} = \sqrt{47}$ (т. Пифагора).

Пусть γ - плоскость: $\gamma \parallel \alpha, \beta$, $AB \in \gamma$.

тогда $\gamma \perp (CD)$. Пусть $\{L\} = \gamma \cap (CD)$.

тогда $CL = AA' = \sqrt{23}$, $DL = AA'' = \sqrt{47}$.

Возможны 2 случая:

1сл. C и D лежат по разные стороны от γ ⇒

$CD = CL + DL = \sqrt{23} + \sqrt{47}$.

2сл. C и D лежат по одну сторону от γ ⇒ $CD = \sqrt{47} - \sqrt{23}$.

Ответ: $|CD| \in \{\sqrt{47} + \sqrt{23}, \sqrt{47} - \sqrt{23}\}$.

Чистовик.

(3) $\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\leq 5.\\ a^2+b^2\leq \min\{4a-2b,\ 5\}.\end{cases}$

Первое уравнение — это уравнение круга на плоскости oXY с центром (a,b) и радиусом $\sqrt{5}$.

1 сл. $5\leq 4a-2b$. Тогда

$a^2+b^2\leq 5$. оценим, какие значения может принимать b.

$\frac{5+2b}{4}\leq a$. $\left(\frac{5+2b}{4}\right)^2+b^2\leq 5.\ \Big|\cdot 16.$ $25+20b+20b^2\leq 80$

$4b^2+4b-11\leq 0.$

$D_b=16+16\cdot 11=16\cdot 12=64\cdot 3=8^2\cdot 3.$ $\qquad b_{1,2}=\frac{-4\pm 8\sqrt{3}}{8}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{3}.$

$b_1\ \leq 0\ b_2$

Метод интервалов. т.е. $b\in\left[-\frac{1}{2}-\sqrt{3};\ -\frac{1}{2}+\sqrt{3}\right].$

Второе уравнение — это ограничение на местоположение центра круга из 1ого уравнения.

~~2 сл. $4a-2b\leq 5$. тогда $a^2+b^2\leq 4a-2b$~~

~~$(a^2-4a+4)+(b^2+2b+1)\leq 5.$~~

~~$(a-2)^2+(b+1)^2\leq 5.$~~

~~все~~ оценим значение на a.

$a_{min}=\frac{5+(-1-2\sqrt{3})}{4}=1-\frac{\sqrt{3}}{2}.$

$a_{max}=\frac{5+(-1+2\sqrt{3})}{4}=1+\frac{\sqrt{3}}{2}.$

Все переходы равносильные, значит все ~~a~~ e подходят.

2 сл. $4a-2b\leq 5$. тогда

$a^2+b^2\leq 4a-2b$. точно так же оцениваем a и b.

$(a-2)^2+(b+1)^2\leq 5.$ $\quad \frac{4a-5}{2}\leq b.$ то есть,

$(a-2)^2+\left(\frac{4a-3}{2}\right)^2\leq 5\ \Big|\cdot 4.$ $\quad 4a^2-16a+16+16a^2-24a+9\leq 20.$

$20a^2-40a+5\leq 0.$ т.е. $4a^2-10a+1\leq 0.$

$D_a=100-16=84.$ $\quad a_{1,2}=\frac{10\pm\sqrt{84}}{16}=\frac{10\pm 2\sqrt{21}}{16}=\frac{5\pm\sqrt{21}}{8}.$

все a между a_1 и a_2 подходят.

оценим b. $\quad b\geq\frac{4a-5}{2}.$

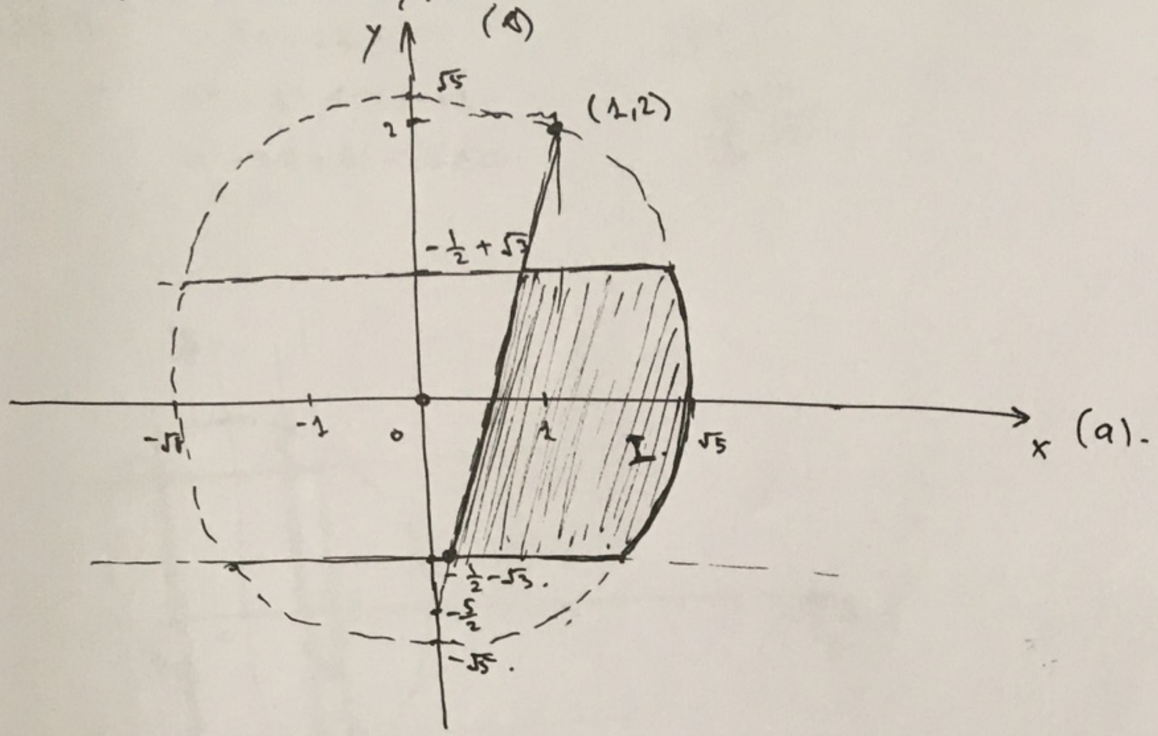
$b_{min}=\frac{\frac{1}{2}(5-\sqrt{21})-5}{2}=\frac{-\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{21}}{2}}{2}=\frac{-(5+\sqrt{21})}{4}.$

$b_{max}=\frac{-(5-\sqrt{21})}{4}.$

Нанесем картинку. (пересекает с ~~от~~ кругом $(0,0)$, радиуса $\sqrt{5}$). в I.

Чистовик

(5) (продолжение).



в 1 сл.: $b \le 2a - \frac{5}{2}$.

во 2 сл.: $b \ge 2a - \frac{5}{2}$.

I и II – области, где может находиться центр. круга из 1ого уравнения

Черновик.

$S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 =$ ($a_1 + d$, $+2d$, $+3d$, $+4d$, $+5d$, $+6d$)

$7a_1 + 21d = 7(a_1+3)$

$$\begin{cases} a_7 a_{12} > S + 20. \\ a_9 a_{10} < S + 44. \end{cases}$$

a_1?

$a_7 = a_1 + 6d$

$a_{12} = a_1 + 11d.$

$(a_1+6d)(a_1+11d) > 7(a_1+3)$

$a_9 = a_1 + 8d$

$a_{10} = a_1 + 9d.$

$(a_1+8d)(a_1+9d) < 7(a_1+3) + 44.$

$a_1^2 + 17d + 72d^2 < 7a_1 + 65$

$a_1^2 - 7a_1 + (17d + d^2 + 65) < 0.$

$D_{a_1} = 49 - 4*.$

$a_1^2 + 17d + 66d^2 > 7a_1 + 3.$

$a_7a_{12} - a_9a_{10} > -24.$

$\cancel{a_1^2 + 17d + 72d^2 - (}$

$-6d^2 > -24.$

$44 + 21 = 65$ $\quad$ $24 \times 4 = 96$ $\quad$ $66 - 41 = 25$

$\sqrt{72} =$ $\quad$ $72 : 4 = 18$ $\quad$ $72 - 41 = 31$

$81 - 17 \cdot 9 + 66 = -6$

153

$\cos\gamma = \frac{\sqrt{2}}{5}.$

$AA' = \sqrt{25-2} = \sqrt{23}.$

$a^2 + (-\frac{1}{2} + \sqrt{3})^2 \le 5.$

$a^2 + \frac{1}{4} - \sqrt{3} + 3 \le 2$

$0 < a^2 \le \frac{7}{2} - \sqrt{3}.$

$\sqrt{2} \approx 1,4.$ $\quad$ 14×3

$-5 - 3\sqrt{2} < -9$

$-4 > -3\sqrt{2}$

$4 < 3\sqrt{2}$

$16 < 18$

$-9 \vee -5 - 3\sqrt{2}.$

$-4 \vee -3\sqrt{2}.$

-5

$-5 + 3\sqrt{2} > -1$

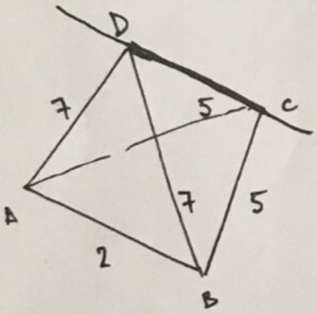
$-4 + 3\sqrt{2} > 0$

$3\sqrt{2} > 4$

$17 \times 9 = 153$

$81 + 66 = 147$

$7(-9+3)$

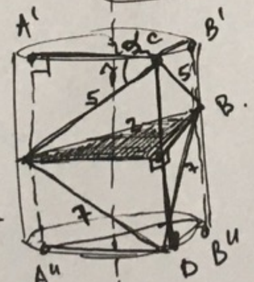


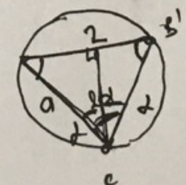
У тетр. 4 вершины

Радиус цилиндра — минимальный.

$|CD| - ?$

Когда минимальный?





$A'C = a = 5\cos\gamma.$

Теор. синусов: $\frac{2}{\sin(2\alpha)} = 2R$

$\sin(2\alpha)$ больший $\sin(2\alpha_0) = 1.$ $\quad 2\alpha_0 = \frac{\pi}{2}.$ $\alpha_0 = 45^\circ.$

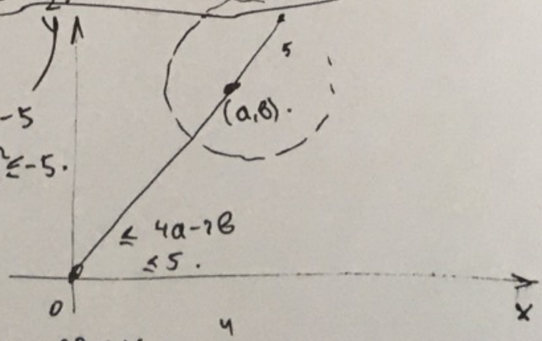
$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \le 5. \\ a^2 + b^2 \le \min(4a - 2b, 5), \end{cases}$$

$a^2 + b^2 \le 4a - 2b$

$(a^2 - 4a + 4) +$

$(b^2 + 2b + 1) \le -5$

$(a-2)^2 + (b+1)^2 \le -5.$



1 case: $5 \le 4a - 2b.$ $\quad \frac{5+2b}{4} \le a$

и $a^2 + b^2 \le 5.$

$\left(\frac{5+2b}{4}\right)^2 + 16b^2 = 25 + 20b + 20b^2 \le 5.$

$b^2 + b + 1 \le 0$ $\quad$ нигде.

$5 + 4b + 4b^2 \le 16.$

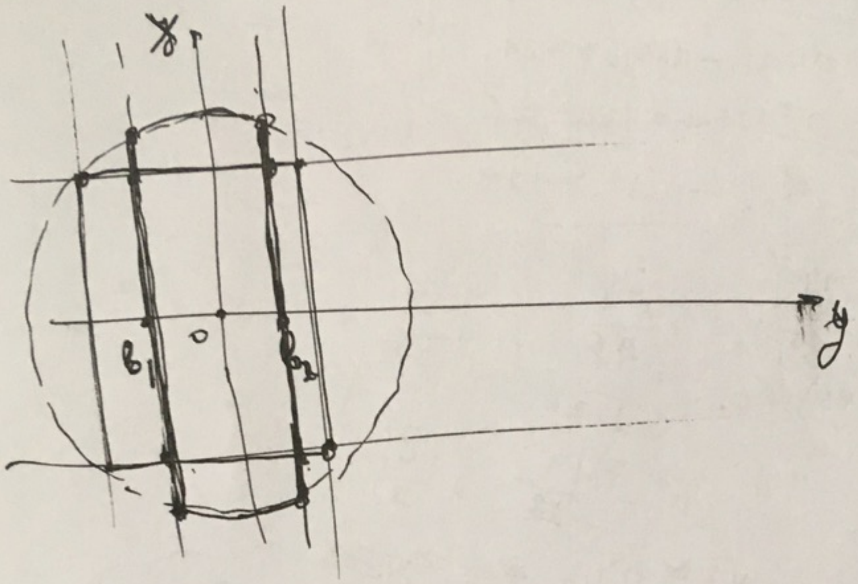
Черновик

2 case. $4a-2b\le 5$ $\sqrt{84}$

$a^2+b^2\le 4a-2b$.

$a^2-4b+b^2-2b\le 0$.

$\begin{array}{r|l} 84 & 4 \\ -8 & 21 \end{array}$



$\frac{4a-5}{2}\le b$.

$(a-2)^2+\left(\frac{4a-3}{2}\right)^2\le 5 \cdot |4$ 16+9−20

$4(a^2-4a+4)+16a^2-24a+9\le 20$

$20a^2-40a+5\le 0$.

$4a^2-10a+1\le 0$.

$D_a=100-16=84$.

$a_{1,2}=\frac{10\pm\sqrt{84}}{4}$.

$a\ge \frac{5+2b}{4}$.

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102732**

ID профиля: **368171**

Вариант 18

Чистовик.

(4) $\begin{cases} A = 15 \\ B = 3^{15} \cdot 5^{18} \end{cases}$

Пусть $a = 3^{\alpha_1} 5^{\alpha_2}$.
$b = 3^{\beta_1} \cdot 5^{\beta_2}$
$c = 3^{\gamma_1} \cdot 5^{\gamma_2}$

из $A \Rightarrow$ все числа $\vdots 3$ и $\vdots 5$, и одно
1) из чисел строго делится на 3,
2) и еще одно — на 5.

3) из $B \Rightarrow$ в одном из чисел степень вхождения 3 — 15
(это максим. степ вхожд из a, b, c), 4) а 5 – 18.

3:) Ситуации для 3 и 5 в числах не зависимы $\Rightarrow$
кол-во способов выбрать 1) = 3.
кол-во способов выбрать 3) = 2.
кол-во способов распределить степень 3ки в последнем числе = 15.
аналогично для 5ки: 3, 2, 18.
По правилу умножения: $K = 3^2 \cdot 2^2 \cdot 15 \cdot 18$.

Ответ: $3^2 \cdot 2^2 \cdot 15 \cdot 18$.

21102732 (U368171 M1299830)

Чистовик.

(5) $\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)$, $\log_{(6x-14)}(x-1)^2$, $\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)$

$\quad\quad\quad\quad \shortparallel \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \shortparallel \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \shortparallel$

$\quad\quad\quad\quad a \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad b \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad c$

ОДЗ: $\begin{cases} \frac{x}{3}+3 \geq 0 & x > -9 \\ \frac{x}{3}+3 \neq 1 & x \neq -6. \\ 6x-14>0 & x > \frac{14}{6} = \frac{7}{3} > 2 \\ 6x-14 \neq 1 & x \neq \frac{5}{2}. \end{cases}$ итого $x > \frac{7}{3}$, $x \neq \frac{5}{2}$.

на одз верно: $abc = 2 \cdot 2 = 4$.

~~Круто~~ Пусть одно из равных чисел равно $y \Rightarrow$

$y^2(y-1)=4 \qquad y^3-y^2-4=0. \qquad y_0=2$

$y^3-y^2-4=(y-2)(\underbrace{y^2+y+2}_{\neq 0})$ ← не им. корней.

осталось рассмотреть 3 варианта ($C_3^2 = 3$):

1 вар. $a=2$, $b=2$, $c=1$.

$\frac{x}{3}+3 = 6x-14. \,|\cdot 3. \qquad x+9=18x-42. \qquad 51=17x. \quad x=3.$

$(6x-14)^2=(x-1)^2.$ подходит $x=3$? $4^2 \neq 2^2$ нет.

2 вар. $a=2$, $c=2$, $b=1$.

$x=3.$

$(x-1)^2 = \frac{x}{3}+3$ ~~|~~ $x=3$: $4=4$ подходит.

$6x-14=(x-1)^2 \qquad x=3: \quad 4=4$ подходит.

3 вар. $a=1$, $b=2$, $c=2$.

~~$(6x-14)^2=(x-1)^2$: $36x^2-168x+196=x^2-2x+1$~~

~~$35x^2-166x+195=0.$~~

$(x-1)^2=\frac{x}{3}+3 \,|\cdot 3. \qquad 3(x^2-2x+1)=x+9$

$3x^2-6x+3=x+9. \qquad 3x^2-7x-6=0.$

$D_x = 49+\underbrace{12\cdot 6}_{72}=121. \qquad x_{1,2}=\frac{7\pm 11}{6}. \quad x_1=3, \quad x_2=-\frac{2}{3}.$

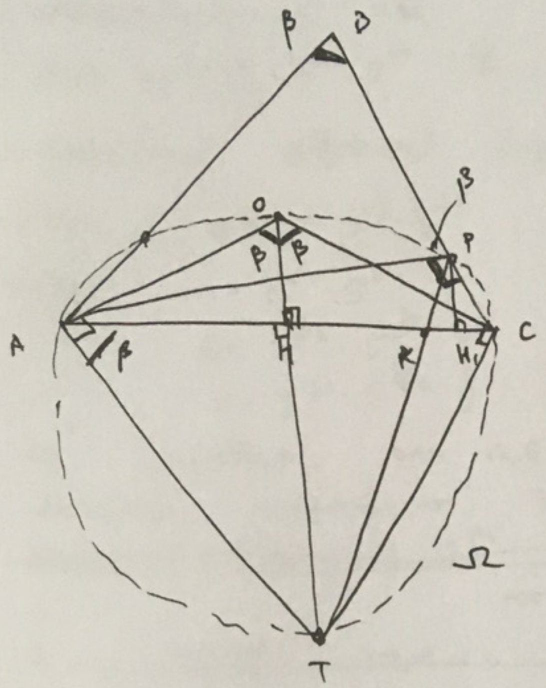
↑ уже был. ↑ не подходит под ОДЗ.

Ответ: $x=3$.

21102732 (U368171 M1299830)

Чистовик

6



AOCT - вписанный, т.к $\angle OAT = \angle OCT = \frac{\pi}{2}$.

$\Rightarrow T \in \Omega$ - опис. окр. около $\triangle AOC$.

$\frac{S(APK)}{S(KPC)} = \frac{6}{5} = \frac{AK}{KC}$. ~~пусть AK = 6x~~ ⇒

~~AK = 6x, KC = 5x~~.

(PK) - бисс. $\angle APC$ в $\triangle APC$.

т.к углы опир. на равных хордах в Ω.

$S(ABC) = \frac{1}{2} \sin\beta \, AB \cdot BC$.

$S(APK) = \frac{1}{2} AP \cdot PK \cdot \sin\beta$.

$\angle CAT = \beta$.

~~Чистовик~~ Черновик.

(4) $\begin{cases} \text{НОД}(a,b,c) = 15 = A \\ \text{НОК}(a,b;c) = 3^{15}\cdot 5^{18} = B \end{cases}$

заметим, что ~~$AB = a$~~ $AB = abc$

тогда $abc = 3^{16}\cdot 5^{19}$. 5 и 3 — простые числа.

пусть $\left.\begin{array}{l} a = 3^{\alpha_1}\cdot 5^{\alpha_2} \\ b = 3^{\beta_1}\cdot 5^{\beta_2} \\ c = 3^{\gamma_1}\cdot 5^{\gamma_2} \end{array}\right\}$ тогда $\alpha_1+\beta_1+\gamma_1 = 16$, $\alpha_2+\beta_2+\gamma_2 = 19$.

из условия, ~~на~~ a, b и c $\vdots 3$, но одно из них делится только на 3.

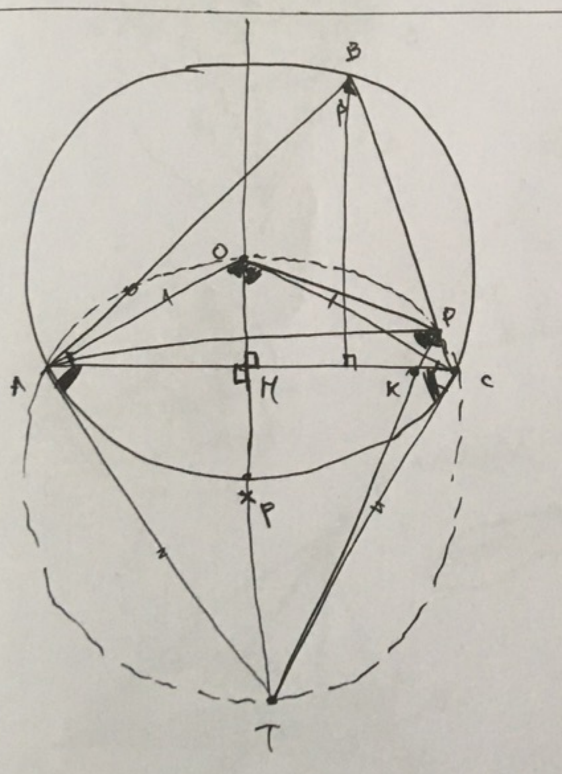
~~Б.о.о. пусть $a \vdots 3^{14}$, $b \vdots 3$, $c \vdots$, т. $\alpha_1 = 14, \beta_1 = 1, \gamma_1 = 1$.~~
максимум.

а ~~также~~ a, b и c $\vdots 5$, но ~~два из них делятся только на 5~~.

Б.о.о. пусть c делится только на 3.

из условия на B

1 2 3 ... 15



$\beta = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$ $\qquad \frac{HC}{OH} = \frac{1}{2}$.

(5) известна.
AC — ?

$\frac{HT}{HC} = \frac{1}{2}$

$\frac{HT}{OH} = \frac{1}{4}$.

$S(ABC) = \frac{1}{2}\sin\beta\ AB\cdot BC$.

$\frac{AC}{\sin\beta} = 2R$.

$\frac{AB}{\cancel{\sin\gamma}} = 2R\cdot\sin\gamma$.

$\frac{AC}{\cancel{\sin\alpha}} = 2R\cdot\sin\alpha$.

$S = 2\sin\beta\sin\gamma\sin\alpha\, R^2$.

$S = \frac{1}{2}\sin\beta\ \ldots = \cos\beta\sin\beta R^2$.

$OH\cdot HT = AO\cdot AT$.

$S(OAC) = \frac{1}{2}\sin 2\beta\cdot R^2 = \cos\beta\sin\beta R^2$.

$\frac{AT}{R} = \frac{1}{2}$.

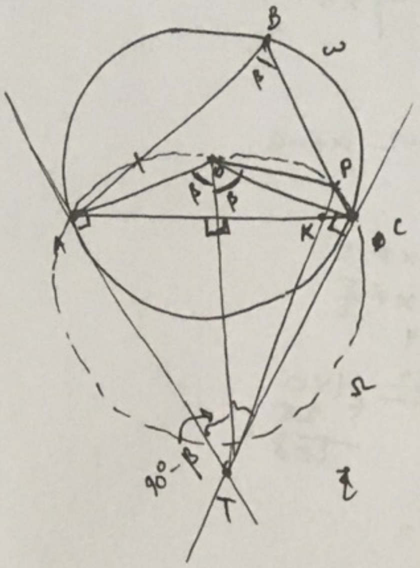
$\frac{AC}{\sin 2\beta} = 2R_0 = OT = \frac{AT}{\sin\beta}$

$\frac{AT}{OT} = \sin\beta$.

$\frac{AC}{2\cos\beta} = AT = \frac{R}{2}$.

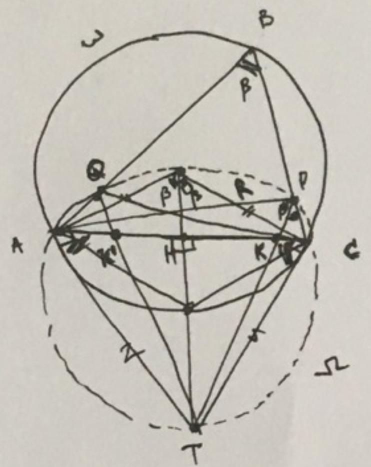
$AC = R\cos\beta$.

Черновик. $\frac{S(APK)}{S(CPK)} = \frac{6}{5} = \frac{AK}{KC}$.



$T \in \Omega$.

$S(ABC)$ - ? ~~теор. о биссектрисе~~ ~~$AK \cdot KC = TK \cdot KP$~~



$S(APK) = 6$.

$S(CPK) = 5$.

$S(APK) = \frac{1}{2} AP \cdot PK \cdot \sin(\angle APK)$

$S(CPK) = \frac{1}{2} CP \cdot PK \cdot \sin(\angle APT)$

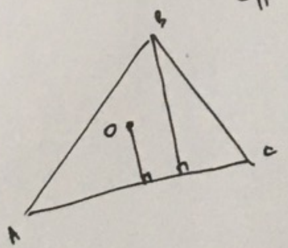
$\frac{6}{5} = \frac{AP}{CP} = \frac{AK}{KC}$.

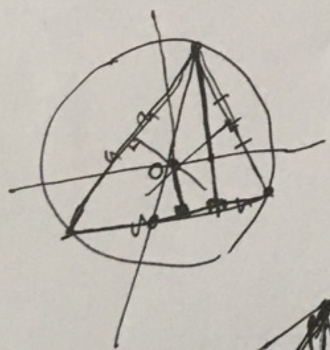
~~$\angle CAT = \angle TPA$~~

~~$OA = HP^2 + OH = R$~~

$\frac{R}{OT} = \cos\beta$.

$R_0 = \frac{R}{2\cos\beta}$.





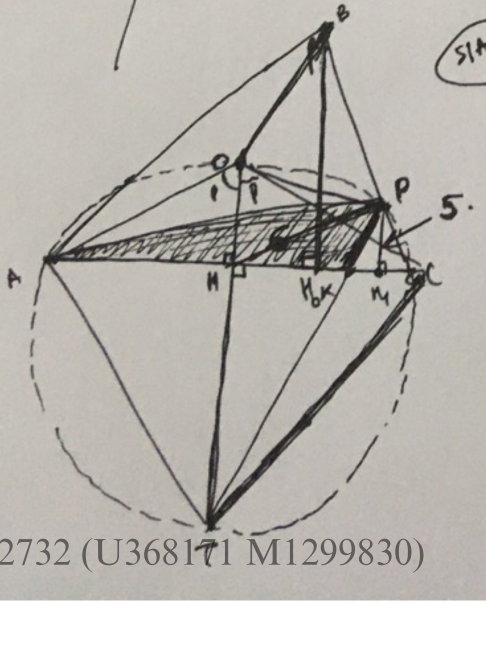
$S(OHC) = \frac{1}{2} OH \cdot OC \cdot \sin\beta$

$S(ABC) = \frac{1}{2} \sin\beta \cdot AB \cdot BC$.

$\beta = \operatorname{arctg}(2)$.

$S(ABC)$ - ?

$$\begin{cases} a = 3^{\alpha_1} 5^{\alpha_2}, \\ b = 3^{\beta_1} 5^{\beta_2}, \\ c = 3^{\gamma_1} 5^{\gamma_2}. \end{cases}$$



$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 16$.

$\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 = 19$.

$S = \frac{1}{2} \sin\beta \, AB \cdot AC$.

$S = \frac{1}{2} h \cdot AC$.

Знаем $\frac{OH}{OA}$!

$\frac{PC}{PB}$ - ?

Черновик.

$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)$, $\log_{6x-14}(x-1)^2$, $\log_{x-1}(\frac{x}{3}+3)$.

$\shortparallel a$ $\shortparallel b$ $\shortparallel c$

$abc=4$.

1) усл. $x^2(x+1)=4$. $\frac{x}{3}\neq-2$ $x\neq-6$

$x^3-x^2-4=0$.

$$\begin{array}{r|l} x^3-x^2-4 & x-2 \\ \hline -\;x^3-2x^2 & x^2+x+2 \\ x^2-4 & \\ -\;x^2-2x & \\ \hline 2x-4 & \end{array}$$

$6x\neq15$

$x\neq\frac{5}{2}$

$14 \times 12 = 28 + 140 = 168$.

$(x-1)^2=\frac{x}{3}+3$.

x^2

~~НОД~~ НОД$(a;b)\cdot$НОК$(a;b)=ab$.

$(3,5,7)=21$.

$(5+35)+21=71$. -просто e. нет.

50

$$\begin{cases} a=3^{\alpha_1}\cdot5^{\alpha_2} \\ b=3^{\beta_1}\cdot5^{\beta_2} \\ c=3^{\gamma_1}\cdot5^{\gamma_2} \end{cases}$$

~~$a=3^{15}\cdot5^{\alpha_2}$~~

~~$b=3^{\beta}\cdot5^{18}$~~

~~$c=3\cdot5$~~

21102732 (U368171 M1299830)