Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102679**

ID профиля: **845973**

Вариант 18

3) Все x, y для которых $\exists\, a, b$, что

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 5 \\ a^2+b^2 \le \min(4a-2b, 5) \end{cases}$$

1). $4a-2b < 5 \iff b > 2a-2{,}5$

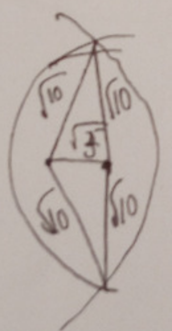
$a^2+b^2 \le 4a-2b$

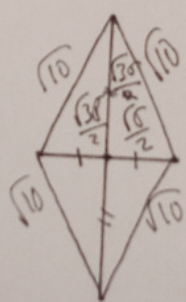
$a^2-4a+b^2+2b \le 0$

$(a-2)^2+(b+1)^2 \le 5$

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 5 \\ a^2+b^2 \le 5 \\ (a-2)^2+(b+1)^2 \le 5 \end{cases} \iff \begin{cases} (a-x)^2+(b-y)^2 \le 5 \\ a^2+b^2 \le 5 \\ (a-2)^2+(b+1)^2 \le 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2 \le 10 \\ (x-2)^2+(y+1)^2 \le 10 \end{cases}$$





$\cos\alpha = \frac{1}{2\sqrt2}$

$\cos\alpha = \frac{\cos\frac{\pi}{4}}{2}$

$2\cos\alpha - \text{si}$

$10 - \frac{5}{4} = \frac{35}{4}$

~~$\sin\alpha$~~

~~$\cos\alpha$~~

Черновик

$\cos\alpha = \frac{1}{2\sqrt2} \Rightarrow$ ~~$\sin 2\alpha$~~

$\sin\alpha = \frac{\sqrt7}{2\sqrt2}$

$\cos 2\alpha = \frac18 - \frac78 = \frac{-3}{4}$

$\Rightarrow$

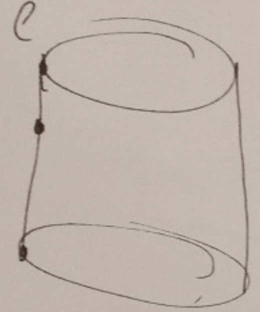
Ответ: $2\cdot\frac{\pi\cdot10\cdot\arccos\left(\frac{-3}{4}\right)}{\pi} =$

$= 20\cdot\arccos\left(\frac{-3}{4}\right) - \frac{\sqrt{35}}{2}\cdot\sqrt5 =$

$= 20\cdot\arccos\left(\frac{-3}{4}\right) - \frac{5}{2}\cdot\sqrt7.$

3) $\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 5\\ a^2+b^2\le \min(4a-2b,5)\end{cases} \iff$

$\iff \begin{cases}(a-x)^2+(b-y)^2\le 5\\ a^2+b^2\le 5\\ a^2-4a+b^2+2b\le 0\end{cases} \iff \begin{cases}(a-x)^2+(b-y)^2\le 5\\ a^2+b^2\le 5\\ (a-2)^2+(b+1)^2\le 5\end{cases}$



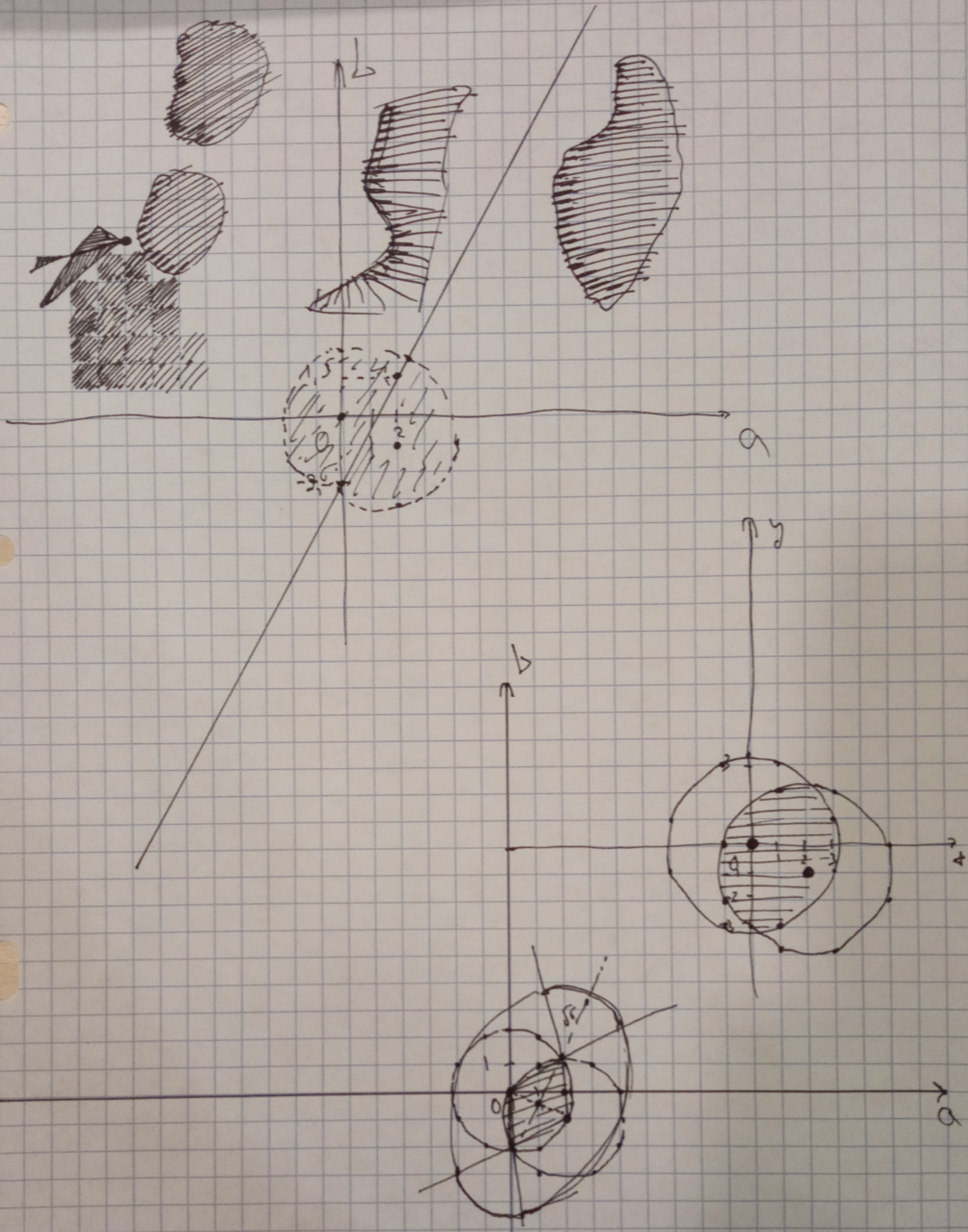
21102679 (U845973 M1299211)

Задача 3.

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 5 \\ a^2+b^2 \le \min(4a-2b,5) \end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (a-x)^2+(b-y)^2 \le 5 \\ 4a-2b \le 5 \\ (a-2)^2+(b+1)^2 \le 5 \end{cases} \\ \begin{cases} (a-x)^2+(b-y)^2 \le 5 \\ 4a-2b > 5 \\ a^2+b^2 \le 5 \end{cases} \end{array}\right.$$

Отметим следующее

Черновик



Черновик

Чистовик

Задача 1.

Пусть $a_2 - a_1 = d$. $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$, $a_2 > a_1$, $\Rightarrow d \in \mathbb{N}$.

Тогда $\cdot\ S = \frac{(a_1 + a_7)\cdot 7}{2} = \frac{(2a_1 + 6d)\cdot 7}{2} = 7a_1 + 21d.$

$\cdot\ a_7 \cdot a_{12} = (a_1 + 6d)(a_1 + 11d) = a_1^2 + 17d\cdot a_1 + 66d^2$

$\cdot\ a_9 \cdot a_{10} = (a_1 + 8d)(a_1 + 9d) = a_1^2 + 17d\cdot a_1 + 72d^2.$

Итак, $\begin{cases} a_1^2 + 17d\cdot a_1 + 66d^2 > S + 20 \\ a_1^2 + 17d\cdot a_1 + 72d^2 < S + 44 \end{cases} \Rightarrow 6d^2 < 24 \Leftrightarrow d^2 < 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |d| < 2 \Leftrightarrow d < 2, \Rightarrow d = 1.$

Тогда условие равносильно

$\begin{cases} a_1^2 + 17a_1 + 66 > 7a_1 + 41 \\ a_1^2 + 17a_1 + 72 < 7a_1 + 65 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0 \\ a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (a_1 + 5)^2 > 0 \\ (a_1 - (-5 - 3\sqrt{2}))(a_1 - (-5 + 3\sqrt{2}) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a_1 \in (-5 - 3\sqrt{2}; -5) \cup (-5; -5 + 3\sqrt{2})$

Отметим, что $4 < 3\sqrt{2} < 5$, $\Rightarrow (-5 + 3\sqrt{2}) \in (-1; 0)$,

$(-5 - 3\sqrt{2}) \in (-10; -9)$, т.е. a_1 может принимать любое значение из след.: $-1, -2, -3, -4, -6, -7, -8, -9$.

Ответ: $-1; -2; -3; -4; -6; -7; -8; -9$.

1

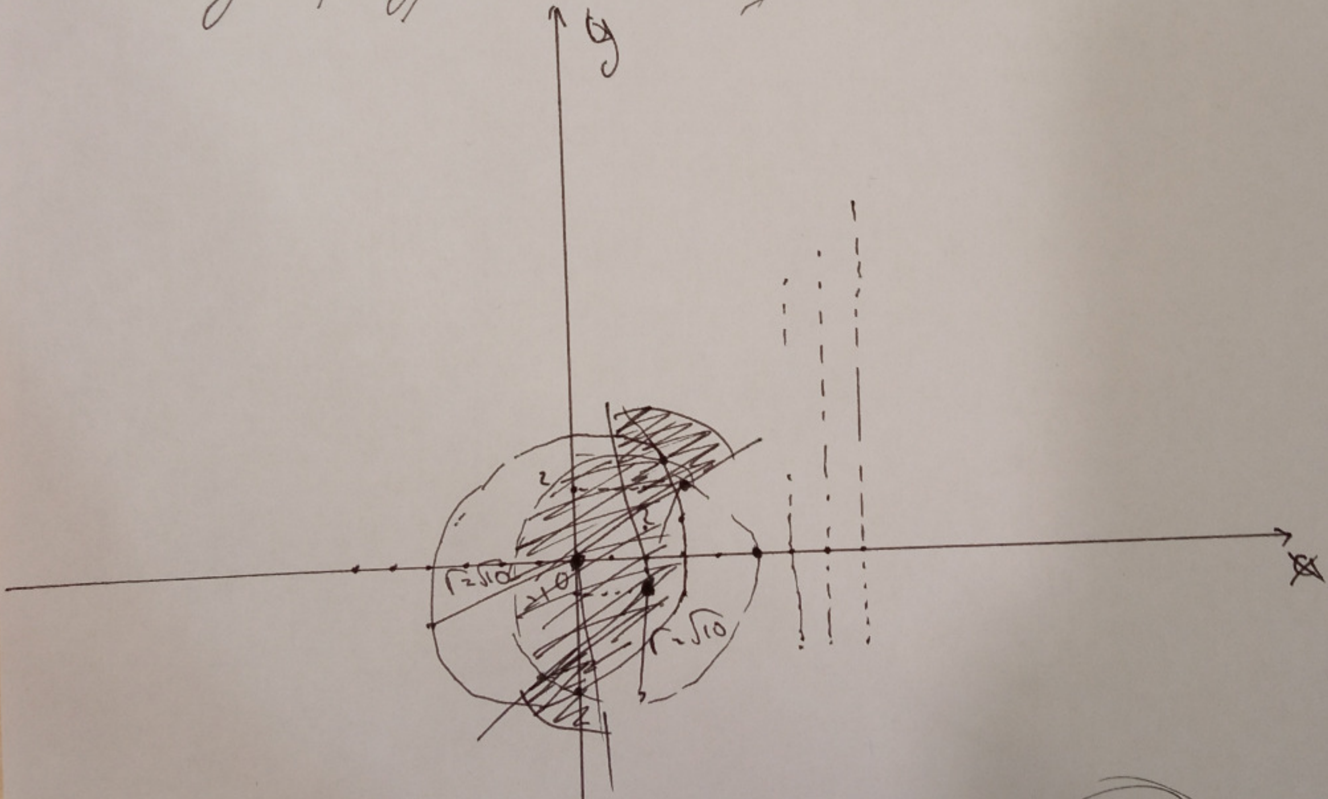
Чистовик.

Задача 3.

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 5\\ a^2+b^2\le \min(4a-2b,5)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(a-x)^2+(b-y)^2\le 5\\ a^2+b^2\le 5\\ (a-2)^2+(b+1)^2\le 5.\end{cases}$$

Таким образом, $(x,y)\in M$, если круги радиуса $\sqrt5$ с центрами $(x;y)$, $(0;0)$ и $(2;-1)$ в системе коорд. с осями a и b имеют хотя бы одну общую точку.

Тогда фигура M выглядит так:



2

21102679 (U845973 M1299211)

1) $S = \frac{(a_1+a_7)\cdot 7}{2} = \frac{(2a_1+6d)\,7}{2} = 7a_1+21d.$

$a_7\cdot a_{12} = (a_1+6d)(a_1+11d) =$

$= a_1^2+17a_1d+66d^2 > S+20$

$a_9\cdot a_{10} = (a_1+8d)(a_1+9d) = a_1^2+17da_1+72d^2 < S+44.$

$\Rightarrow 6d^2 < 24 \Rightarrow d^2<4. \quad d\in\mathbb{N} \Rightarrow d=1.$

Итак, $\begin{cases} a_1^2+17a_1+66 > 7a_1+41 \\ a_1^2+17a_1+72 < 7a_1+65 \end{cases}$

$\begin{array}{r} 72 \\ -65 \\ \hline 12 \\ -5 \\ \hline 7 \end{array}$

$\begin{cases} a_1^2+10a_1+25>0 \;\leftarrow\; a\neq -5 \\ a_1^2+10a_1+7<0 \end{cases}$

$D = 100-28 = 72 = 9\cdot4\cdot2$

$\Rightarrow a_1 \in \left[\frac{-10-6\sqrt2}{2} ; -5+3\sqrt2 \right]$

$[-5-3\sqrt2 ; -5+3\sqrt2]$

$-5+3\sqrt2 \;\vee\; \cancel{0}$ <0

$-5-3\sqrt2 \;\vee\; -10$ $3\sqrt2 \;\vee\; \cancel{4}$ >-1

$\cancel{3\sqrt2 \vee 5}$ $3\sqrt2 \vee 5$ $-4,-3,-2,-1$

$3\sqrt2 \vee 5$ $18 \vee 25.$

$-9,-8,-7,-6$

Черновик

21102679 (U845973 M1299211)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102679**

ID профиля: **845973**

Вариант 18

Чистовик

Задача 5.

$$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14), \quad \log_{6x-14}(x-1)^2, \quad \log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right).$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} \frac{x}{3}+3>0, \ \frac{x}{3}+3\neq 1 \\ 6x-14>0, \ 6x-14\neq 1 \\ x-1>0, \ x-1\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\frac{7}{3} \\ x\neq \frac{5}{2} \end{cases}.$$

1.

Заменим $\frac{x}{3}+3$ на a, $6x-14$ на b, $x-1$ на c. Тогда имеем числа

$$\log_{\sqrt{a}} b, \quad \log_b c^2, \quad \log_c a, \text{ т.е.}$$

числа $2\log_a b$, $2\log_b c$, $\log_c a$. Пусть 2 из этих чисел $= t$, тогда третье $= t-1$.

$\Rightarrow t^2(t-1) = 4\cdot\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c a = 4\cdot\log_a c\cdot\log_c a = 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t^3-t^2-4=0 \Leftrightarrow (t-2)(t^2+t+2)=0.$

$t^2+t+2=0$ корней, очевидно, не имеет $(D=-7)$,

$\Rightarrow t=2$ — единственное решение.

Ясно, что хотя бы одно из чисел $2\log_a b$ и $2\log_b c$ равно t. Рассмотрим след. случаи:

1) $2\log_a b = t = 2 \Rightarrow a=b \Leftrightarrow \frac{x}{3}+3 = 6x-14 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+9 = 18x-42 \Leftrightarrow 17x=51 \Leftrightarrow x=3.$

Осталось отметить, что при $x=3$ $a=b=4$, $c=2$.

Тогда $2\log_a b = 2 = t$, $2\log_b c = 2\cdot\frac{1}{2} = 1 = t-1$, $\log_c a = 2 = t$, т.е. $x=3$ проходит проверку.

2) $2\log_b c = t = 2 \Rightarrow b=c \Leftrightarrow 6x-14 = x-1 \Leftrightarrow x=\frac{13}{5}$

Тогда $b=c=\frac{8}{5}$, $a=\frac{13}{15}+3=\frac{58}{15}$, $\Rightarrow a\neq\frac{8}{5}$, $a\neq\frac{64}{25}$, $a\neq\frac{8^3}{125}$,

$\Rightarrow \log_c a\neq 1$, $\log_c a\neq 2$, $\log_c a\neq 3$, а $\Rightarrow x=\frac{13}{5}$ проверку не проходит.

Ответ: $x=3$

Чистовик

Задача 4.

$$\begin{cases} НОД(a;b;c) = 3\cdot 5 \\ НОК(a;b;c) = 3^{15}\cdot 5^{18} \end{cases} \Longleftrightarrow$$ каждое из a, b, c $\vdots 3$ и $\vdots 5$, не кратно любым другим простым, минимальная степень, в которой 3 входит в разложение на множ. среди этих чисел $= 1$, максимальная $= 15$. Для 5 мин. степень $= 1$, макс. $= 18$.

Тогда для степеней 3 имеем 3 случая:

1) $(1, n, 15)$, $n \in [2; 14]$

все числа различны $\Rightarrow$ 6 перестановки, и 13 в. для n, $\Rightarrow$ всего этот случай охватывает $6\cdot 13$ вариантов распр. степеней 3 среди чисел a, b, c.

2) $(1, 1, 15) \to 3$ варианта

3) $(1, 15, 15) \to 3$ варианта,

$\Rightarrow$ всего $6\cdot 14$ вариантов.

и столько же для 5:

1) $(1, k, 18)$, $k \in [2; 17]$, $\Rightarrow 16\cdot 6$ вариантов

2) $(1, 1, 18) \Rightarrow 3$ в.

3) $(1, 18, 18) \Rightarrow 3$ в.

$\Rightarrow$ всего $6\cdot 17$ вариантов.

Таким образом, уникальных распределений степеней 3 и 5 по числам a, b, c $6\cdot 14\cdot 6\cdot 17 = 36\cdot 14\cdot 17 =$ ~~[illegible]~~ 8568.

Так как a, b, c не кратны другим простым (если таковые были бы, то им бы был кратен НОК), то эти распр. строго задают a, b, c.

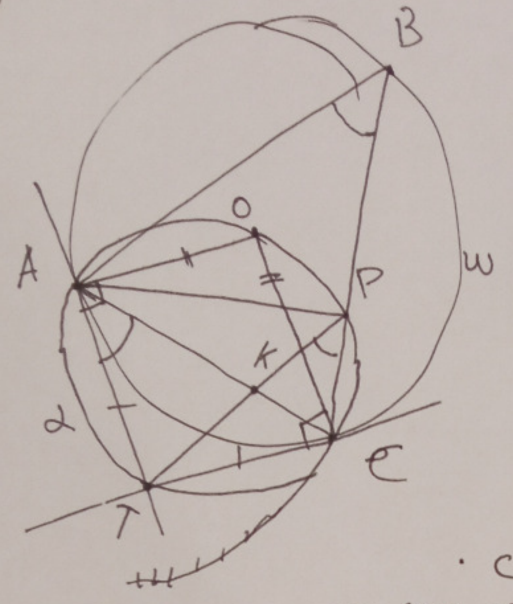
Ответ: 8568

2

21102679 (U845973 M1299212)

Чистовик

Задача 3.



• Пусть окружность, описанная вокруг AOC – α.

• $O \in \alpha$, $A \in \alpha$, $\angle OAT = 90°$, $\Rightarrow$ диаметрально прот. O точка лежит на прямой AT.

• $O \in \alpha$, $C \in \alpha$, $\angle OCT = 90°$, $\Rightarrow$ диаметрально прот. O точка лежит на прямой CT.

• $CT \cap AT = T$, $\Rightarrow$ T – диаметр. прот. O точка, $\Rightarrow T \in \alpha$.

• $\angle CAT = \angle CPT$, т.к. опираются на одну дугу $\overset{\smile}{C}$ окр. α.

• $\angle ABC$ в ω опирается на дугу (AC) (меньшую, т.к. $\angle ABC < 90°$), AT – касательная $\Rightarrow \angle ABC = \angle CAT$.

• 1) $\angle CPK = \angle CBA$
2) $\angle BCA$ – общий $\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle KPC$.

• Пусть расстояние от P до AC = h.

$\Rightarrow S_{APK} = \frac{h}{2} \cdot AK = 6$, $S_{CPK} = \frac{h}{2} \cdot KC = 5$, $\Rightarrow \frac{KC}{AK} = \frac{5}{6}$,

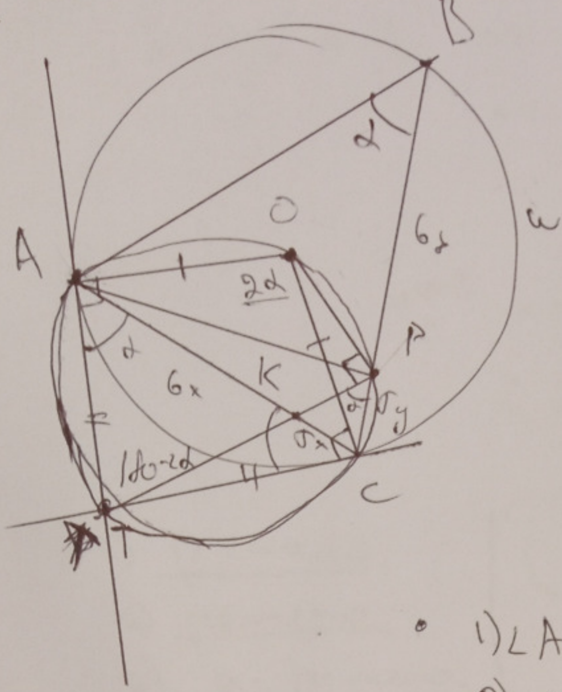
$\Rightarrow \frac{KC}{AC} = \frac{5}{11}$, $\Rightarrow \frac{S_{PKC}}{S_{BAC}} = \frac{5^2}{11^2}$, $\Rightarrow S_{ABC} = \frac{121}{5} = \underline{\underline{24.2}}$

Ответ: а) 24.2

3.

21102679 (U845973 M1299212)

№3)



$S_{APK} = 6$

$S_{CPK} = 5$

$S_{ABC} = ?$

• ∠TAC = ∠TPC, т.к. опир. на одну дугу.

• ∠TAC = ∠ABC, как угол между хордой и касательной.

• 1) ∠ABC = ∠KPC

2) ∠BCA – общий,

$\Rightarrow \triangle CPK \sim \triangle CBA.$

• $\frac{S_{PKC}}{S_{APK}} = \frac{KC}{AK} = \frac{5}{6}. \Rightarrow \frac{KC}{AC} = \frac{5}{11},$

$\Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{KPC}} = \left(\frac{11}{5}\right)^2 \Rightarrow S_{ABC} = \frac{121}{5} = \frac{242}{10} = \underline{\underline{24{,}2}}$

$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}.$

№4) Итак, наименьшая степень 3, встречающаяся в числах a, b, c – 1, наиб. – 15. степень 5 наим. = 1, наиб. = 18.

(1, n, 15) / (1, 1, 15) / (1, 15, 15) = 13·6, 3, 3 →

(1, k, 18) / (1, 1, 18) / (1, 18, 18) = 16·6, 3, 3

⇒ 13+6+6 = 14·6 · 17·6 = 14·17·36 вариантов.

Черновик.

21102679 (U845973 M1299212)

2)

$2 \cdot \log_b c = 2 \Rightarrow b = c \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6x - 14 = x - 1$

$5x = 13$ $\qquad \frac{13}{5} \vee \frac{7}{3}$

$x = \frac{13}{5}$

$x - 1 = 6x - 14 = \frac{8}{5}$ $\qquad 39 \vee 35$

$\frac{x}{3} + 3 = \frac{13}{15} + 3 = \frac{45+13}{15} = \frac{58}{15}$

...

1) решено.

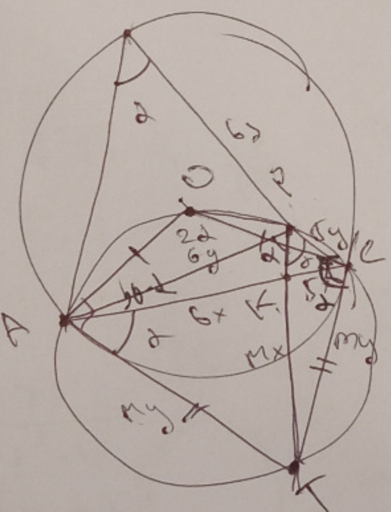
2) решено

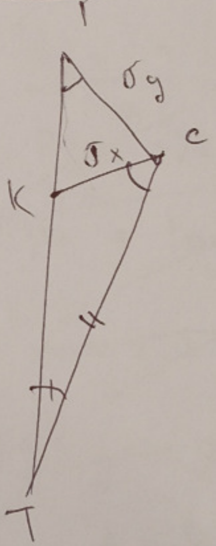
3) а - решено.

Черновик

ΔPTC

$\sim \Delta CTK.$





$\Rightarrow \cancel{\frac{KC}{PC} = \frac{TC}{}}$

$\Rightarrow \frac{TC}{TK} = \frac{PT}{CT}.$

$\Rightarrow TC^2 = PT \cdot KT.$

$\frac{KC}{PC} = \frac{x}{y} = \frac{TK}{TC} = \frac{TC}{PT}$

$PT = \frac{y}{x} \cdot TC = \frac{my^2}{x}$

$KT = mx$

$\Rightarrow KP = \frac{my^2}{x} - mx = \frac{my^2 - mx^2}{x}$

$\Rightarrow \sin(\operatorname{arctg} \frac{1}{2}) \cdot 3y \cdot 5y = 11$

$\frac{6x^2}{my^2 - mx^2} = \frac{m}{5}$

$30x^2 = m^2y^2 - m^2x^2$

$14 \cdot 17$: 98, 14, 238. $\qquad 238 \cdot 36$: 1428, 714, 8568

$14 \cdot 17$: 98, 14, 238 $\qquad 238 \cdot 36$: 1428, 714, 8568 $\qquad \Rightarrow m =$

21102679 (U845973 M1299212)

2)

$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)$, $\log_{6x-14}(x-1)^2$, $\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)$

$$\begin{cases} 6x-14>0,\ \neq 1 \\ x-1>0,\ x-1\neq 1 \\ \frac{x}{3}+3>0,\ \frac{x}{3}+3\neq 1 \end{cases} \Rightarrow x>\frac{7}{3},\ x\neq\frac{15}{6}=\frac{5}{2}.$$

$\log_{\sqrt{a}}b$, $\log_b c^2$, $\log_c a$

$2\cdot\log_a b$, $2\log_b c$, $\log_c a$

1) $\cancel{2\cdot\log_a b = 2\cdot\log_b c}$ $\begin{cases}\log_a b = \log_b c \\ \log_c a = 2\log_a b - 1\end{cases}$

$\Rightarrow \log_a^2 b = \log_a c = \frac{1}{\log_a^2 b - 1}$

$y^3 - y = 1$

$y^3 - y^2 + 1 = 0$

$P = 4 = t^2(t-1)$.

$\Rightarrow t^3 - t^2 - 4 = 0$

$t^3 - t^2 - 4 \mid t-2$

$t^3 - 2t^2 \mid t^2 + t + 2$

$t^2 - 4$

$t^2 - 2t$

$2t - 4$

$D<0$. $\Rightarrow$ $t=2$

1) $2\log_a b = 2 \Rightarrow \log_a b = 1$

$\Rightarrow a = b$.

$\frac{x}{3} + 3 = 6x - 14$

$x + 9 = 18x - 14\cdot 3$

$17x = 30 + 12 + 9$

$17x = 51 \Rightarrow x = 3$

$x = 3$

$\Rightarrow \frac{x}{3} + 3 = 4$ $\Rightarrow (x-1)^2 = 4$, $6x - 14 = 4$.

2, 2, 1 ✓

4e
рно
был

21102679 (U845973 M1299212)