Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102634**

ID профиля: **870989**

Вариант 18

Вариант 18. Часть 1. Задача 1.

Чистовик
Лист 1

По формуле суммы первых n членов арифм. прогрессии:

$S = 7a_1 + \frac{6\cdot 7}{2} d = 7a_1 + 21d$

По формуле n-го члена арифм. прогрессии:

$a_7 = a_1 + 6d$; $a_{12} = a_1 + 11d$; $a_9 = a_1 + 8d$; $a_{10} = a_1 + 9d$.

~~Обозначим~~ Положим $a_1 = x$, $d = y$. Тогда можем переписать нер-ва, данные в условии, как

$$\begin{cases} (x+6y)(x+11y) > 7x + 21y + 20 \\ (x+8y)(x+9y) < 7x + 21y + 44 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} x^2 + 17xy + 66y^2 > 7x + 21y + 20 \\ x^2 + 17xy + 72y^2 < 7x + 21y + 44 \end{cases}$$

~~Вычтем 1е ур-е из 2-го~~ Разность между левыми частями уравнений $= 6y^2$; между правыми $= 24$, при этом знак поменялся с $>$ на $<$, следовательно

$6y^2 < 24 \Rightarrow y^2 < 4 \Rightarrow y < 2$

Т.к. y - целое неотрицательное, то $y = 1$

Тогда

$$\begin{cases} x^2 + 17x + 66 > 7x + 21 + 20 \\ x^2 + 17x + 72 < 7x + 21 + 44 \end{cases} \Leftrightarrow$$

И нам нужно найти всевозможные решение этой системы в целых числах, такие, что $y > 0$ (поскольку арифм. прогрессия возрастающая). x должно быть целым по условию, а почему должно быть целым y? Ну допустим, $y \notin \mathbb{Z}$, но тогда

$\underset{\substack{\cap \\ \mathbb{Z}}}{x} + \underset{\substack{\not\cap \\ \mathbb{Z}}}{y} = a_2 \notin \mathbb{Z}$ - противоречие с условием, значит, y обязано быть целым

И наоборот, если $y \in \mathbb{Z}$, то $\forall i \in \mathbb{Z}, i > 0$

$a_i = a_1 + kd = \underset{\mathbb{Z}}{x} + \underset{\mathbb{Z}}{k}\,\underset{\mathbb{Z}}{y} \in \mathbb{Z}$

(где k - какое-то целое неотрицательное число)

Т.е. любая пара (x, y) такая, что $x, y \in \mathbb{Z}$; $y > 0$ и (x, y) удовлетворяет системе нер-в, нам подходит.

$$\begin{cases} x^2 + 10x + 25 > 0 \\ x^2 + 10x + 7 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -5 \\ x \in (-3\sqrt{2} - 5;\ 3\sqrt{2} - 5) \end{cases}$$

$f(x) = x^2 + 10x + 25$

Для первого нер-ва: $D_x = 100 - 100 = 0 \Rightarrow x = \frac{-10 \pm \sqrt{0}}{2} = -5$; парабола ветвями вверх $\Rightarrow f(x) \leq 0$ только при $x = -5$

Для второго нер-ва: $D_x = 100 - 28 = 72 \Rightarrow x = \frac{-10 \pm 6\sqrt{2}}{2} = \pm 3\sqrt{2} - 5$.

$f(x) = x^2 + 10x + 7$ - парабола ветвями вверх $\Rightarrow f(x) < 0$ при $x \in (-3\sqrt{2} - 5;\ 3\sqrt{2} - 5)$. $4 < 3\sqrt{2} = \sqrt{18} < 5$; отсюда $-10 < -3\sqrt{2} - 5 < -9$; $-1 < 3\sqrt{2} - 5 < 0$. Отсюда, т.к. $x \in \mathbb{Z}$, то $x \in [-9; -1]$; не забудем также исключить из мн-ва решений -5.

$\boxed{\text{Ответ: } a_1 = -1, -2, -3, -4, -6, -7, -8, -9.}$

Вариант 18. Часть 1. Задача 3.

Чистовик
Лист 2

Рассм-м второе ~~уравнение~~ нер-во системы:

$a^2+b^2 \le \min(4a-2b, 5)$

Условие на то, что левая часть меньше минимума из двух аргументов равносильно условию, что левая часть меньше обоих аргументов; поэтому вместо этого нер-ва можем записать систему:

$$\begin{cases} a^2+b^2 \le 5 \\ a^2+b^2 \le 4a-2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2 \le 5 \\ (a-2)^2+(b+1)^2 \le 5 \end{cases}$$

Если мы рассм-м систему координат с Oa-осью абсцисс и Ob-осью ординат, то первое нер-во задаёт круг с центром в $(0;0)$ и радиусом $\sqrt{5}$. Второе - круг с центром в $(2;-1)$ и радиусом $\sqrt{5}$. (рис. 1)

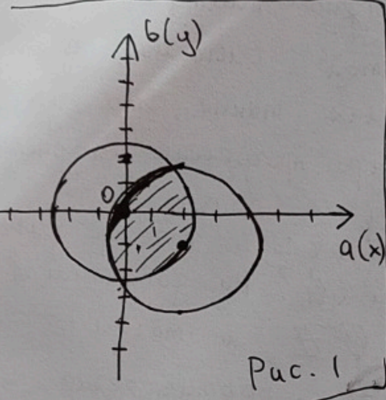


Рис. 1

Таким образом, все пары $(a;b)$, к-е могут нам подойти, лежат в пересечении этих двух кругов. Рассм-м теперь первое ур-е системы:

$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 5$

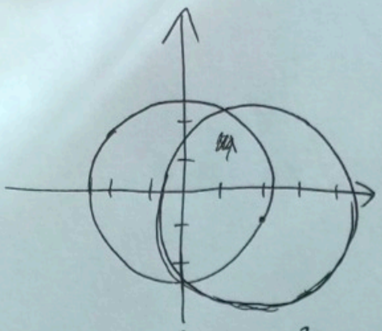
При фиксированных a и b в координатной плоскости с Ox-осью абсцисс и Oy-осью ординат оно задаёт круг с центром в $(a;b)$ и радиусом $\sqrt{5}$. Таким образом, M - это объединение всех кругов с центрами в „разрешённых" парах $(a;b)$ (тех, к-е в коорд. плоскости Oab лежат в пересечении двух кругов) и радиусами по $\sqrt{5}$. Но это то же самое, что объединение всех кругов радиуса $\sqrt{5}$ с центрами, лежащими в пересечении двух кругов радиуса $\sqrt{5}$ с центрами в $(0;0)$ и $(2;-1)$ (т.е. по сути мы можем спокойно „перенести" картинку с плоскости Oab на плоскость Oxy). Заметим, что M - окр-ть с центром в $(1;-\frac{1}{2})$ и радиусом $\frac{3}{2}\sqrt{5}$. (утв. 1)

Тогда её площадь $= \pi R^2 = \frac{45\pi}{4}$.

Док-во утв. 1: центры двух окр-тей находятся на расстоянии $\sqrt{5}$, и их радиусы также равны $\sqrt{5}$. Т.е. две точки пересечения окр-й равноудалены от их центров. Тогда любая точка, лежащая на расстоянии $\le \frac{3}{2}\sqrt{5}$ от середины отрезка между двумя окр-ми (точки $1;-\frac{1}{2}$) лежит в M, а любая другая - нет.

Ответ: $\frac{45\pi}{4}$

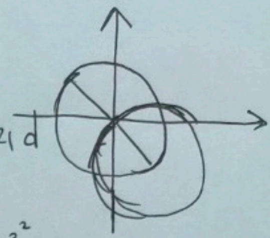
21102634 (U870989 M1301047)



$S = 7a_1 + 21d$

$(a_1 + 6d)(a_1 + 11d) > 7a_1 + 21d$

$(a_1 + 8d)(a_1 + 9d) <$



$72 = 8 \cdot 9 = 2^3 \cdot 3^2$

$-7 + 21$

$x_1 x_2 = 25$

$x_1 + x_2 = -10$

$(x-a)^2 + (y-b)^2 \le 5$

$a^2 + b^2 \le \min(4a - 2b, 5)$

$\begin{array}{r} 21 \\ +44 \\ \hline 65 \end{array}$

$x_1 = -5 \quad x_2 = -5$

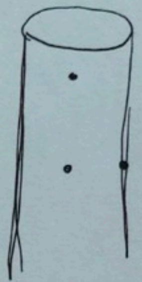
$5 + 10 >$

$50 > 34$

$x_1 x_2 = 7$

$x_1 + x_2 = -10$

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \le 5 \\ a^2 + b^2 \le 4a - 2b \\ b \ge 2a - \frac{5}{2} \end{cases}$$

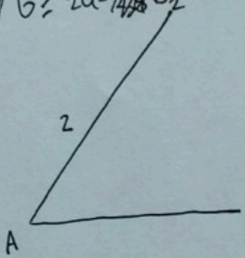


$8 \cdot 9 = 72 <$

$|x| + |y| \le 2\sqrt{5}$

$4a - 2b \le 5$

$b \ge 2a - 2{,}5$



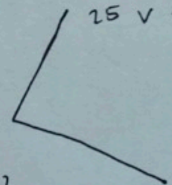
$5 \vee 2\sqrt{5}$

$25 \vee 20$

$\frac{5}{2} > \sqrt{5}$

$a_1 = -1 \quad d = 1$

$a_7 = 5 \quad a_{12} = 10$



$a^2 + b^2 \le 5$

(a, b)

$a^2 +$

$a(a-4) + b(b+2) \le 0$

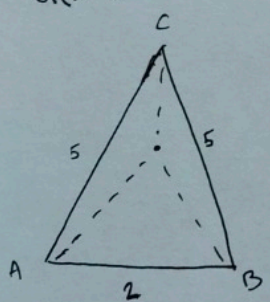
$\frac{4}{2} = 2$

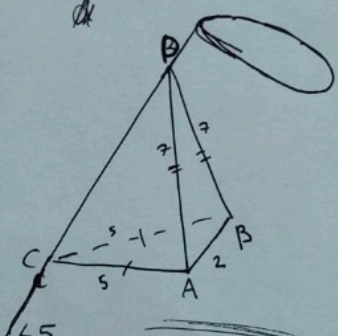
34

$50 > 14 + 20$

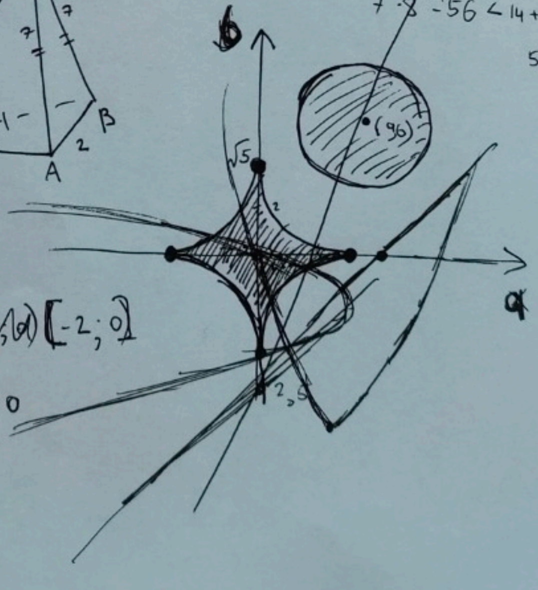
$2\sqrt{5} - \frac{5}{2}$

-1





$7 \cdot 8 = 56 < 14 + 44 = 58$



$a^2 - 4a + 4 + b + 2b + 1 \le 5$

$(a-2)^2 + (b+1)^2 \le 5$

$a^2 + b^2 \le 4a - 2b$

$(a, b)\ [-2; 0]$

$a(a-4) + b(b+2) \le 0$

$[0, \frac{5}{4}]$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102634**

ID профиля: **870989**

Вариант 18

Вариант 18. Часть 2. Задача 4.

Чистовик
Лист 1

~~Из первого ур-е заключаем, что каждое из чисел a, b, c должно делиться на 15, т.е. разложение каждого из 3-х чисел должно содержать 3 и 5 в степени ≥ 1. При этом,~~

Из второго ур-я системы заключаем, что каждое из 3-х чисел не имеет в своём разложении на простые множители других чисел, кроме 3 и 5 (т.к. если бы это было не так, то и в разложении НОКа $(a;b;c)$ присутствовал бы ещё какой-то простой множитель, кроме 3 и 5). Поэтому a, b и c имеют вид

$$a = 3^{\alpha_1}\cdot 5^{\alpha_2};\quad b = 3^{\beta_1}\cdot 5^{\beta_2};\quad c = 3^{\gamma_1}\cdot 5^{\gamma_2},$$ где $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,\gamma_1,\gamma_2 \in \mathbb{N}\cup\{0\}$

Также из второго ур-я получаем, что $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1 \le 15$ (иначе 3 входило бы в НОК в степени больше 15), и хотя бы одно из $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1 = 15$ (иначе 3 входило бы в НОК в степени меньше 15). Аналогично $\alpha_2,\beta_2,\gamma_2 \le 18$ и хотя бы одно из $\alpha_2,\beta_2,\gamma_2 = 18$. Далее, из 1-о ур-я системы получаем, что все 3 числа $\vdots\, 15 = 5\cdot 3$, т.е. имеют в своём разложении 3 и 5 хотя бы в первой степени, т.е. $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,\gamma_1,\gamma_2 \ge 1$. При этом хотя бы одно из $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1 = 1$ (иначе бы все три числа делились на степень тройки >1 и 3 входило бы в НОД в степени >1) и аналогично хотя бы одно из $\alpha_2,\beta_2,\gamma_2 = 1$. Подводя итог, кол-во подходящих троек $(a;b;c)$ равно кол-ву шестёрок $(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1,\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)$, таких, что:

1) Все числа натуральные.
2) Одно из чисел $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1$ равно 1; ещё одно из этих чисел равно 15; третье может быть любым от 1 до 15.
3) Одно из чисел $\alpha_2,\beta_2,\gamma_2$ равно; ещё одно из них равно 18; третье может быть любым от 1 до 18.

Выбор троек $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1$ и $\alpha_2,\beta_2,\gamma_2$ независим, поэтому достаточно посчитать отдельно кол-во троек $(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)$ и $(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)$ и перемножить полученные два числа. Посчитаем кол-во троек $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1$: У нас есть 3 случая:

1) Два числа равны 1, одно равно 15. Кол-во троек равно кол-ву способов определить, какое из 3х чисел будет равно 15, т.е. $C_3^1 = 3$.
2) Два числа равны 15, одно равно 1. Кол-во троек равно кол-ву способов определить, какое из 3х чисел будет равно 1, т.е. $C_3^1 = 3$.
3) Одно число равно 1, одно равно 15, третье $\in [2; 14]$. Тогда кол-во троек равно C_3^1 (кол-во способов выбрать, какое число равно 1) $\cdot\, C_2^1$ (кол-во способов выбрать, какое из оставшихся двух чисел равно 15) $\cdot\, 13$ (кол-во способов выбрать значение третьего числа) $= 3\cdot 2\cdot 13 = 78$

Вариант 18. Часть 2. Задача 4.

Чистовик

Лист 2

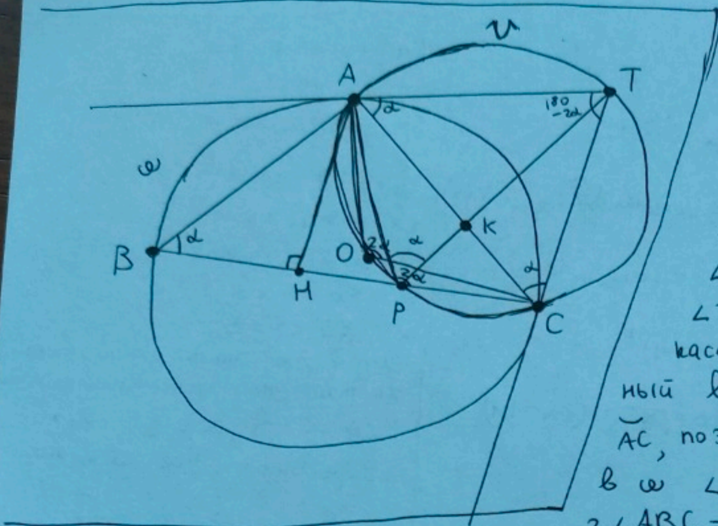
Таким образом, кол-во троек $(\alpha_1; \beta_1; \gamma_1)$ равно $78+3+3=84$. Кол-во троек $(\alpha_2; \beta_2; \gamma_2)$ считается абсолютно аналогично и равно $C_3^1 + C_3^1 + C_3^1 \cdot C_2^1 \cdot 16 = 3+3+96 = 102$. Поэтому итоговый ответ равен $102 \cdot 84 = 8568$.

$\boxed{\text{Ответ: } 8568}$

21102634 (U870989 M1301048)

Вариант 18. Часть 2. Задача 6.

Чистовик Лист 4



Докажем, что точка T лежит на ν (описанной окр-и ΔAOC). Пусть ∠TAC = α. TA = TC как отрезки касательных к ω => ΔTAC р/б => ∠TCA = ∠TAC = α. ∠ATC в ΔTAC = 180° − ∠TCA − ∠TAC = 180° − 2α. В окр-ти ω ∠TAC − угол между хордой AC и касательной TA, опирающийся на $\overset{\frown}{AC}$. Вписанный в ω ∠ABC опирается на ту же $\overset{\frown}{AC}$, поэтому ∠ABC = ∠TAC = α. Центральный в ω ∠AOC также опирается на $\overset{\frown}{AC}$ => ∠AOC = 2∠ABC = 2α. ∠AOC также вписан в ν и опирается на $\overset{\frown}{ATC}$; на неё же опирается вписанный в ν ∠APC => ∠APC = ∠AOC = 2α. Тогда 4-угольник ATCP вписанный, поскольку ∠ATC + ∠APC = 2α + (180° − 2α) = 180. Ну а поскольку точки A, P, C лежат на ν, то ATCP вписан в ν => T лежит на ν, ч.т.д. Тогда

а) ∠APT = ∠ACT (как впис-е в ν и опир-е на $\overset{\frown}{AT}$) = α. Тогда ∠KPC = ∠APC − ∠APT = 2α − α = α. Тогда AB ∥ TP, т.к. соответственные углы ∠ABC и ∠TPC равны. Тогда по т. Фалеса $\frac{AK}{KC} = \frac{BP}{PC}$.

$\frac{S_{APK}}{S_{CPK}} = \frac{6}{5}$, при этом высоты ΔAPK и ΔCPK из точки P совпадают => их площади относятся как основания, лежащие против вершины P => $\frac{S_{APK}}{S_{CPK}} = \frac{AK}{KC}$. Отсюда $\frac{BP}{PC} = \frac{AK}{KC} = \frac{6}{5}$. ΔABP и ΔACP имеют общую высоту из точки A => их площади относятся как основания, лежащие против вершины A => $\frac{S_{ABP}}{S_{ACP}} = \frac{BP}{PC} = \frac{6}{5}$ => $S_{ABP} = S_{ACP} \cdot \frac{6}{5}$ $= (S_{APK} + S_{CPK}) \cdot \frac{6}{5} = \frac{66}{5}$. $S_{ABC} = S_{ABP} + S_{ACP} = \frac{66}{5} + 11 = \frac{121}{5} = \frac{242}{10} = 24{,}2$

Ответ: 24,2.

б) Пусть AH − высота в ΔABP. ∠APH = π − ∠APC = π − 2α => $\operatorname{tg}\angle APH = \frac{AH}{HP} = \operatorname{tg}(\pi - 2\alpha) = -\operatorname{tg}2\alpha$

Вариант 18. Часть 2. Задача 5.

Чистовик

Лист 3

Задача разбивается на 3 случая.

I случай:
$$\begin{cases} \log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14) = \log_{6x-14}(x-1)^2 \\ \log_{6x-14}(x-1)^2 - 1 = \log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right) \end{cases}$$

II случай:
$$\begin{cases} \log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14) = \cancel{\log} \log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right) \\ \cancel{\log} \log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right) - 1 = \log_{6x-14}(x-1)^2 \end{cases}$$

III случай:
$$\begin{cases} \log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right) = \log_{6x-14}(x-1)^2 \\ \log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right) - 1 = \log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14) \end{cases}$$

Ограничение (для всех 3х случаев:

$\frac{x}{3}+3>0 \Rightarrow x>-9$

$\frac{x}{3}+3 \neq 1 \Rightarrow x \neq -6$

$6x-14>0 \Rightarrow x>\frac{7}{3}$

$6x-14 \neq 1 \Rightarrow x \neq \frac{5}{2}$

$x-1>0 \Rightarrow x>1$

$x-1 \neq 1 \Rightarrow x \neq 2$

Из всех этих ограничений достаточно оставить только $x>\frac{7}{3}$, $x \neq \frac{5}{2}$, они покрывают все остальные

$\times\begin{array}{r}13\\6\\\hline 78\end{array}$ $\times\begin{array}{r}16\\6\\\hline 96\end{array}$ $\times\begin{array}{r}102\\84\\\hline 408\\+816\\\hline 8568\end{array}$ 8400 48,4

$tg\,2\alpha = si$

$\frac{abc}{4R} = 24{,}2$

$R = \frac{4{,}4\sqrt{5}C}{R} = 24{,}2$

$ab = 48{,}4\sqrt{5}$

$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14) = \log_{6x-14}(x-1)^2$

$\frac{1}{2\sqrt{5}}ab = 24{,}2$

$\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14) = \log_{6x-14}(x-1)$

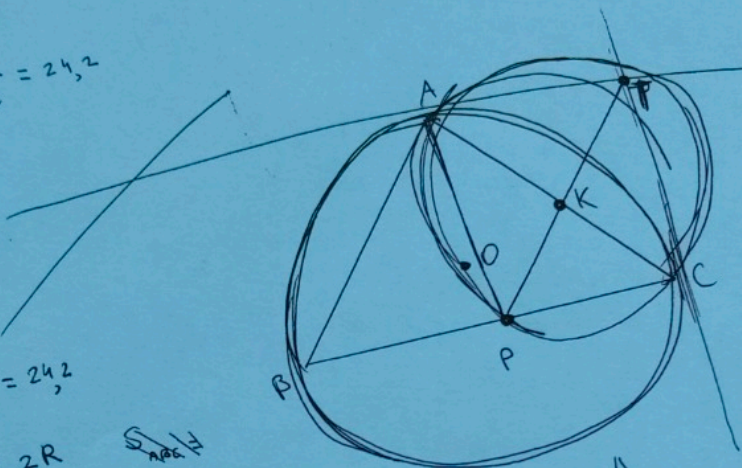
$\frac{1}{2}\sin\alpha\, ab = 24{,}2$ $\log_{6x-14}(x-1)^{4} = \log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)(x-1)$

$\frac{4R}{48{,}4\sqrt{5}} = 24{,}2$

$\frac{2\cos^2\alpha - 1}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$

$\frac{AK}{KC} = \frac{APK}{CPK} = \frac{6}{5}$

$\frac{4R}{abc} = 24{,}2$



$\frac{5\cdot 4\cdot 3}{4\cdot 2{,}5}$

$\frac{tg\,2\alpha}{tg\,\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$1-tg^2\alpha$

$180-(180-2\alpha)$

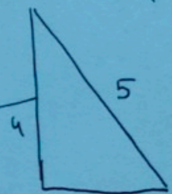
$90-(180-2\alpha) = 2\alpha-90$

$\frac{4R}{abc} = 24{,}2$

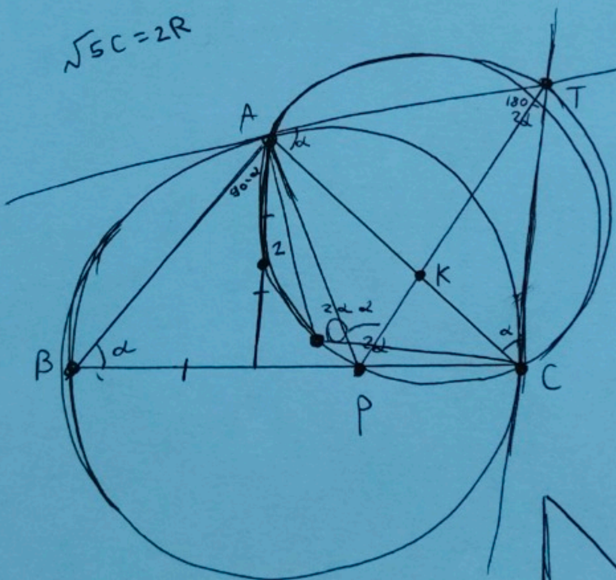
$\frac{ABC}{\sin\alpha} = 2R$

$S_{ABC} =$

$\sqrt{5}C = 2R$



$\frac{BP}{PC} - ?$



$+\begin{array}{r}66\\55\\\hline 121\end{array}$

$tg(\pi-2\alpha) = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$

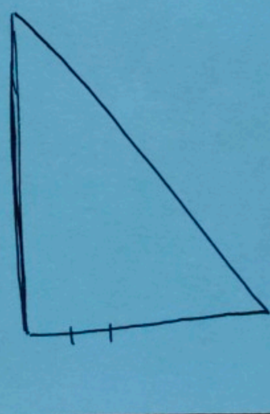
$\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$

$\frac{\sin(\pi-2\alpha)}{\cos(\pi-2\alpha)} = \frac{\sin 2\alpha}{-\cos 2\alpha}$

$- \frac{1}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$

$-tg\,2\alpha$

$tg\,2\alpha = tg\left(2\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{2}\right)$



$1+\frac{1}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$