# Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102531**

ID профиля: **299291**

Вариант 18

Чистовик. Математика 11

лист 1 из 4

Задача 1.

Пусть $a_1$ - первый член последовательности, $b$ - разность.

По условию, $b>0$. Заметим, если $a_1$ и $a_1+b$ - целые, то $b$ - целое

$a_1, a_1+b, a_1+2b, \dots$

Сумма первых семи членов:

$S = a_1 + (a_1+b) + (a_1+2b) + \dots + (a_1+6b) = 7a_1 + (b+2b+\dots+6b) =$

$= 7a_1 + 21b$.

$a_7 = a_1+6b$, $a_{12} = a_1+11b$, $a_7 \cdot a_{12} = a_1^2 + 17a_1b + 66b^2$

$a_9 = a_1 + 8b$, $a_{10} = a_1 + 9b$, $a_9 \cdot a_{10} = a_1^2 + 17a_1b + 72b^2$

Тогда нер-ва из условия:

$$\begin{cases} a_7 \cdot a_{12} = a_1^2 + 17a_1b + 66b^2 > \underbrace{7a_1+21b}_{S} + 20 \\ a_9a_{10} = a_1^2 + 17a_1b + 72b^2 < \underbrace{7a_1+21b}_{S} + 44 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 17a_1b + 66b^2 > 7a_1 + 21b + 20 \\ 7a_1 + 21b + 44 > a_1^2 + 17a_1b + 72b^2 \end{cases}$$ , сложим

$6b^2 < 24$

$b^2 < 4$

$-2 < b < 2$, по условию $b>0$, значит, $\boxed{b=1.}$

Тогда сумма 7 членов: $S = 7a_1 + 21$

$$\begin{cases} a_1^2 + 17a_1 + 66 > 7a_1 + 41 \\ a_1^2 + 17a_1 + 72 < 7a_1 + 65 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0 \\ a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1+5)^2 > 0 \leftarrow a_1 \neq -5 \\ (a_1+5-3\sqrt{2})(a_1+5+3\sqrt{2}) < 0 \end{cases}$$

продолжение на след. листе.

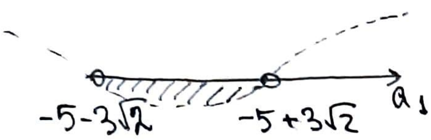
Чистовик.

Математика 11

лист 2 из 4

Задача 1 (продолжение)

$(a_1+5-3\sqrt{2})(a_1+5+3\sqrt{2})<0$




$a_1 \in (-5-3\sqrt{2}; -5+3\sqrt{2})$

$(3\sqrt{2})^2=18$, $4<3\sqrt{2}<5$

$-10<-5-3\sqrt{2}<-9$ $\quad$ $-1<-5+3\sqrt{2}<0$

Значит, целые $a_1$, подходящие под второе условие:

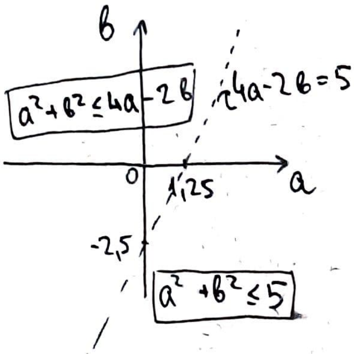
$-9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1$

под первое условие не подходит $a_1=-5$, значит,

$a_1 \in \{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1\}$

Ответ: $\{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1\}$.

Задача 3.



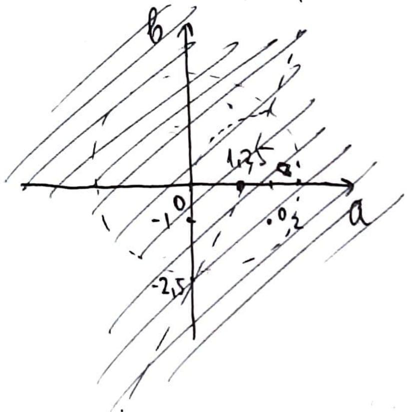

$a^2+b^2\le \min(4a-2b,\ 5)$

- для точек, которые ниже прямой $4a-2b=5$ должно выполняться условие $a^2+b^2\le 4a-2b$
- для точек, которые выше прямой $4a-2b=5$ должно выполняться условие $a^2+b^2\le 5$

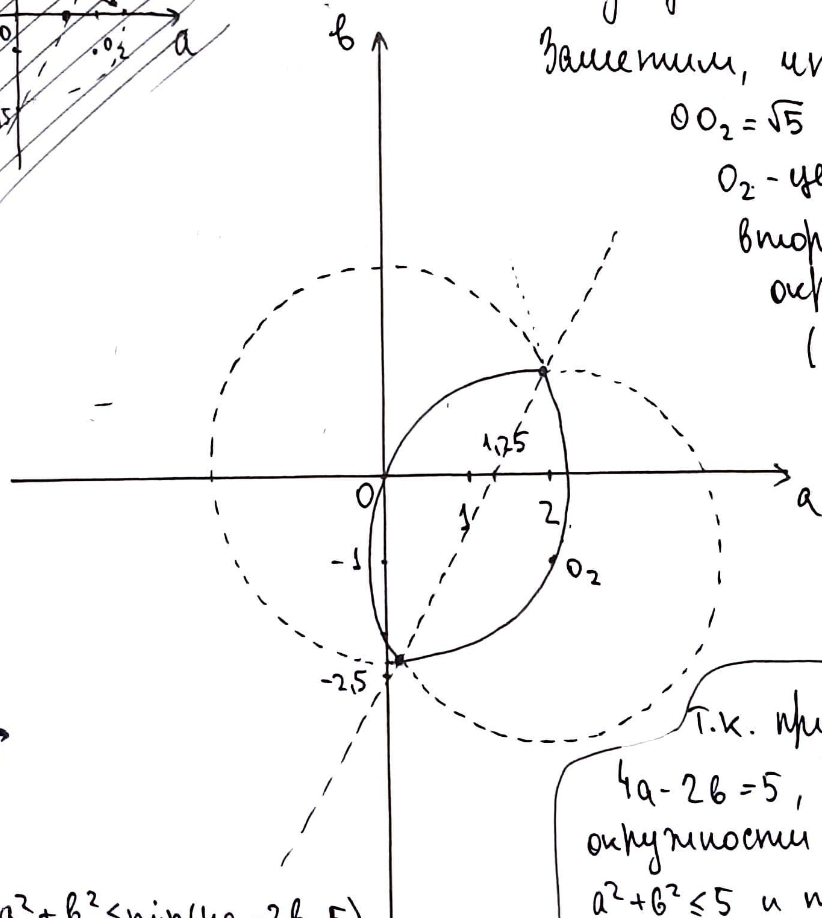
окружность радиуса $\sqrt{5}$ с центром в $(0;0)$

окружность радиуса $\sqrt{5}$ с центром в $(2;-1)$

$a^2+b^2\le 4a-2b$ ; $(a^2-4a+4)+(b^2+2b-1)\le 5$ ; $(a-2)^2+(b+1)^2\le 5$

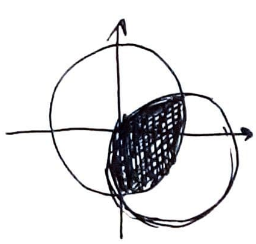



Построим на плоскости множество подходящих а и в




Заметим, что
$OO_2=\sqrt{5}$
$O_2$ - центр второй окружности $(a^2+b^2\le 4a-2b)$

Т.к. прямая $4a-2b=5$, то окружности $a^2+b\le 4a-2b$, $a^2+b^2\le 5$ и прямая будут пересекаться в одних и тех же точках



под условие $a^2+b^2\le \min(4a-2b,5)$ подходит пересечение окружностей.

продолжение на след. листе

Чистовик

Математика 11

Задача 3 (продолжение)

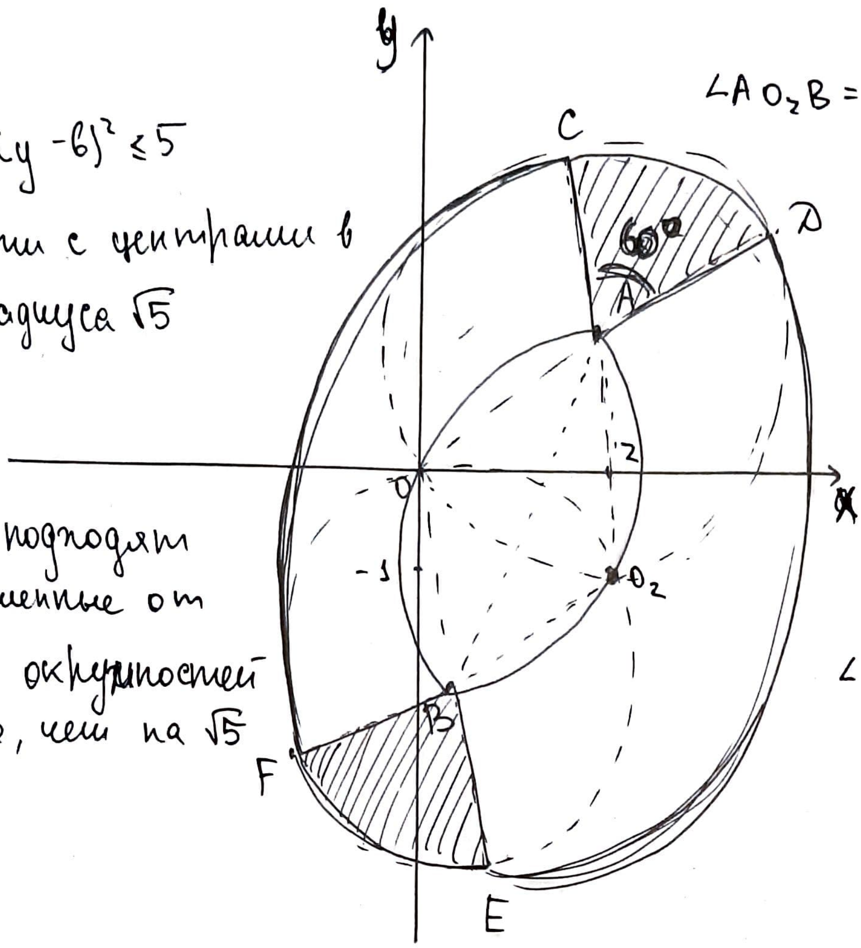
шифр Чиу 4

$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 5$

окружности с центрами в $(a;b)$ радиуса $\sqrt{5}$

то есть подходят $x$ и $y$, удаленные от пересечения окружностей не больше, чем на $\sqrt{5}$

$\angle AO_2B = \angle AOB = 120°$




$\angle CAD = 60° = \angle FBE$

Заштрихованные: секторы окружностей радиуса $\sqrt{5}$,

$ODE$ - сектор окружности радиуса $2\sqrt{5}$, аналогично $O_2CF$

Вычислим площадь получившейся фигуры.

$S=\frac{\alpha}{2}\cdot r^2$ $\quad S_1 = 2\cdot\left(\frac{2\pi}{6}\cdot(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{5})^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{3}\right) = 2\cdot\left(\frac{10\pi}{6} - \frac{5\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{10}{3}(\pi-\sqrt{2})$

(площадь пересечения изначальных окружностей)

площадь маленьких секторов $S_2 = 2\cdot\left(\frac{\pi}{6}(\sqrt{5})^2\right) = \frac{5}{3}\pi$

площадь дополнительных дуг: $S_3 = 2\left(\frac{2\pi}{6}(2\sqrt{5})^2 - \frac{2\pi}{6}(\sqrt{5})^2\right) =$

$= 2\left(\frac{2\pi}{6}\cdot 15\right) = 10\pi$

площадь M

# Черновик.

$a_1$ - первый

$b$ - разность

$$\underset{1}{a_1},\ \underset{2}{a_1+b},\ \underset{3}{a_1+2b},\ \underset{4}{a_1+3b},\ \underset{5}{a_1+4b},\ \underset{6}{a_1+5b},\ \underset{7}{a_1+6b}$$

$$S = a_1\cdot 7 + b\cdot\frac{6\cdot 7}{2} = 7a_1 + 21b$$

$\boxed{b>0}$

$a_7 = a_1 + 6b$ $\qquad$ $a_9 = a_1 + 8b$

$a_{12} = a_1 + 11b$ $\qquad$ $a_{10} = a_1 + 9b$

$$a_7\cdot a_{12} = a_1^2 + 17ba_1 + 66b^2 > 7a_1 + 21b + 20$$

$$a_9\cdot a_{10} = a_1^2 + 17ba_1 + 72b^2 < 7a_1 + 21b + 44$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 17ba_1 + 66b^2 > 7a_1 + 21b + 20 \\ 7a_1 + 21b + 44 > a_1^2 + 17ba_1 + 72b^2 \end{cases}$$ сложим

$$66b^2 + 44 > 72b^2 + 20$$

$$6b^2 < 24$$

$$b^2 < 4$$

$$b < 2$$

$a_7 a_{12}$

$$b = 1$$

$$S = 7a_1 + 21$$

$D = 100 - 28 = 72 = 6\sqrt2$

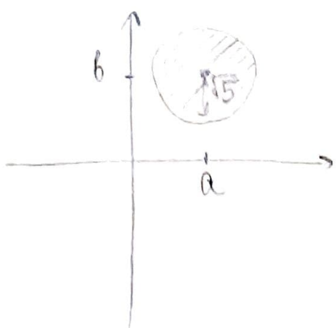
$a_1 = \frac{-10+6\sqrt2}{2} = -5 + 3\sqrt2$

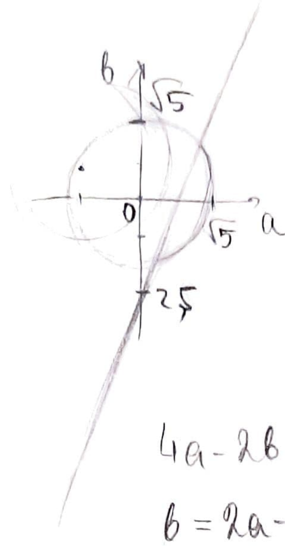
$a_2 = -5 - 3\sqrt2$

$5 > 3\sqrt2 > 4$

# Черновик.

$(x-a)^2+(y-b)^2\le 5$




$$\begin{array}{r} 2{,}5 \\ \times\ 2{,}5 \\ \hline 125 \end{array}$$

$4a-2b=5$

$b=2a-2{,}5$

$a^2+b^2=5$

$4a-2b=5$

$b=2a-2{,}5$

$a^2+4a^2+10a+6{,}25=5$

$5a^2+10a+1{,}25=0$

$a^2+2a+0{,}25=0$

$D=4-1=3$

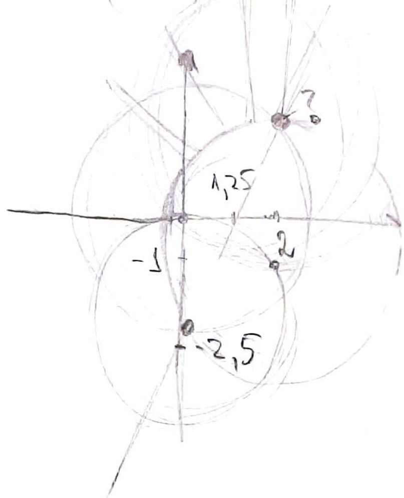
$a=\frac{-2+\sqrt3}{2}$

$a=\frac{-2-\sqrt3}{2}$

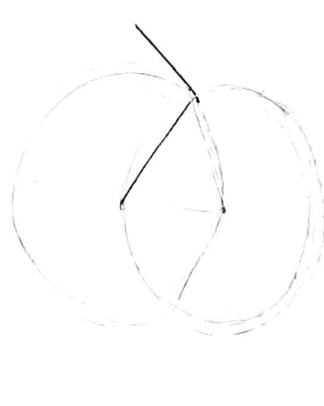
$a^2+b^2\le 4a-2b$

$(a^2-4a+4)+(b^2+2b+1)\le 5$

$(a-2)^2+(b+1)^2\le 5$




$a^2\cancel{-4a+4}+4a^2+10a+6{,}25\cancel{+4a-5}\ \ 5$



# Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102531**

ID профиля: **299291**

Вариант 18

Задача 4.

НОД $(a;b;c) = 15 = 3^1 \cdot 5^1$

НОК $(a;b;c) = 3^{15} \cdot 5^{18}$

наим. встречающаяся в числах степень 3 – 1, степень 5 – тоже 1

наиб. встречающаяся степень 3 – 15, 5 – 18.

Заметим, что в каждом числе встречается делитель 3 и 5, т.к. есть в НОК, а также никаких простых делителей кроме 3 и 5 у чисел нет. (нет в НОК).

С точностью до перестановок a, b, c возможны следующие варианты:

①

| a | b | c |
|---|---|---|
| $3 \cdot 5$ | $3^{15} \cdot 5^{18}$ | |

c любое

②

| a | b | c |
|---|---|---|
| $3 \cdot 5^{18}$ | $3^{15} \cdot 5$ | |

c любое

③

| a | b | c |
|---|---|---|
| $3 \cdot 5$ | $3^k \cdot 5^{18}$ | $3^{15} \cdot 5^l$ |

k и l любые

④

| a | b | c |
|---|---|---|
| $3 \cdot 5^k$ | $3^l \cdot 5$ | $3^{15} \cdot 5^{18}$ |

k и l любые

⑤

| a | b | c |
|---|---|---|
| $3 \cdot 5^{18}$ | $3^{15} \cdot 5^k$ | $3^l \cdot 5$ |

k и l любые

⑥

| a | b | c |
|---|---|---|
| $3^{15} \cdot 5$ | $3 \cdot 5^k$ | $3^l \cdot 5^{18}$ |

k и l любые

(любые, значит степени 3 от 1 до 15, степени 5 от 1 до 18)

посчитаем варианты: случай 1: троек, где a, b, c различны

$15 \cdot 18 - 2 = 268$, перестановок с такими тройками

$268 \cdot 6 = 1608$

с тройками, где 2 числа повторяются (таких 2)

$2 \cdot 3 = 6$

всего: 1614

для случая 2 тоже 1614.

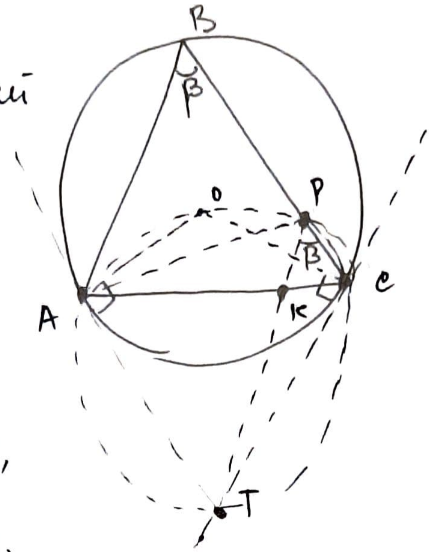
случаи 3 – 6: троек, где не повторяются a, b, c $15 \cdot 18 - 1 = 269$, перестановок 1614. Одна тройка, где 2 числа повторяются, перестановок 3. Значит всего 1617. Во всех 6 случаях $2 \cdot 1614 + 4 \cdot 1617 = 6 \cdot 1614 + 12 = 9696$ вариантов.

Ответ: 9696.

Задача 6. пункт а)

а)

1. Пусть $\angle B = \beta$, тогда
$\angle AOC = 2\beta$ как центральный




2. $\frac{AK}{KC} = \frac{6}{5}$, $AK = 6x$, $KC = 5x$
(треугольники с равными высотами $\triangle APK$ и $\triangle KPC$)

3. Т.к. $AT$ и $CT$ - касательные,
то $\angle OAT = \angle OCT = 90^\circ$, значит,
$AOCT$ - вписанный четырехугольник. (сумма противоп. углов $180^\circ$)

4. Точки $A, O, P, C, T$ лежат на одной окружности.

5. $\triangle AOT = \triangle OCT$ по катету и гипотенузе, $AT = TC$.
$\angle ATC = 180^\circ - 2\beta$, значит, $\angle ATO = \angle OTC = 90^\circ - \beta$. Тогда
$\angle CAT = \angle ACT = \beta$

6. Тогда $\angle TPC = \angle TAC = \beta$ (как опир. на одну дугу).

7. Значит, $AB \parallel TP$, т.к. $\angle ABP = \angle TPC$.

8. По т. Фалеса $\frac{CK}{KA} = \frac{CP}{PB} = \frac{5}{6}$. $S_{ABC} =$

$= \frac{11}{5} \cdot 11 = \frac{121}{5}$ кв. ед.

Ответ: $\frac{121}{5}$ кв. ед.

Чистовик. Математика 11

лист 3 из 3

Задача 5.

$$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)\cdot\log_{(6x-14)}(x-1)^2\cdot\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)=4\cdot1=4$$

$$\begin{cases} a\cdot b\cdot c=4 \\ a=b \\ c=b-1 \end{cases}$$

$b\cdot b\cdot(b-1)=4$

$b^3-b^2-4=0$ ; $(b-2)(b^2+b+2)=0$

$$\left[\begin{array}{l} b=2 \\ b^2+b+2=0 \quad \varnothing \quad D<0 \end{array}\right.$$

$b=2$;

$a=2$;

$c=1$;

Случай 1:
$$\begin{cases} \log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)=2 \\ \log_{(6x-14)}(x-1)^2=2 \\ \log_{(x-1)}\left(\frac{x}{3}+3\right)=1 \end{cases}$$

$6x-14=x-1$ ; $\left[\begin{array}{l} x=\frac{13}{5} \text{ не подходит} \\ x=\frac{15}{7} \text{ не подходит} \end{array}\right.$

$6x-14=1-x$ ;

Случай 2:
$$\begin{cases} \log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)=2 \\ \log_{(x-1)}\left(\frac{x}{3}+3\right)=2 \\ \log_{(6x-14)}(x-1)^2=1 \end{cases}$$

$6x-14=x^2-2x+1$

$$\left[\begin{array}{l} x=3 \text{ подходит} \\ x=5 \text{ не подходит} \end{array}\right.$$

Случай 3:
$$\begin{cases} \log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)=1 \\ \log_{(x-1)}\left(\frac{x}{3}+3\right)=2 \\ \log_{6x-14}(x-1)^2=2 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} 6x-14=x-1 \\ 6x-14=1-x \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=\frac{13}{5} \text{ не подходит} \\ x=\frac{15}{7} \text{ не подходит} \end{array}\right.$$

Ответ: $x=3$.

Черновик.

$\log \quad \log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14) = \log_{6x-14}(x-1)^2$

$\log_{\sqrt{\frac{1}{3}+3}}(6x-14) - 1 = \log_{(x-1)}\left(\frac{x}{3}+3\right)$

$\times \frac{14}{7}$ / $8$

$\log$

$\frac{90}{7} \; \cancel{\frac{14}{8}} - 14$

$\frac{1}{\log_{(6x-14)}\sqrt{\frac{x}{3}+3}} - \log_{6x-14}(x-1)^2 = 0$

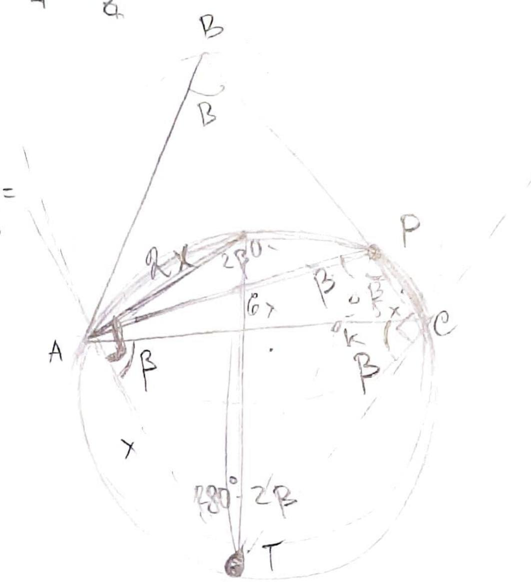
$\frac{15}{7 \cdot 3} = \frac{5}{7} + 3 = \boxed{\frac{26}{7}}$

$x^2-2x+1 = \frac{x}{3}$

$x^2-8x+15=0$

$x=3$

$x=5$




$\frac{13}{15} + \frac{15}{7}$

$\frac{58}{15} =$

T на окр.

$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14) = \log_{6x-14}(x+1)^2 = k$

$6x-14$

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

$\frac{5}{3}+3 = \frac{14}{3}$

$\left(\sqrt{\frac{x}{3}+3}\right)^k = 6x-14$

$(6x-14)^k = (x-1)^2$

$\sqrt{\frac{x}{3}+3}^{\,2k} = (x-1)^2$

$\left(\frac{x}{3}+3\right)^{\frac{k}{2}} = (x-1)$

$\times \frac{26}{4}$ / $104$

$6 \cdot 8 - 26 \cdot 4 + 40 - 15$

$48 - 104 + 40$

$k-1 = \frac{2}{k}$

$k^2-k-2=0$

$\left[\begin{array}{l} k=2 \\ k=-1 \end{array}\right.$

$b^3-b^2-4=0$

$b^3-b^2-4 \mid b-2$

$b^3-2b^2 \qquad b^2+b+2$

$b^2-4$

$b^2-2b$

$2b-4$

# Черновик.

простыни

Делителей, кроме 3 и 5 быть не может

В каждом числе минимум $3^1$ и $5^1$

максимум $3^{15}$ и $5^{18}$

a b c

$3\,5$ $3^{15}\,5^{18}$ все что угодно

a b c

$3\,5^{18}$ $3^{15}\,5$ все что угодно

a b c

$3\,5^{18}$ $5$ $3^{15}$

все что угодно $\forall deg$

a b c

$3^{15}\,5$ $3$ $5^{18}$

$\forall deg$ $\forall deg$

$$\begin{array}{r} 15 \\ + \; 18 \\ \hline 120 \\ + \; 15 \\ \hline 270 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 269 \\ \times \; 6 \\ \hline 1614 \\ \times \; 6 \\ \hline 9684 \\ + \; 12 \\ \hline 9696 \end{array}$$