Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102520**

ID профиля: **854226**

Вариант 18

Чистовик. | вариант 18 | ①

№1.

$S = \frac{a_1 + a_7}{2} n = \frac{a_1 + a_1 + 6q}{2} 7 = 7a_1 + 21q$

$a_7 = a_1 + 6q \qquad a_9 = a_1 + 8q$

$a_{12} = a_1 + 11q \qquad a_{10} = a_1 + 9q$

$$\begin{cases} (a_1+6q)(a_1+11q) > \cancel{88} 20 + 7a_1 + 21q \\ (a_1+8q)(a_1+9q) < 7a_1 + 21q + 44 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 17a_1q + 66q^2 > 7a_1 + 21q + 20 \\ a_1^2 + 17a_1q + 72q^2 < 7a_1 + 21q + 44 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 17a_1q + 72q^2 < 7a_1 + 21q + 44 \\ -a_1^2 - 17a_1q - 66q^2 < -7a_1 - 21q - 20 \end{cases} (+)$$

$6q^2 < 24 \Rightarrow q^2 < 4 \Rightarrow q \in (-2; 2) \Rightarrow q \in \{-1; 0; 1\} \Rightarrow q = 1$, т.к. прогрессия↑

$$\begin{cases} a_1^2 + 17a_1 + 66 > 7a_1 + 21 + 20 \\ a_1 + 17a_1 + 72 < 7a_1 + 21 + 44 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0 \\ a_1 + 10a_1 + 7 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 \neq -5 \\ a_1 \in (-5 - 3\sqrt{2}; -5 + 3\sqrt{2}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 \neq -5 \\ a_1 \in (-10; 0) \end{cases}$$

$a_1 + 10a_1 + 7 = 0$

$a_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 28}}{2} = \frac{-10 \pm 2\sqrt{18}}{2} = -5 \pm 3\sqrt{2}$

$4 < 3\sqrt{2} < 5$, т.к. $16 < 18 < 25$

$-5 - 3\sqrt{2} > -10$

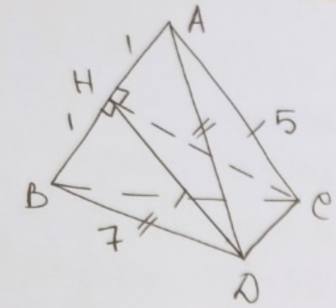
$-5 + 3\sqrt{2} < 0$

$a_1 \in \{ \cancel{-10}; -9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1 \}$

Ответ: $-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1$

Чистовик вариант 18 (2)

№2.

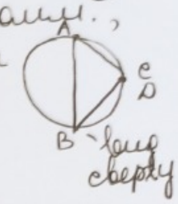


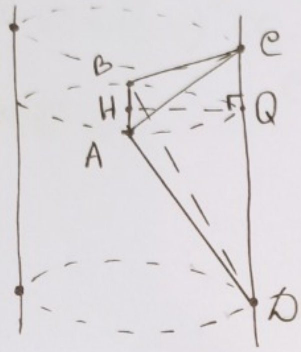
Проверим CH и DH – высоты в $\triangle ACB$ и $\triangle ADB$. Они будут и медианами (поделят AB пополам), т.к. тр-ки равнобедренные.

$AB \perp CH$, $AB \perp DH$, $CH \subset CHD$, $DH \subset CHD$, $CD \subset CHD$

Значит, $AB \perp CD$., $CD \parallel$ оси цилиндра $\Rightarrow AB \perp$ оси (*)

Тогда радиус цилиндра будет наим., когда AB перпендикулярно его боковой поверхности и является диаметром окружности цилиндра.

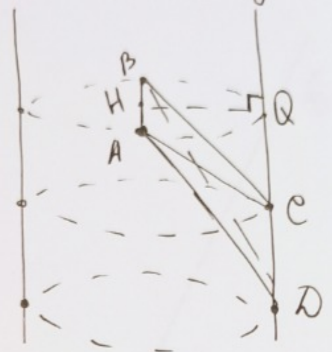




$CH = \sqrt{AC^2 - AH^2} = \sqrt{5^2 - 1^2} = \sqrt{24}$

$DH = \sqrt{AD^2 - AH^2} = \sqrt{7^2 - 1^2} = \sqrt{48}$

$HQ = \frac{AB}{2} = 1$ (половина диаметра)



$CD = CQ + QD = \sqrt{CH^2 - HQ^2} + \sqrt{DH^2 - HQ^2} = \sqrt{23} + \sqrt{47}$

$CD = QD - QC = \sqrt{47} - \sqrt{23}$

Ответ: $\sqrt{47} \pm \sqrt{23}$

(*) CD параллельно оси цилиндра $\Rightarrow$ CD лежит на боковой поверхности.

$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \leq 5 \\ a^2+b^2 \leq \min(4a-2b, 5)\end{cases}$ – ур-е круга с центром $(x;y)$ и $R=\sqrt{5}$

I случай: $5 < 4a-2b$ $\quad b < 2a-2,5$

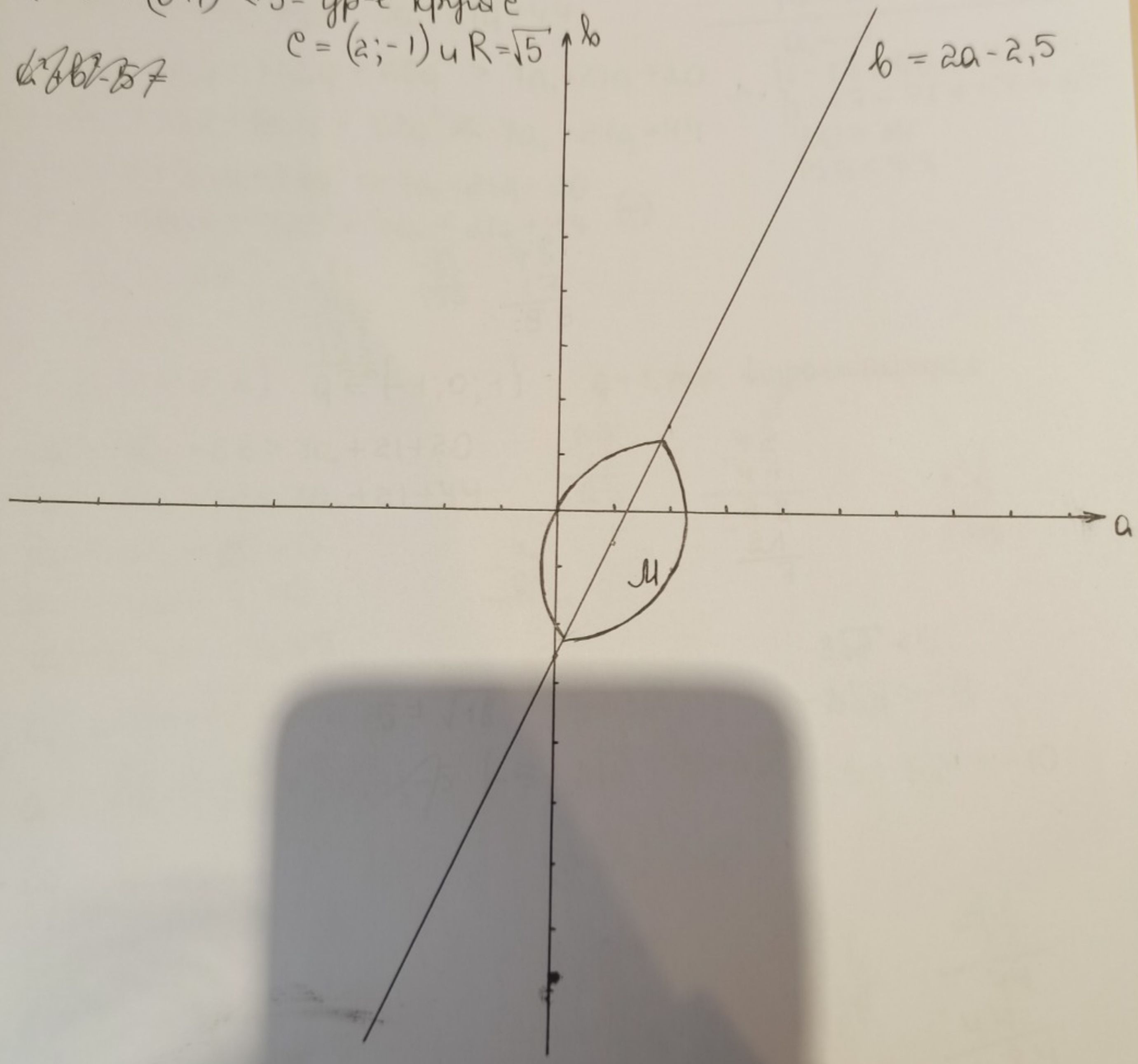
$a^2+b^2 \leq 5$ – ур-е круга с $C=(0;0)$ и $R=\sqrt{5}$

II случай: $5 \geq 4a-2b$ $\quad b \geq 2a-2,5$

$a^2+b^2 \leq 4a-2b$

$a^2-4a+4+b^2+2b+1 \leq 5$

$(a-2)^2+(b+1)^2 \leq 5$ – ур-е круга с $C=(2;-1)$ и $R=\sqrt{5}$



черновик.

$S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7$ №1.

$a_7 a_{12} > S + 20$

$a_9 a_{10} < S + 44$

$\boxed{a_1 - ?}$

$S = 7a_1 + 21q$

$S = \frac{a_1 + a_7}{2} \cdot 7 = \frac{a_1 + a_1 + 6q}{2} \cdot 7 = 7a_1 + 21q$

$a_7 = a_1 + 6q$ $a_9 = a_1 + 8q$

$a_{12} = a_1 + 11q$ $a_{10} = a_1 + 9q$

$\begin{cases} (a_1 + 6q)(a_1 + 11q) > 7a_1 + 21q + 20 \\ (a_1 + 8q)(a_1 + 9q) < 7a_1 + 21q + 44 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1^2 + 6a_1q + 11a_1q + 66q^2 > 7a_1 + 21q + 20 \\ a_1^2 + 8a_1q + 9a_1q + 72q^2 < 7a_1 + 21q + 44 \end{cases}$

$\begin{cases} -a_1^2 + 17a_1q + 66q^2 < -7a_1 - 21q - 20 \\ + a_1^2 + 17a_1q + 72q^2 < 7a_1 + 21q + 44 \end{cases}$ +

$6q^2 < 24$

$q^2 < 4$

$q \in (-2; 2)$ $q \in \{-1; 0; 1\}$ $q = 1$, т.к. возрастающая

$a_1 = -9$

$\begin{cases} 81 - 153 + 66 > -63 + 41 \\ 81 - 153 + 72 < -63 + 65 \end{cases}$

$\begin{cases} -6 > -22 \\ 0 < 2 \end{cases}$

$a_1 = -1$

$\begin{cases} 1 - 17 + 66 > -7 + 41 \\ 1 - 17 + 72 < -7 + 65 \end{cases}$

$\begin{cases} 50 > 34 \\ 56 < 58 \end{cases}$

$81 + 66 = 147$ $81 + 72 = 153$ $73 - 17 = 56$ $147 - 153 = -6$

$\begin{cases} a_1^2 + 17a_1 + 66 > 7a_1 + 21 + 20 \\ a_1^2 + 17a_1 + 72 < 7a_1 + 21 + 44 \end{cases}$

$66 - 41 = 25$ $72 - 44 = 28$ $28 - 21 = 7$ $17 \times 9 = 153$

$\begin{cases} a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0 \\ a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0 \end{cases}$

$72 - 65 = 7$

$(a_1 + 5)^2 > 0 \Rightarrow a_1 \neq 5$

$3\sqrt{2} < 5$

$-3\sqrt{2} > -5$

$a_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 7}}{1} = -5 \pm \sqrt{18} = -5 \pm 3\sqrt{2}$

$a_1 \in$ ~~$(-5 - 3\sqrt{2}; 5) \cup (5; -5$~~ $(-5 - 3\sqrt{2}; -5 + 3\sqrt{2})$ $-5 - 3\sqrt{2} > -10$

$(3\sqrt{2})^2 = 18$

$(a_1 + 5)^2 > 0$

24×24: $96 + 480 = 576$ 23×23: $69 + 460 = 529$ 22×22: $44 + 440 = 484$

Черновик.
№3.

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \leq 5 \\ a^2+b^2 \leq \min(4a-2b, 5)\end{cases}$$ – ур-е круга с центром в $(a;b)$ и $R=\sqrt{5}$

точка $(x;y)$ – фиксированная

$x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2 \leq 5$

$4a-2b<5 \quad 4a<5+2b$

$$\begin{cases}a^2+b^2 \leq 4a-2b \\ a^2+b^2 \leq 5-x^2+2ax+y^2+2by\end{cases} \quad a<1{,}25+0{,}5b$$

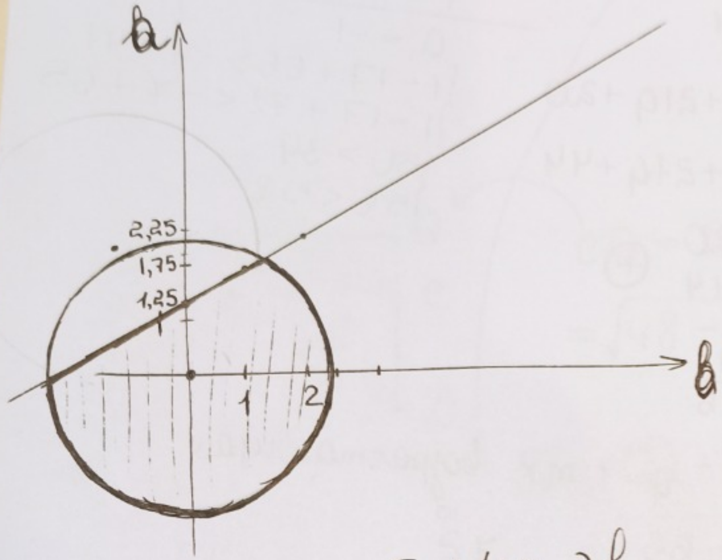
$2b>$

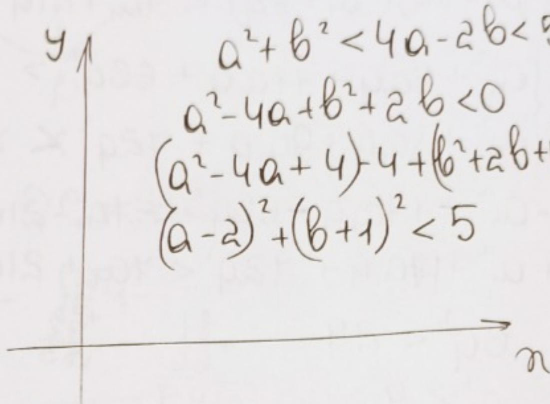
$5 \leq 4a-2b$

$a^2+b^2 \leq 5$

$\sqrt{5} \approx 2{,}3$

$(a-x)^2+(b-y)^2 \leq 5$





$a^2+b^2<4a-2b<5$

$a^2-4a+b^2+2b<0$

$(a^2-4a+4)-4+(b^2+2b+1)-1<0$

$(a-2)^2+(b+1)^2<5$

$5<4a-2b$

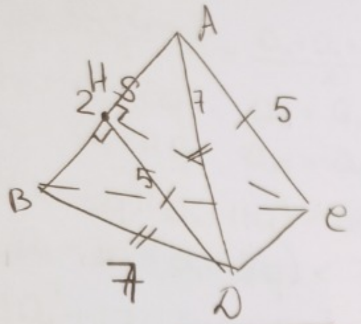
$2b<4a-5$

$b<2a-2{,}5$

21102520 (U854226 M1299877)

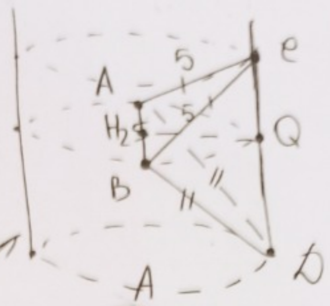
Черновик.

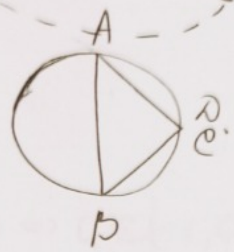
№2.

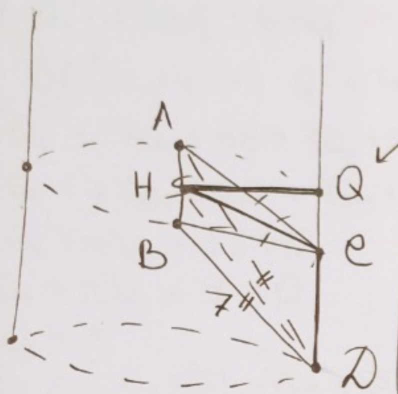


$DH = \sqrt{7^2 - 1^2} = \sqrt{48}$

$HC = \sqrt{5^2 - 1^2} = \sqrt{24}$







$CD = QD - QC = \sqrt{HD^2 - HQ^2} - \sqrt{HC^2 - HQ^2} =$

$= \sqrt{48 - 1} - \sqrt{24 - 1} = \sqrt{47} - \sqrt{23}$

$CD = CQ + QD = \sqrt{CH^2 - HQ^2} + \sqrt{DH^2 - HQ^2} =$

$= \sqrt{48 - 1} + \sqrt{24 - 1} = \sqrt{47} + \sqrt{23}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102520**

ID профиля: **854226**

Вариант 18

Чистовик | вариант 18 | ①

№2.

Пусть два числа равны a. Тогда третье равно $(a-1)$

Их произведение:

$$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)\cdot\log_{6x-14}(x-1)^2\cdot\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)=$$

$$=\frac{\ln(6x-14)\cdot 2\ln(x-1)\cdot 2\ln\sqrt{\frac{x}{3}+3}}{\ln\sqrt{\frac{x}{3}+3}\cdot\ln(6x-14)\cdot\ln(x-1)}=4$$

$$\boxed{\begin{array}{l}x>\frac{7}{3}\\ x\neq 2{,}5\end{array}}$$

Тогда:

$a^2(a-1)=4 \Rightarrow a^3-a^2-4=0$ $\quad (a-2)\underbrace{(a^2+a+2)}_{>0 \text{ при всех } a}=0$

$a=2 \Rightarrow$ третье число равно 1.

$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)=1$ или $\log_{6x-14}(x-1)^2=1$ или $\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)=1$

$6x-14=\sqrt{\frac{x}{3}+3}$

$36x^2-84x+196=\frac{x}{3}+3$

$108x^2-253x+195\cdot 3=0$

$108x^2-253x+885=0$

$D=253^2-432\cdot 885<0$

$\varnothing$

$(x-1)^2=6x-14$

$x^2-2x+1=6x-14$

$x^2-8x+15=0$

$\underline{x=3}$ или $\underline{x=5}$

$\frac{x}{3}+3=x-1$

$x+9=3x-3$

$2x=12$

$\underline{x=6}$

$\log_{\sqrt{\frac{3}{3}+3}}(6\cdot 3-14)=$

$=\log_2 4=2$

$\log_{3-1}\left(\frac{3}{3}+3\right)=$

$=\log_2 4=2$

$\log_{\sqrt{\frac{5}{3}+3}}(6\cdot 5-14)=$

$=\log_{\sqrt{\frac{14}{3}}}16$

$\log_{5-1}\left(\frac{5}{3}+3\right)=$

$=\log_4\frac{14}{3}$

$\log_{\sqrt{\frac{6}{3}+3}}(6\cdot 6-14)=$

$=\log_{\sqrt{5}}22$

$\log_{6\cdot 6-14}(6-1)^2=$

$=\log_{22}25$

Ответ: $x=3$

21102520 (U854226 M1299878)

чистовик. | вариант 18 |

②

№1.

НОД$(a;b;c)=15$

НОК$(a;b;c)=3^{15}\cdot5^{18}$

$x=\frac{a}{15}$; $y=\frac{b}{15}$; $z=\frac{c}{15}$

НОД$(x;y;z)=1$

НОК$(x;y;z)=3^{14}\cdot5^{17}$

тогда возможные тройки:

$\begin{cases}x=1\\y\,\vdots\,3^{14} & y\not\vdots\,5^{17}\\z\,\vdots\,5^{17} & z\not\vdots\,3^{14}\end{cases}$ или $\begin{cases}x=1\\y\,\vdots\,5^{17} & y\not\vdots\,3^{14}\\z\,\vdots\,3^{14} & z\not\vdots\,5^{17}\end{cases}$

$2\cdot14\cdot17$ вариантов

$\begin{cases}x=1\\y=3^{14}\cdot5^{17}\\z\neq1\end{cases}$ или $\begin{cases}x=1\\y\neq1\\z=3^{14}\cdot5^{17}\end{cases}$

$14\cdot17-1$ вариантов $14\cdot17-1$ вариантов.

всего для $x=1$ $\cancel{4}\cdot14\cdot17-2$ вариантов.

всего $1\cancel{2}\cdot14\cdot17-6$ вариантов $+$ 3 варианта (x, y или $z=3^{14}\cdot5^{17}$, остальные 1).

Ответ: ~~2142~~ ~~3856~~ $3853+62\cdot3$

$x=5^{17}$

$y=3^{14}$

$z=3^{k}$ или $z=5^{n}$

14 вар.   17 вар.

$14+17=31$

62

21102520 (U854226 M1299878)

черновик.

№2.

$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)=1$

$6x-14=\sqrt{\frac{x}{3}+3}$

$36x^2-84x+196=\frac{x}{3}+3$

$108x^2-253x+193=0$

$D=253^2-4\cdot108\cdot193$

$D<0$

$$\begin{array}{r} \times\ 195 \\ 3 \\ \hline 885 \end{array}$$

НОД$(3;6;9)=3$

НОК$(3;6;9)=18$

НОД$(1;2;3)=1$

НОК$(1;2;3)=6$

$\log_{6x-14}(x-1)^2=1$

$x^2-2x+1=6x-14$

$x^2-8x+15=0$

$x_1=3 \quad x_2=5$

$x=3$:

$\log_{\sqrt{\frac{3}{3}+3}}(6\cdot3-14)=$

$=\log_2 4=2$

$\log_{3-1}\left(\frac{3}{3}+3\right)=$

$=\log_2 4=2$

$x=5$:

$\log_{\sqrt{\frac{5}{3}+3}}(6\cdot5-14)=$

$=\log_{\sqrt{\frac{14}{3}}}16$

$\log_{5-1}\left(\frac{5}{3}+3\right)=\log_4\frac{14}{3}$

$\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)=1$

$x-1=\frac{x}{3}+3$

$3x-3=x+9$

$2x=12$

$x=6$

$\log_{\sqrt{\frac{6}{3}+3}}(6\cdot6-14)=$

$=\log_{\sqrt{5}}22$

$\cancel{\log_{6-1}\frac{6}{3}}$

$\log_{36-14}(6-1)^2=\log_{22}25$

$\log_{\sqrt{\frac{14}{3}}}16=\log_4\frac{14}{3}$

$\frac{\ln 16}{\ln}$

21102520 (U854226 M1299878)

Черновик.

№2.

$\frac{x}{3}+3>0$ $\quad$ $6x-14>0$ $\quad$ $x-1>0$

$\frac{x}{3}+3\neq 1$ $\quad$ $6x-14\neq 1$ $\quad$ $x-1\neq 1$

$x>-9$ $\quad$ $x>\frac{7}{3}$ $\quad$ $x>1$

$x\neq -6$ $\quad$ $x\neq \frac{5}{2}$ $\quad$ $x\neq 2$

$$\begin{array}{r} \times\, 238 \\ 12 \\ \hline +\,476 \\ 238 \\ \hline 3856 \end{array}$$

3 5
3 5
3 5
3 5
3 5
3 5
3 5
3 5
3 5
3 5
3 5
3 5
3 5
3 5

~~Черновик~~ ~~Чистовик~~ ~~Вариант 18~~

№1.

НОД$(a;b;c)=15$
НОК$(a;b;c)=3^{15}\cdot5^{18}$

Пусть $a=15x$, $b=15y$, $c=15z$. Тогда:
НОД$(x;y;z)=1$
НОК$(x;y;z)=3^{14}\cdot5^{17}$

У x, y и z не может быть общих делителей. Тогда мы можем рассматривать только тройки, состоящие из чисел $1;3^{14};5^{17}$ или $1;1;3^{14}\cdot5^{17}$

$\frac{3!}{1!1!1!}=6$ $\frac{3!}{2!1!}=3$

Ответ: 9

~~x~~$=1$ ~~y~~ – $14\cdot17$ вариантов

$x=1$ $y:3^{14}$ $z:5^{17}$ или $x=1$ $y\div3^{14}\cdot5^{17}$ или $x=1$ $z:3^{14}\cdot5^{17}$

17 вар. $\cdot$ 14 вар. z $14\cdot17$ вар. y $14\cdot17$ вар

$5^k\cdot3^{14}$ $3^n\cdot5^{17}$ $3^n\cdot5^k$

$k<17$ $n<14$ $n<14$ $k<17$

$$\begin{array}{r} \times\ 14\\ 17\\ \hline 98\\ +\ 14\ \\ \hline 238 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\ 14\\ 17\\ \hline 28\\ +\ 7\ \\ 14\ \ \\ \hline 238 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\ 238\\ 9\\ \hline 72\\ 27\ \\ 18\ \ \\ \hline 2142 \end{array}$$

21102520 (U854226 M1299878)

Черновик

№ 1.

НОД(a; b; c) = 15

НОК(a; b; c) = $3^{15} \cdot 5^{18}$

a ⋮ 15; b ⋮ 15; c ⋮ 15

a = 15x; b = 15y; c = 15z,

где x, y и z не имеют общих делителей.

на ~~3~~5 делится только одно число из x y z

на 75 делится только одно число из x y z

НОД(x; y; z) = 1

НОК(x; y; z) = $3^{14} \cdot 5^{17}$

одно из них равно $3^{14} \cdot 5^{17}$

два из них равны 3^{14} и 5^{17}

$\frac{3!}{1! \cdot 2!} = 3$ тройки

$\frac{3!}{1! \cdot 1! \cdot 1!} = 6$ троек

Ответ: 9

НОД(a; b; c) = 6

НОК(a; b; c) = $2^{3} \cdot 3^{4}$

c = 1 a – 31 вариант

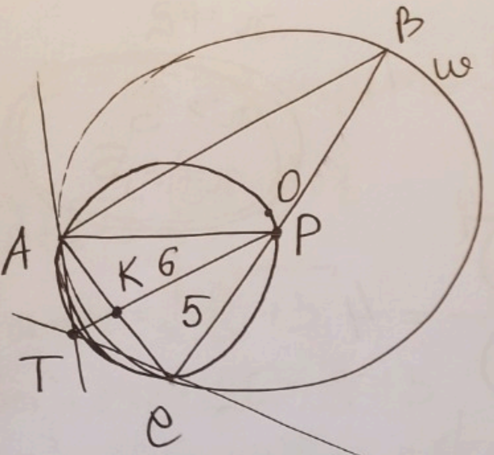
b – тоже

$31 \cdot 31 \cdot 3 =$

$= (930 + 31) \cdot 3 =$

$= 961 \cdot 3$

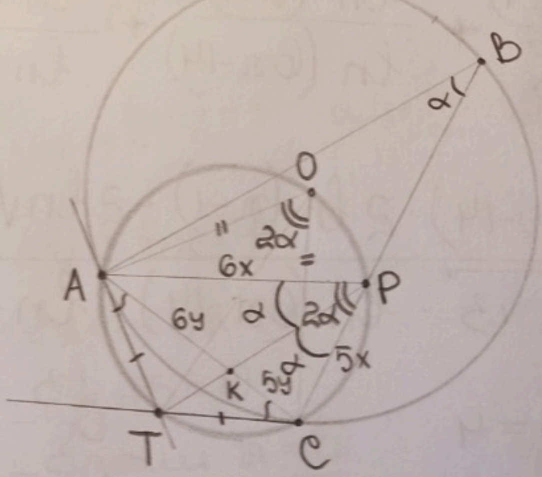
№ 3.



$S_{APK} = 6$

$S_{CPK} = 5$

AK : KC = 6 : 5



$$S_{APK} : S_{CPK} = \frac{AP \cdot PK}{PK \cdot PC} = \frac{AP}{PC} = \frac{6}{5}$$

21102520 (U854226 M1299878)

Черновик.
з.2.

$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)$ $\log_{6x-14}(x-1)^2$ $\log_{x-1}(\frac{x}{3}+3)$

$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)=\log_{6x-14}(x-1)^2=\log_{x-1}(\frac{x}{3}+3)+1$

$\log_{x-1}(\frac{x}{3}+3)(x-1)$

$$\frac{\ln(6x-14)}{\ln\sqrt{\frac{x}{3}+3}}=\frac{\ln(x-1)^2}{\ln(6x-14)}$$

$$\boxed{\begin{array}{lll} \frac{x}{3}+3>0 & 6x-14>0 & x-1>0 \\ \frac{x}{3}+3\neq 1 & 6x-14\neq 1 & x-1\neq 1 \end{array}}$$

$x>-9$
$x\neq -6$
$x>\frac{7}{3}$
$x\neq 2,5$
$x>1$
$x\neq 2$

$x>\frac{7}{3}$
$x\neq 2,5$

$$\frac{\ln(6x-14)}{\ln\sqrt{\frac{x}{3}+3}}\cdot\frac{\ln(x-1)^2}{\ln(6x-14)}\cdot\frac{\ln(\frac{x}{3}+3)}{\ln(x-1)}=$$

$$=\frac{\ln(6x-14)\cdot 2\ln(x-1)\cdot 2\ln\sqrt{(\frac{x}{3}+3)}}{\ln\sqrt{\frac{x}{3}+3}\cdot\ln(6x-14)\cdot\ln(x-1)}=4$$

$a^2(a-1)=4$
$a^3-a^2-4=0$
$a_1=2$
$(a-2)\underbrace{(a^2+a+2)}_{>0 \text{ при всех } x}=0$

$$\begin{array}{r|l} a^3-a^2-4 & a-2 \\ -\;a^3-2a^2 & a^2+a \\ \hline a^2-4 & \\ -\;a^2-2 & \\ \hline 2 & \end{array}$$

	1	-1	0	-4
2	1	+1	+2	0

$14 \times 6 = 84$

14×14: 56, $+14$, $= 186$

~~$a^2a^2a^2a^2a=1$~~

2 ; 2 ; 1

$84 \times 3 = 252$

$36 \times 3 = 108$

253×253: 759, $+1265$, 506, $= 64009$

432×193: 1296, $+3888$, 432, $= 83376$

21102520 (U854226 M1299878)