Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102496**

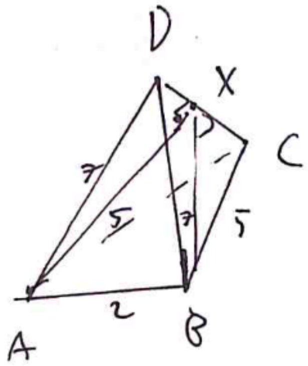
ID профиля: **322830**

Вариант 18

№2.

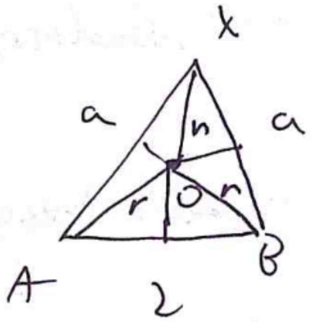
Чистовик Лист 1 из 7

№2.



1) $AB \perp CD$ т.к. $\triangle ADB$ и $\triangle ACB$ – р/б $\Rightarrow$ CD лежит на плоск., явл. ГМТ равноуд. от A и B, а эта плоск. $\perp AB \Rightarrow CD \perp AB$

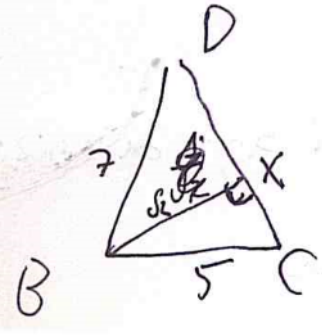
Пусть X - основание высоты из A и B в CD. Т.к. CD ∥ оси цил., плоскость AXB ⊥ этой оси. Т.к. A, B, CD лежат на цилиндре и AXB ⊥ оси цил., окружность описанная вокруг AXB является окруж. основания цилиндра.



Тогда по нер-ву треугольника в $\triangle AOB$ $r+r \geq 2 \Rightarrow r \geq 1 \Rightarrow$

$r_{min}=1$ (и в этом случае O лежит на сер. AB) $\Rightarrow$

$\triangle AXB$ – прямоуг. $\Rightarrow AX = XB = \sqrt{2}$

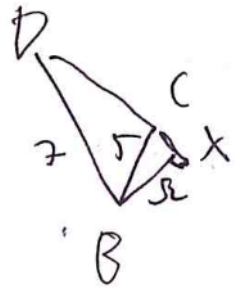


$CD = DX + XC = \sqrt{47} + \sqrt{23}$.

Чистовик Лист 2 из 7

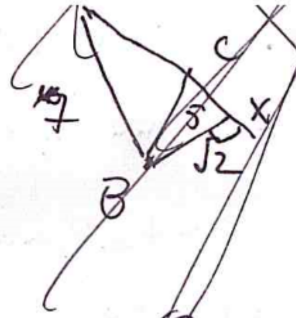
№2.

Или Или



$CD = DX - CX = \sqrt{47} - \sqrt{23}$

Ответ: $\sqrt{47}+\sqrt{23}$; $\sqrt{47} - \sqrt{23}$.



Ответ: $\sqrt{42}-\sqrt{23}$, $\sqrt{47}+\sqrt{23}$

Чистовик Лист 3 из 7

№1.

Пусть $a_1=a; a_2=a+d$ Тогда

$$a_i = a+(i-1)d$$

$$S = a+\dots+(a+6d) = 7a+21d.$$

$$a_7 a_{12} = (a+6d)(a+11d) = a^2+17ad+66d > 7a+21d+20$$

$$a_9 a_{10} = (a+8d)(a+9d) = 17ad+a^2+72d < 7a+21d+44.$$

$$a^2+17ad-7a-21d = t$$

$$44-72d > t > 20-66d$$

$$24 > 6d$$

$d<4 \Rightarrow$ т.к. $d>0$, $d=1;2;3.$

Рассм. 3 случая

Чистовик Лист 4 из 7

№1

1) $d=3$.

$$a^2 + a(12d-7) + (45d-20) > 0.$$

$$a^2 + 44a > -115$$

$$a^2 + a(12d-7) + (51d-44) < 0.$$

$$a^2 + 44a < -133$$

$$a \in \mathbb{Z}$$

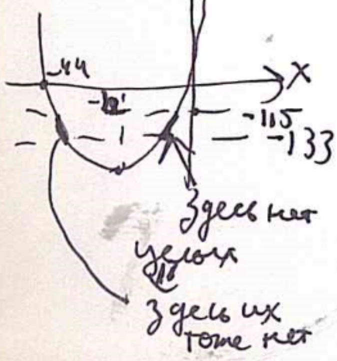
При $a=-2$ $a^2+44a = -84 > -133$

При $a=-3$ $a^2+44a = -123 < -133$

-115

$\Downarrow$

При $a > -2$ нет корней



При $a < -3$ нет корней ~~(т.к. при всех остальн~~
(т.к. все значения при $a < -22$ зеркально равны значениям при $a > -22$, а при $a > -22$ нет решений).

2) ~~$d=3$~~

№1

2) $d=2$.

$$\begin{cases} a^2+27a+70>0 \\ a^2+27a+58<0 \end{cases}$$

$-58 > a^2+27a > -70.$

При $a=-2$ $a^2+27a=-50>-58$

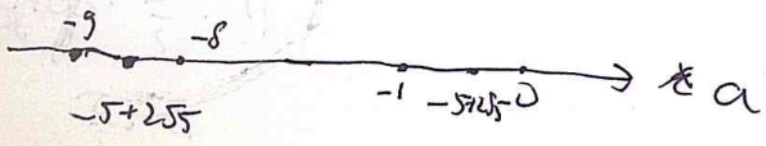
При $a=-3$ $a^2+27a=-72<-70$

Потом же сообр. нет целых корней

3) $d=1$.

$$\begin{cases} a^2+10a+25>0 \\ a^2+10a+5<0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\neq-5 \\ a^2+10a+5<0 \end{cases}$$

$$a=\frac{-10\pm4\sqrt{5}}{2}=-5\pm2\sqrt{5}$$



Подх. $a=-1;-2;-3;-4;-6;-7;-8$

Ответ: $-1;-2;-3;-4;\cancel{-5};-6;-7;-8$

Чистовик Листок из 7

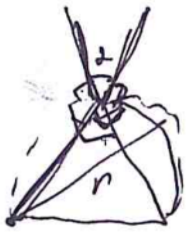
№3.

Нарисуем все $(a;b)$ такие, что

$$a^2+b^2 \le \min(4a-2b, 5)$$

1) $4a-2b<5$

$$\begin{cases}(a-2)^2+(b+1)^2 \le 5\\ b>2a-\frac{5}{2}\end{cases}$$



2) $4a-2b>5$

$$\begin{cases}a^2+b^2\le 5\\ b<2a-\frac{5}{2}\end{cases}$$

Очев., $O_1O_2 \perp$ ~~$b=2a-\frac{5}{2}$~~, $y=2x-\frac{5}{2}$

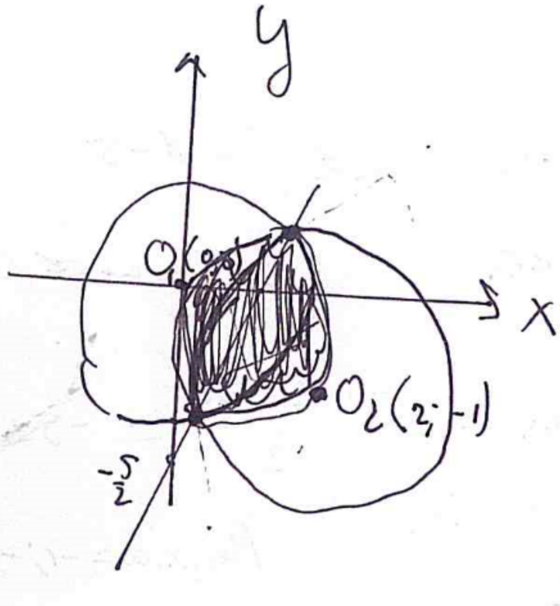
(т.к. коэфф. $=-\frac{1}{2}$) и

сер. O_1O_2 лежит

на ~~$b=2a-\frac{5}{2}$~~ $y=2x-\frac{5}{2}$

(т.к. эта сер. $=\left(1;-\frac{1}{2}\right)$.

$-\frac{1}{2}=2-\frac{5}{2}$).



$\frac{40}{3}+\frac{5}{3}=\frac{45}{3}=$

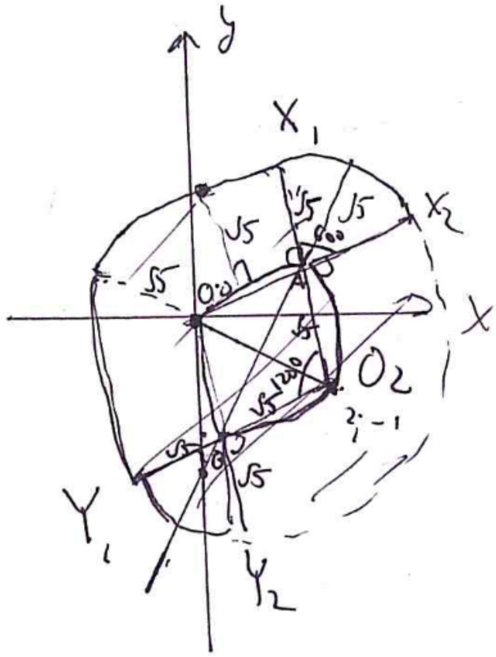
$\pi \cdot \frac{2}{...} \cdot 20+$ ~~...~~

21102496 (U322830 M1303386)

Чистовик Лист 7 из 7

№3

Тогда $S_{фиг}$ наша M имеет вид



$$S_M = S_{сект\, X_1 O_2 y Y} + S_{сект\, O_1 X_2 Y_2} -$$

$$- S_{ABO_1O_2} + S_{сект\, A X_1 X_2} + S_{сект\, B Y_1 Y_2} =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot (2\sqrt{5})^2 -$$

$$- 2\left(\frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}\right) +$$

$$+ \frac{1}{3} \pi \cdot (\sqrt{5})^2 =$$

$$= 15\pi - \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

2) $d=2$.

$$\begin{array}{r}\times 17\\ 3\\ \hline\end{array} \qquad \begin{array}{r}\times 17\\ 3\\ \hline 51\\ -\ 7\\ \hline 44\end{array}$$

$S = 7a + 42\cancel{d}$

$a^2 + 34d + 132 > 7a + 62$ $\qquad 7.10$

14.5

3) $d=3$

$a^2 + 44d \cancel{>} -115$

41

-133

$-9 < -5+255$

$4 < 255$

$a^2 + 27d + 70 > 0.$

$\cancel{(a+...)}$ $\quad 27\cdot 27 - 70\cdot 4$ $\quad \begin{array}{r}66\\ -21\\ \hline 5\end{array}$

$a^2 + a(17d-7) + (45d-20) > 0.$

$72d - 21d = 51d$

$\begin{array}{r}100\\ -42\\ \hline 58\end{array}$

$a^2 + 34d + 144 < 7a + 42 + 44$

$51\cdot 3 = 153$

$a^2 + 27a + 58 < 0.$ $\quad 45\cdot 3 = 135$

$a^2 + 27a + 70 > 0.$

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 5\\[2em] a^2+b^2\le \min(4a-2b;\,5)\end{cases}$$

$115=5\cdot 23$

$a^2+44a+115>0$

1) $4a-2b<5$

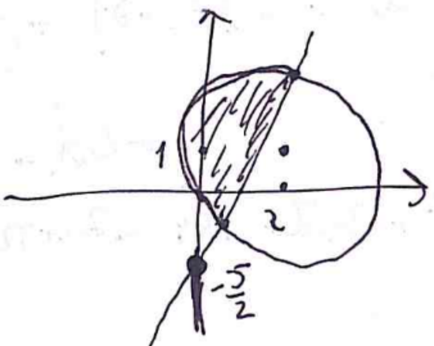
$a^2+44a\cancel{t}+133<0$.

$a^2+b^2\le 4a-2b$.

$(a-2)^2+(b-1)^2\le 5$.

$b>2a-\frac{5}{2}$

$-1;\,-2;\,-3;\,-4$



$-5+2\sqrt5>-1$

$4<2\sqrt5$

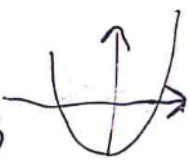
2) $4a-2b\ge 5$

$b\le 2a-\frac{5}{2}$

$a^2+b^2\le 5$

a^2+44a

$41\cdot 3$



$-4 \quad -\cancel{3} \quad -\cancel{2} \quad -\cancel{1} \quad \cancel{0} \quad \cancel{1} \quad \cancel{2} \quad \cancel{3} \quad 4 \quad 5 \quad \cancel{6} \quad \cancel{7}$

$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \quad a_6 \quad a_7 \quad a_8 \quad a_9 \quad a_{10} \quad a_{11} \quad a_{12}$

$a_1 = -7. \qquad a_2 = -6$

$\cancel{a_7 a_{12} = 6} \qquad a_7 a_{12} = 14 > 20 - 7$

$-7 \quad -6 \quad -5 \quad -4 \quad -3$

$\cancel{6 > 20 - 7} \qquad -4 \cdot 7 + 21 = -7$

$-7 \quad -6 \quad -5 \quad -4 \quad -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4$

$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \quad a_6 \quad a_7 \quad a_8 \quad a_9 \quad a_{10} \quad a_{11} \quad a_{12}$

$a_7 a_{12} = -4 \qquad S = 7a + 21d =$

$= 7 \cdot (-7) + 21 =$

$-4 > -26 + 20 \qquad = -49 + 21 = -26$

$-4 > -6$

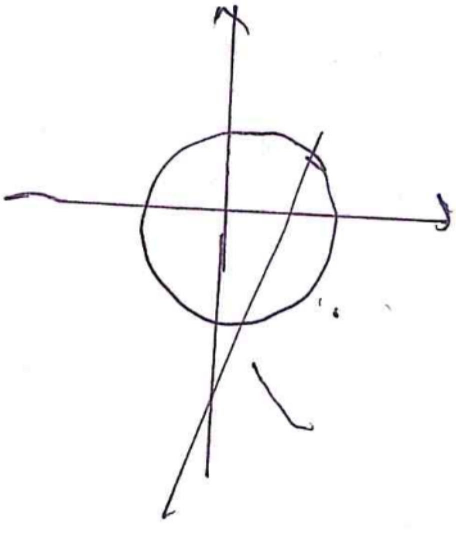
$\cancel{a_8}\ \cancel{a_2} \quad a_9 a_{10} = 2 < 44 - 26$

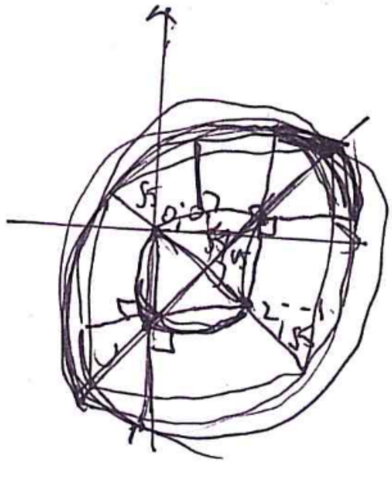
$\cancel{7} + 10(-7) + 5$

$2 > \cancel{44}$

2.7.7

21102496 (U322830 M1303386)





$x^2+y^2=5$

$y=2x-\frac{5}{2}$

$x^2+4x^2+\frac{25}{4}-10x=5$

$5x^2-10x+\frac{5}{4}=0.$

$x^2-2x+\frac{1}{4}=0$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102496**

ID профиля: **322830**

Вариант 18

Чистовик Лист 1 из 2

№ 2.5

$$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14) = 2\log_{(\frac{x}{3}+3)}(6x-14) = a.$$

такие преоб. возм. т.к. $x-1>0$ и $\frac{x}{3}+3>0$ из 3 логарифма

$$\log_{6x-14}(x-1)^2 = 2\log_{(6x-14)}(x-1) = в.$$

$$\log_{(x-1)}\left(\frac{x}{3}+3\right) = c.$$

$$a \cdot в = 4 \cdot \log_{\frac{x}{3}+3}(x-1)$$

$$aвc = 4$$

Пусть двое равны t, а третье равно $t-1$.

$$t^2(t-1)=4.$$

$$t^3-t^2-4=0$$

$$(t-2)(t^2+t+2)=0$$ $D<0 \Rightarrow$ нет корней

$\Downarrow$

$$t=2.$$

Чистовик. Лист 2 из 7

№ ~~4~~.5

Заметим, что либо a, либо c равно 6.

Пусть $a=6$.

$$2\log_{(\frac{x}{3}+3)}(6x-14)=2$$

$$\frac{x}{3}+3=6x-14$$

$$x=3.$$

Пусть $c=6$.

$$\log_{(x-1)}\left(\frac{x}{3}+3\right)=2$$

$$x^2-2x+1=\frac{x}{3}+3 \quad \Big| \cdot 3$$

$$3x^2-7x+6=0.$$

$$(3x+2)(x-3)=0.$$

Т.к. $x-1>0$, подх. $x=3$

~~Подставим $x=3$~~
~~Значит, нам может подх. только $x=3$ (т.к. и a, и c дали такой рез-т) при $x=3$~~
~~$2\log_{(\frac{x}{3}+3)}(6x-14)=2$~~
~~$2\log_4 2=1$~~
~~$\log_4 4=1$~~

21102496 (U322830 M1303387)

Чистовик

Лист 3 из 7

№5

Т.к. a, и c дали рез-т $x=3$, подх. только он. При $x=3$

$a=2$; $b=1$; $c=2$.

Ответ: 3.

Чистовик

Лист 4 из 7

№4

$$НОД(a,b,c)=15$$

$\Downarrow$

$a=15x$

$b=15y$

$c=15z$

$$НОД(x,y,z)=1$$

$\Downarrow$

$$НОК(a,b,c)=15xyz$$

$\Downarrow$

$$xyz=3^{14}\cdot 5^{17};\ НОД(x,y,z)=1$$

$\Downarrow$

Каждая из 3 или 5 может входить как прост. дел. Только в 2 из 3 чисел.

выбрать в тех 2-х распред. по степеням

Кол-во спос. – $C_3^2\cdot C_3^2\cdot 17\cdot 14=2142$

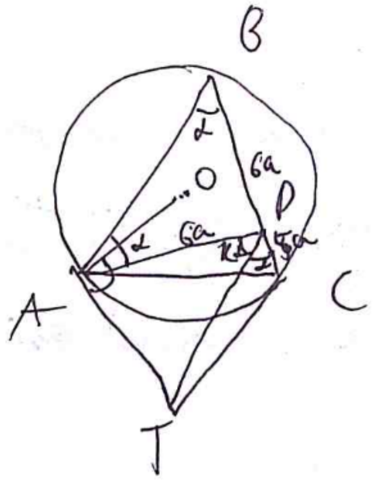
выбрать по 2 переменные, каждая в кот. будут вход.

Ответ: 2142

~~вариантов~~

21102496 (U322830 M1303387)

№ 6.



а) $\angle ABC = \alpha$. Тогда

$\angle AOC = 2\alpha \Rightarrow \angle APC = 2\alpha$

т.к. $AOPC$ – впис. 4-уг.

~~$\angle ATC = 360° - \angle TA$~~

$AOCT$ – впис. 4-уг.

т.к. $\angle TAO + \angle TCO = 90° + 90° = 180° \Rightarrow$

$ATCP$ – впис. 4-уг. $\Rightarrow \angle TAC = \angle TPC = \alpha$

($\angle TAC = \alpha$ как угол касат.)

$\Downarrow$

PT – бис. $\angle APC$.

$\frac{AK}{KC} = \frac{6}{5}$ т.к. $\frac{S_{AKP}}{S_{CPK}} = \frac{\frac{h \cdot AK}{2}}{\frac{h \cdot CK}{2}} = \frac{AK}{CK}$.

Т.к. $\angle KPC = \angle ABC = \alpha$, $PT \parallel AB \Rightarrow \triangle KPC$ и $\triangle ABC$ – подоб.

(коэф. подобия $= \frac{CK}{AC} = \frac{5}{11}$). $\frac{S_{ABC}}{S_{KPC}} = \left(\frac{11}{5}\right)^2 = \frac{121}{25}$

21102496 (U322830 M1303387)

№6

$S_{ABC} = 5 \cdot \frac{121}{25} = \frac{121}{5}$

б) $\angle BAP = \angle PAT = \alpha$ (как углы при парал. прямых).

Пусть $PC = 5a$. Тогда т.к. PK - бис. и $\frac{AK}{KC} = \frac{6}{5}$

$\frac{AP}{PC} = \frac{6}{5}$ по св-ву бис. $\Rightarrow$

$AP = 6a$

$\Downarrow$

$PB = 6a$ т.к. $\triangle APB$ — р/б.

$S_{APC} = \frac{6a \cdot 5a}{2} \cdot \sin 2\alpha =$

универс. ~~подстановка~~ замена

$= \cancel{6a \cdot 5a}\ 15a^2 \cdot \frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha} = 12a^2 = 11.$

$a = \sqrt{\frac{11}{12}}.$

Чистовик

Лист 7 из 7

№6

По т. косинусов

$$AC = \sqrt{36a^2 + 25a^2 - 2\cdot 30a^2 \cdot \cos 2\alpha} =$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} = \frac{3}{5}$$

универс.
замена

$$= 5a.$$

Ответ: $5\sqrt{\frac{11}{12}}$

Чистовик / лист

№5

–3 потому что варианты

$1 \quad 3^{14} \quad 5^{17}$ и $1\ 3^{14}\ 5^{17}$, а также

$3^{14}\ 1\ 5^{17}$ и $3^{14}\ 1\ 5^{17}$

$1 \quad 3^{14} \quad 5^{17}$

21102496 (U322830 M1303387)

$a; b; c$ $\frac{9}{126}$ 882 $\times 14$ $\times 9$ 1 15 1

126   $a = 15x$ $1\ 3\ 5^2$

НОД$(a; b; c) = 15$ 1142 $b = 15y$

$c = 15z$ 135   9

НОК$(a,b,c) = 3^{15} \cdot 5^{18}$ 1 1 15

1 15 1 $1\ 3\ 3\cdot 5^2$

1 3 5   1 3 5   15 1 1

5 3 1   1 5 3   НОК$(a,b,c) = 15xyz$ $1\ 3\cdot 5^2\ 3$

3 5 1

$1\ 3\ 5^{3\ 1\ 5}$ $15xyz = 3^{15} \cdot 5^{18}$ $1\ 3\cdot 5\ 3\cdot 5$

$xyz = 3^{14} \cdot 5^{17}$ $3^2\ 5^2$

3 1 1 15   3 по 1 и 5 по 1 $3^{14}\ 5^{17}$

1 3 15 1

3 5 $\left(C_3^1 \cdot C_3^1\right)$ 1   1 16

5   2 15

⋮

$9 \cdot 1 \cdot 1$ 3 по 1 и 5 по 2   3 5   16 1

$1\ 3^{14}\ 5^{17}$ $C_3^1 \cdot C_3^2 \cdot 16$ $1|3|3\cdot 5^2$ $1|5|3^2\cdot 5$

3 по 2 и 5 по 1 $9\left(13\cdot 16 + 13 + 16 + 1\right)$

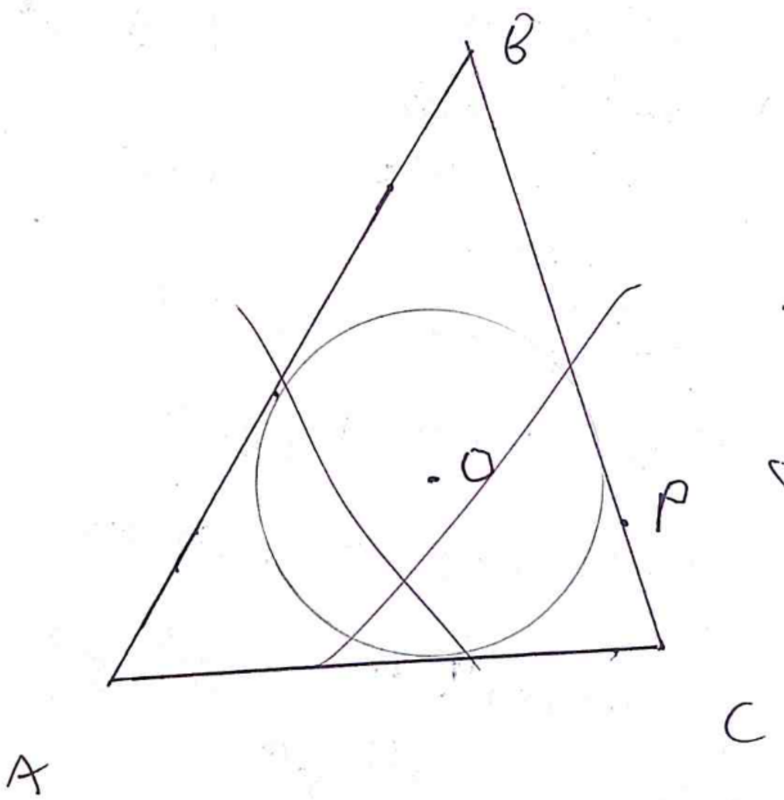
$C_3^1 \cdot C_3^2 \cdot 13$

$1\ 3^{14}$ 5^{17} 1 15   3 1   5   5 3 $x\ y\ z$

3 по 2 и 5 по 2

$C_3^2 \cdot C_3^2 \cdot 13 \cdot 16$ 1 15   5 1   3

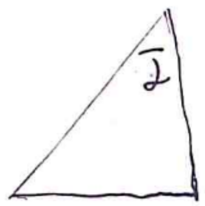
N 6.



$S = \frac{a \cdot b \sin\alpha}{2}$

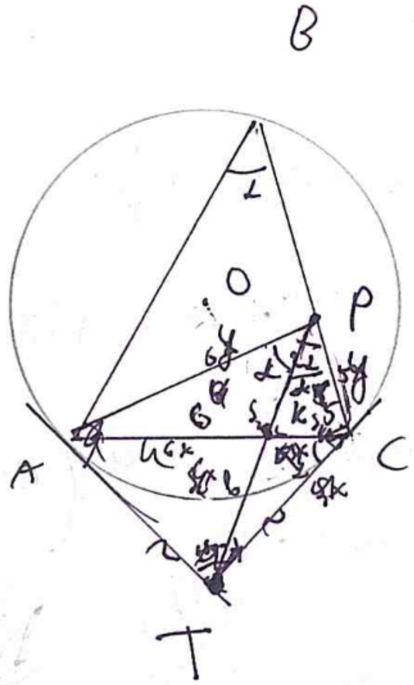
$tg\,\alpha = \frac{1}{2}$

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{2}$



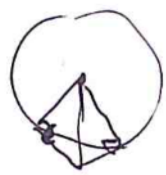
$\frac{1}{\cos^2\alpha} = tg^2\alpha + 1$

$\cos^2\alpha = \frac{1}{tg^2\alpha+1} = \frac{1}{\frac{1}{4}+1} = \frac{4}{5}$



$S_2 = \frac{121}{5}$

$S = \frac{121}{5}$



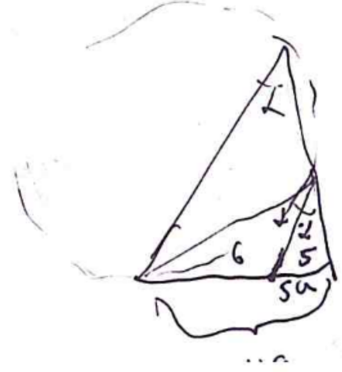
$\sin^2\alpha = \frac{1}{5}$

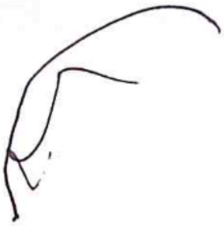
$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\frac{S_1}{S_2} = \frac{25}{121}$

$\frac{121}{5}$

$S = \frac{AC \cdot h}{2}$





135^2

$1\ 3\ 5^2$

$1\ 5^2\ 3$

$5^2\ 1\ 3$

$5^2\ 3\ 1$

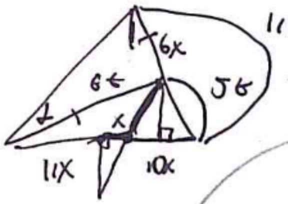
$3\ 1\ 5^2$

$3\ 5^2\ 1$

$6x$

$S = \frac{121}{5}$

(18)

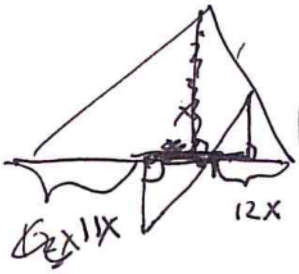


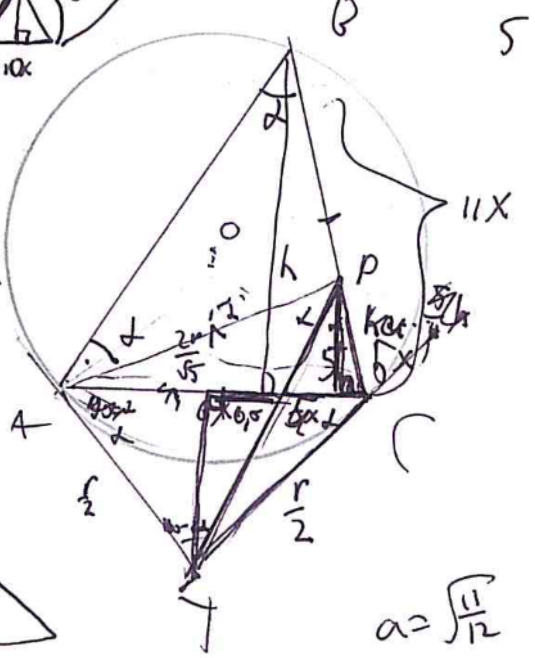
5 5 3 - единств

1751

7511

1175



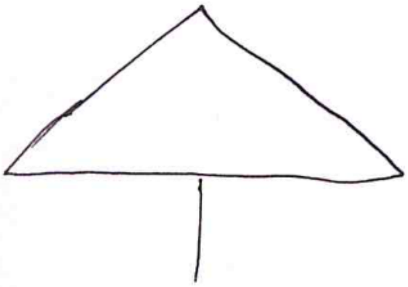


(15 ; 5 ; 1) - единств

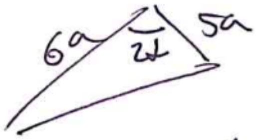
6+6+3

$R = \frac{4S}{4abc}$

$R = \frac{abc}{4S}$

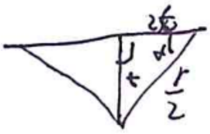


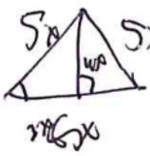
$a = \sqrt{\frac{11}{12}}$

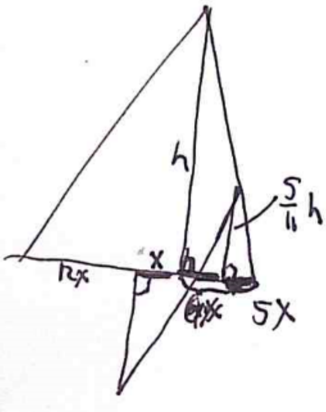


$2R = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{abc}{\sin 2bc} =$

$= ab$







$2t = \frac{r}{\sqrt5}$

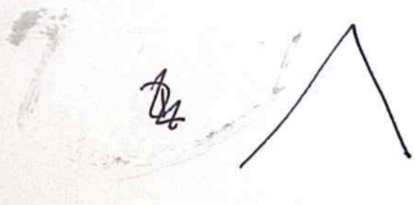
$4t = \frac{2r}{\sqrt5}$

$5t^2 = \frac{r^2}{4}$

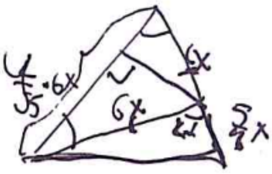
$15a^2 \cdot \frac{4}{5} = 12a^2$

$t = \frac{r}{2\sqrt5}$

$2\sin\alpha\cos\alpha = 2\cdot\frac{1}{\sqrt5}\cdot\frac{2}{\sqrt5} = \frac{4}{5}$



$\frac{1 - tg^2\alpha}{1 + tg^2\alpha}$



$2\cdot\frac{1}{2}$

$11 = \cancel{65}\,6x\cdot 5x\cdot \sin 2\alpha$

21102496 (U322830 M1303387)

$a=b;\ c=a\cancel{+1}$ $\cancel{ab}=\cancel{7}$

$a^2(a\cancel{+1})=4$ $abc=4$

$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)$

a

$a^3\cancel{+}a^2=4$ $2\log_{(\frac{x}{3}+3)}(6x-14)$

b

$\log_{(6x-14)}(x-1)^2$ $a^3a^2-4=0$ $2\log_{(6x-14)}(x-1)$

$\cancel{a}$ $\cancel{2}$

$\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)$ $\log_{(x-1)}\left(\frac{x}{3}+3\right)$

c

$a=2$ $(a-2)(a^2+a+2)=0.$ $\log_a b\cdot\log_b c=\cancel{\frac{\log_c}{\log_a}}\log_a c$

$a=2$

$\log_a b$

$a^{\log_a b}=b$

$\log_{a^2}b$

$\log_2 4\cdot\log_4 16=\log_2 16$ $(a^2)^{\log_{a^2}b}=b$

$\begin{matrix} \| & \| & \| \\ 2 & 2 & 4 \end{matrix}$ $a^{2\log_{a^2}b}$

$\log_{a^2}b=\frac{\log_a b}{2}$

21102496 (U322830 M1303387)

$2\log_{\left(\frac{x}{3}+3\right)}(6x-14)=2$

$\frac{x}{3}+3=6x-14$

$6x-14=x-1$

$8, \frac{8}{5}, \frac{8}{5}$

$\log_a 6=1$

$x+9=18x-42$

$17x=51$

$a^2=6$

$\frac{x}{3}+3=$

$\frac{13}{3}, \frac{8}{13}$

$x=3$

$x=\frac{13}{5}$

$\frac{13}{15}+3=$

$2\log_{(6x-14)}(x-1)=2$

$6x-14=x-1$

$3x^2-7x-6=0.$

$x=\frac{13}{5}$

$(3x+2)(x-3)=0.$

$(x-1)^2=\frac{x}{3}+3$

$x=3$

$\frac{13}{5}$

$a^2=6$

$x^2-2x+1=\frac{x}{3}+3$

$\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)=2$

2.2