Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102404**

ID профиля: **848733**

Вариант 18

№1 Вариант 18 Чистовик

$a_7 a_{12} > S+20$ Найти возможные a_1

$a_9 a_{10} < S+44$

$a_7 = a_1+6d$, d-разность прогрессии $S = \frac{a_1+a_7}{2}\cdot 7 = \frac{2a_1+6d}{2}\cdot 7 = (a_1+3d)\cdot 7 =$

$= 7a_1+21d$

$a_{12} = a_1+11d$

$a_9 = a_1+8d$

$a_{10} = a_1+9d$

$$\begin{cases}(a_1+6d)(a_1+11d) > 7a_1+21d+20\\(a_1+8d)(a_1+9d) < 7a_1+21d+44\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_1^2+17a_1d+66d^2 > 7a_1+21d+20\\a_1^2+17a_1d+72d^2 < 7a_1+21d+44\end{cases}$$

$a_1^2+17a_1d+72d^2 > 7a_1+21d+20+6d^2$

$7a_1+21d+44 > 7a_1+21d+20+6d^2$

$24 > 6d^2$

$d^2 < 4$, т.к арифм. прогрессия состоит из целых чисел $\Rightarrow d\in\mathbb{Z}$, т.к прогрессия возраст. $\Rightarrow d>0$

$$\Rightarrow\begin{cases}d<2\\d\in\mathbb{Z}\\d>0\end{cases} \quad d=1$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a_1^2+17a_1+66 > 7a_1+21d+20\\a_1^2+17a_1+72 < 7a_1+21+44\end{cases} \qquad \begin{cases}a_1^2+10a_1+25>0\\a_1^2+10a_1+7<0\end{cases}$$ (выполнено всегда при $a\neq-5$)

$a_1^2+10a_1+7=0$ $\quad a_{1,2} = \frac{-10\pm\sqrt{100-28}}{2} = \frac{-10\pm6\sqrt2}{2} = -5\pm3\sqrt2$

$+\quad -\quad +$

$-5-3\sqrt2 \quad -5 \quad -5+3\sqrt2$

$-5-3\sqrt2 \vee -8$

$-3\sqrt2 \vee -4$

$3\sqrt2 > 4$ $\quad\Rightarrow -5-3\sqrt2 < -8$

$18 > 16$

$-5-3\sqrt2 \overset{>}{\vee} -10$

$-3\sqrt2 > -5$

$18 < 25$

$-5+3\sqrt2 \overset{>}{\vee} -1$

$3\sqrt2 > 4$

$18 > 16$

$3\sqrt2 \quad 5$

$18 \quad 25$

$\Rightarrow 3\sqrt2-5<0$

$\Rightarrow$ в промежутке лежат $a_1 = -9$

$a_1=-8$

$a_1=-7$

$a_1=-6$

$a_1=-4$

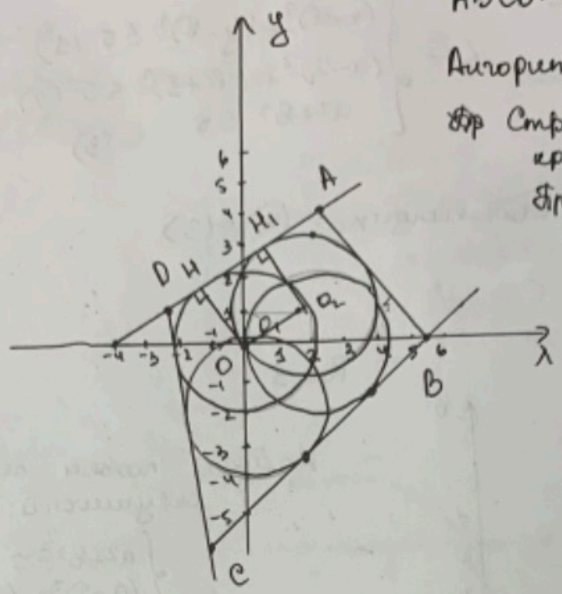
$a_1=-3$

$a_1=-2$

$a_1=-1$

Рис. 2

Чистовик



ABCD - фигура M

Алгоритм построения:

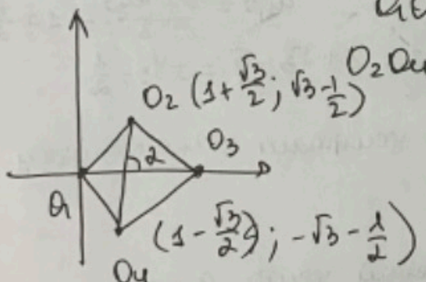
~~Ф~~ Строим окружности в крайних центрах.

Проводим попарно общие касательные, отмечаем их точки пересечения.

Четырёхугольник с вершинами в центрах окружностей ~ ABCD с коэф. подобия k_2 ~~...~~ т.к $O_1H = O_2H_1 = \sqrt{5}$ и $O_1H \parallel O_2H_1 \Rightarrow$ $HH_1 = O_1O_2$ и $HH_1 \parallel O_1O_2 \Rightarrow AD \parallel O_1O_2$

Аналогично для ост. сторон.

найдём: $S_{O_1O_2O_3O_4}$



$O_1O_3 = \sqrt{5}$

$O_2O_4 = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{3+12} = \sqrt{15}$

$$\begin{cases} \sqrt{3} - \frac{1}{2} = k\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + b \\ \cancel{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} - \sqrt{3} - \frac{1}{2} = k\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + b \end{cases}$$

$b = \sqrt{3} - \frac{1}{2} - k\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$-\sqrt{3} - \cancel{\frac{1}{2}} = k\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \sqrt{3} - \cancel{\frac{1}{2}}$

$-\sqrt{3}k = -2\sqrt{3} \quad k = 2$

$tg\alpha = 2 \quad \sin\alpha = 2\cos\alpha$

$\cos\alpha = \frac{\sin\alpha}{2}$

$5\sin^2\alpha = 4$

$\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$S_{O_1O_2O_3O_4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{15} = \sqrt{15}$

$S_{ABCD} = \cancel{\sqrt{15}\sqrt{5} \dots} \; k\sqrt{15}$

№3 $\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 5 & (1)\\ a^2+b^2\le \min(4a-2b,5) & (2)\end{cases}$

Черновик

(2) $\Leftrightarrow \begin{cases}a^2+b^2\le 5\\ a^2+b^2\le 4a-2b\end{cases}$

$a^2-4a+4+b^2+2b+1-5\le 0$

$(a-2)^2+(b+1)^2\le 5$

$4a-2b=5$

$2b=5-4a$

$b=\frac{5}{2}-2a$

$\begin{cases}a^2+b^2=5\\ a^2+b^2=4a-2b\end{cases}$

$4a-2b=5$

$-2b=5$ $b=-\frac{5}{2}$

$\frac{25}{4}=$

$\frac{25}{4}+4a^2-10a+a^2=5$

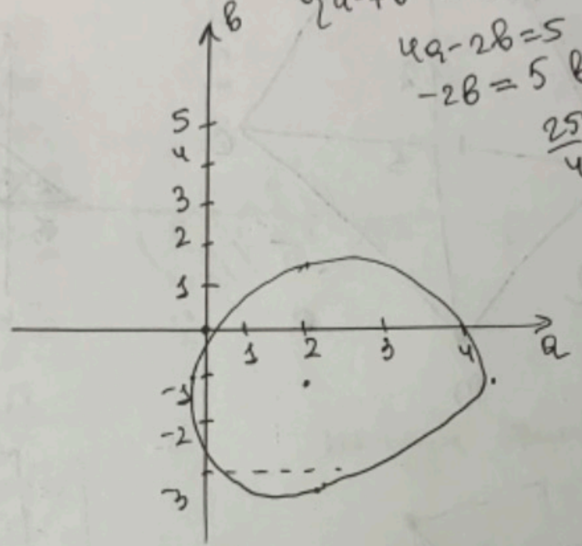
$5a^2-10a+\frac{5}{4}=0$

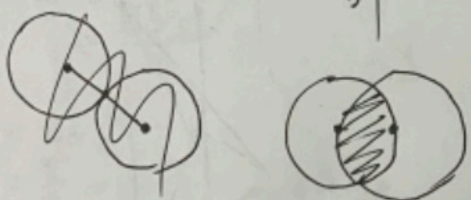
$25a^2-50a+5=0$

$5a^2-10a+1=0$

$a=\frac{10\pm4\sqrt5}{10}=$

$=\frac{5\pm2\sqrt5}{5}$

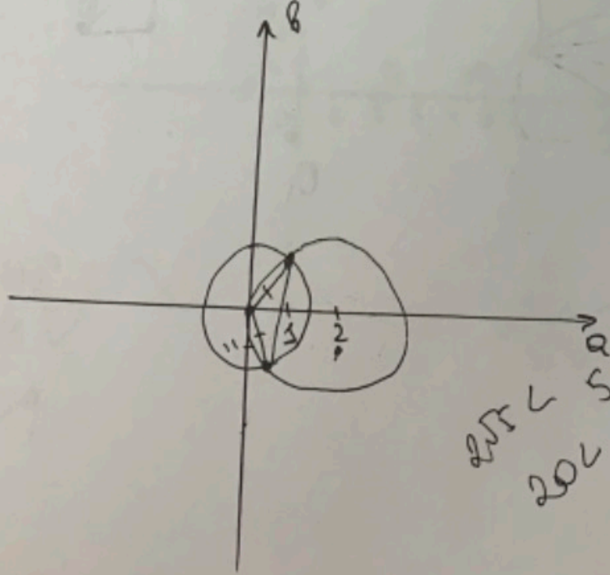




80	2
40	2
20	2
10	2
5	

$b_1=\frac{25-10-4\sqrt5}{10}=$

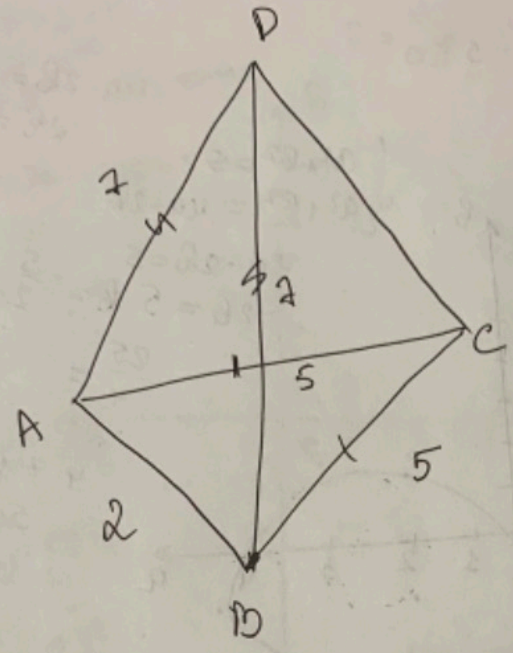
$=\frac{15-4\sqrt5}{10}$

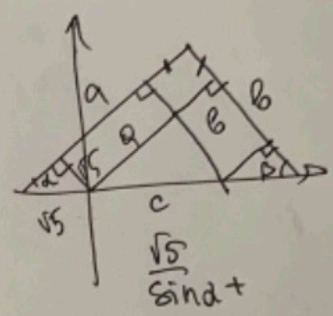


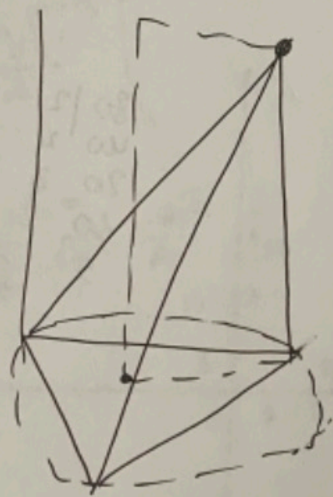
$2\sqrt5<5$

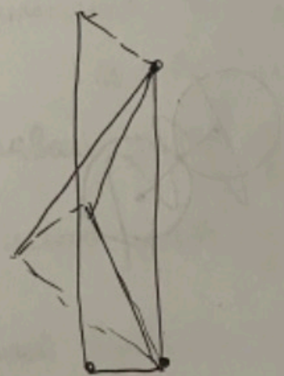
$20<25$

Черновик









O_1

Черновик

$\cancel{a^2-4a+4+b^2}$

$$\begin{cases}(a-2)^2+(b+1)^2=5\\ a^2+b^2=5\end{cases}$$

$-4a+4+2b+1=0$

$-4a+2b=-5$

$4a-2b=5 \quad 2b=5-4a$

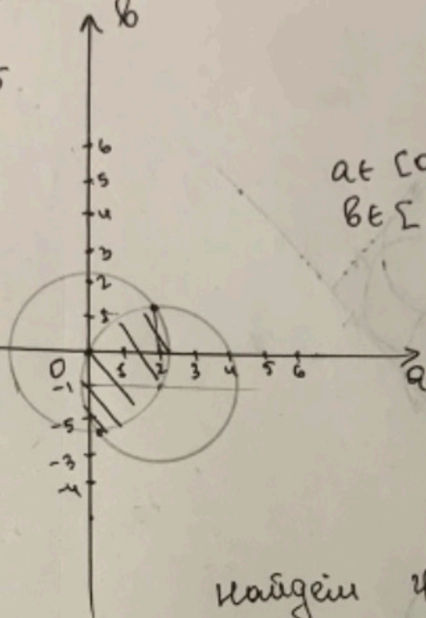
$b=\frac{5-4a}{2}=\frac{5}{2}-2a$

$\frac{25}{4}+4a^2+a^2-10a=5$

$5a^2-10a+\frac{5}{4}=0$

$a^2-2a+\frac{1}{4}=0$

$4a^2-8a+1=0.$



$a\in[0;\sqrt5]$

$b\in[\ ;1]$

$a_{1,2}=\frac{8\pm\sqrt{64-16}}{8}=$

$=\frac{8\pm4\sqrt3}{8}=\frac{2\pm\sqrt3}{2}$

$a=\frac{2-\sqrt3}{2}=1-\frac{\sqrt3}{2}$

$b=\frac52-2+\sqrt3=\frac{2\sqrt3+1}{2}$

$a=1+\frac{\sqrt3}{2}$

$b=\frac52-2-\sqrt3=$

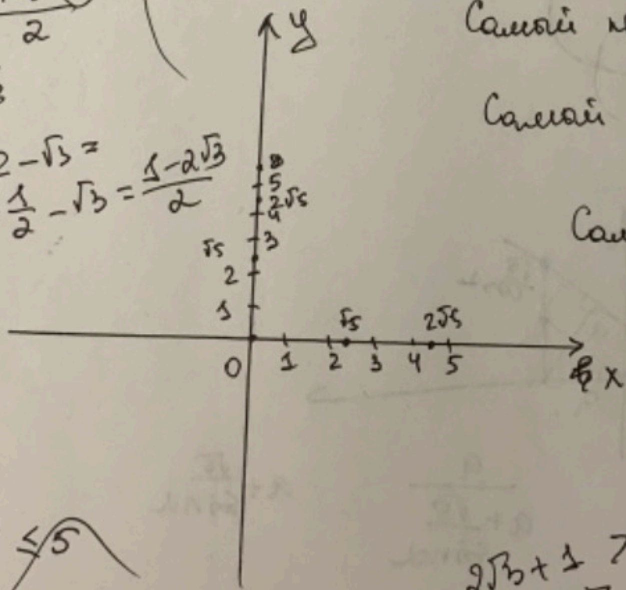
$=\frac12-\sqrt3=\frac{1-2\sqrt3}{2}$

найдем граничные значения

a и b

Самый правый центр: $a=\sqrt5$, $b=0$

Самый левый центр: $a=0$, $\cancel{b=\sqrt5}$ $b=0$



Самый верхний центр:

$a=2$

$b=1$

Самый нижний центр:

$4+(1-\sqrt5)^2\le5$

$1-\sqrt5>1$

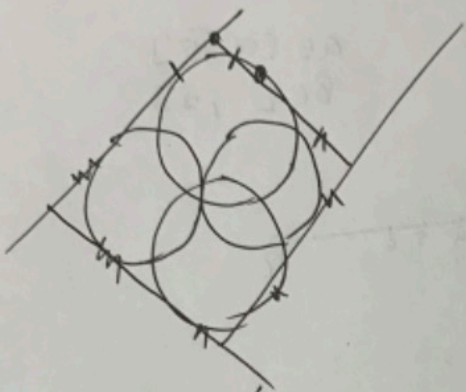
$1-\sqrt5<-1$

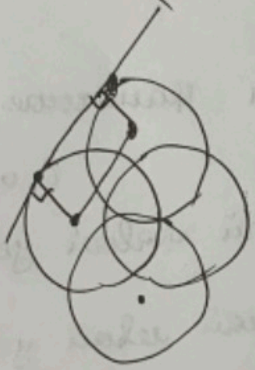
$2<\sqrt5$

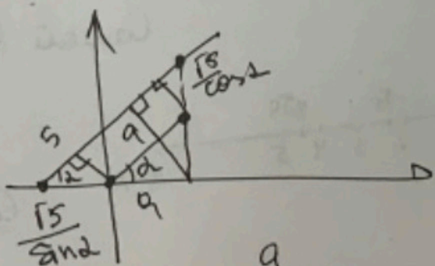
$2\sqrt3+1 \ ? \ 4$

$2\sqrt3 \ ? \ 3$

Черновик







$$\frac{a}{a+\frac{\sqrt{5}}{\sin\alpha}}$$

$$a+\frac{\sqrt{5}}{\sin\alpha}$$

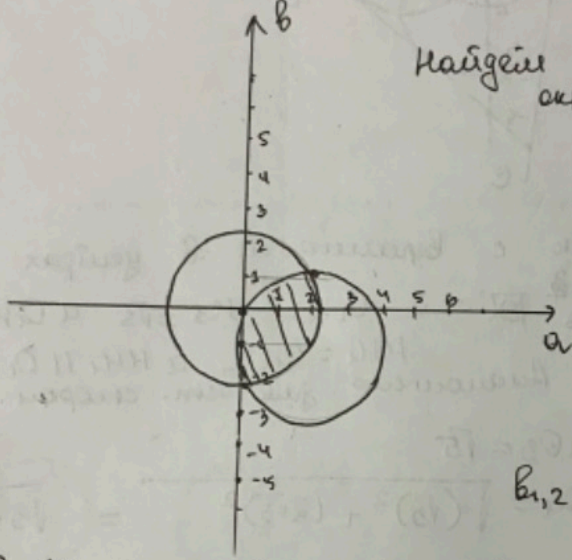
№3 $\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 5\\ a^2+b^2\le \min(4a-2b,5)\end{cases}$ Чистовик

$\Leftrightarrow \begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 5\\ a^2+b^2\le 4a-2b\\ a^2+b^2\le 5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 5 & (1)\\ (a-2)^2+(b+1)^2\le 5 & (2)\\ a^2+b^2\le 5 & (3)\end{cases}$

Найдём a и b, удовлетворяющие (2) и (3)

$\begin{cases}(a-2)^2+(b+1)^2\le 5\\ a^2+b^2\le 5\end{cases}$

Рис. 1



Найдём точки пересечения окружностей:

$\begin{cases}a^2+b^2=5\\ (a-2)^2+(b+1)^2=5\end{cases}$

$4a-2b=5$

$b=\cancel{\frac{5}{2}-2a}\ 2a-\frac{5}{2}$

$\frac{25}{4}+5a^2-10a-5=0$

$4a^2-8a+1=0$

$a_{1,2}=\frac{8\pm 4\sqrt{3}}{8}=1\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$b_{1,2}=2\pm\sqrt{3}-\frac{5}{2}=\pm\sqrt{3}-\frac{1}{2}$

$\Rightarrow (x-a)^2+(y-b)^2\le 5$ – множество окружностей с центрами с промежутку из Рис. 1

$\Rightarrow$ Самый правый центр: $a=\sqrt{5}$, $b=0$ Самый левый центр $a=0$, $b=\sqrt{5}$

Самый верхний центр: $b=\sqrt{3}-\frac{1}{2}$, $\cancel{b=1}$, $\cancel{a=2}$, $a=1+\frac{\sqrt{3}}{2}$ Самый нижний центр: $a=1-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $b=-\sqrt{3}-\frac{1}{2}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

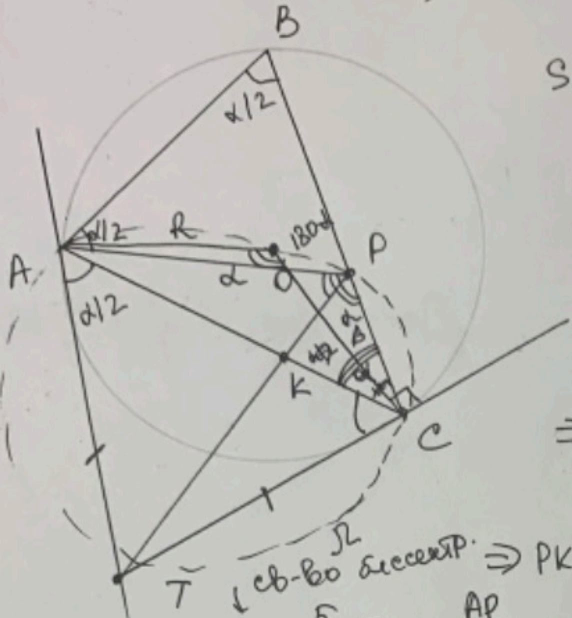
Шифр: **21102404**

ID профиля: **848733**

Вариант 18

Чистовик

N 6



1) $S_{CPK} = \frac{CP\cdot CK\sin\alpha}{2}$

$S_{APK} = \frac{CP\cdot AC\sin\alpha - CPCK\sin\alpha}{2}$

$\frac{AC}{2\sin\alpha} = R_1$

т.к $\angle AOC$ - центр, $\angle ABC$ - впис.

$\Rightarrow \angle ABC = \alpha/2 = \angle CAT = \angle ACT$

(по т. о касательной и хорде)

$\Rightarrow \angle ATC = 180 - \alpha \Rightarrow A, O, C, T$ лежат на одной окружности

св-во биссектр. $\Rightarrow PK$ - биссектриса $\angle APC$ $\angle AOC = 2\angle ABC$ (как впис. и цен)

$\Rightarrow PC = \frac{5}{6}AP$ $\frac{AP}{PC} = \frac{AK}{KC} = \frac{6}{5}$ ~~т.к CT - касательная к~~

~~$\Rightarrow \angle TCP = 90^\circ \Rightarrow PT$ - диаметр~~ $\angle AOC = \angle APC$ (как впис) $= \alpha$ $\Rightarrow \angle ABC = \frac{\alpha}{2}$

радиус Ω по т. синусов

$R_1 = \frac{R}{2\sin(90 - \frac{\alpha}{2})} = \frac{R}{2\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{AC}{4\sin\alpha/2\cos\alpha/2}$

$R = \frac{AC}{2\sin\alpha/2}$ $\frac{AB}{2\sin\beta} = R$ $\frac{AP}{2\sin\beta} = \frac{R}{2\cos\alpha/2}$

$\frac{AP}{2\sin\beta} = \frac{AB}{2\sin\beta\cdot 2\cos\alpha/2}$

$AP = \frac{AB}{2\cos\alpha/2}$ $AB = AP\cdot 2\cos\alpha/2$

$S_{ABP} = \frac{1}{2}\sin\frac{\alpha}{2}AB\cdot AP = \frac{1}{2}AP^2\cdot\sin\alpha = \boxed{\frac{66}{5}}$

$\frac{1}{2}AP\cdot PC\cdot\sin\alpha = 11$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6}AP^2\sin\alpha \Rightarrow \frac{1}{2}AP^2\sin\alpha = \frac{66}{5}$

~~для~~ $\sin(2\text{arctg}\frac{1}{2}) = 2\sin(\text{arctg}\frac{1}{2})\cos(\text{arctg}\frac{1}{2})$

2) $\frac{5}{12}AP^2\sin(2\text{arctg}\frac{1}{2}) = 11$ AP^2

из. п. 1

$\text{arctg}\frac{1}{2} = \alpha$ $\text{tg}\,\alpha = \frac{1}{2}$ $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{2}$ $\cos\alpha = 2\sin\alpha$

$5\sin^2\alpha = 1$ $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\sin(2\text{arctg}\frac{1}{2}) = \frac{4}{5}$

$\frac{1}{3}AP^2 = 11$ $AP = \sqrt{33} \Rightarrow PC = \frac{5\sqrt{33}}{6}$

$\cos(2\text{arctg}\frac{1}{2}) = \frac{2\cdot 4}{5} - 1 = \frac{3}{5}$

По т. косинусов для $\triangle APC$

$AC^2 = AP^2 + PC^2 - 2APPC\cos\alpha = 33 + \frac{25\cdot 33}{36} - \frac{2\cdot 5\cdot 33}{6}\cdot\frac{3}{5} = \frac{275}{12}$

$\boxed{AC = \sqrt{\frac{275}{12}}}$

№5 Черновик

$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)$, $\log_{6x-14}(x-1)^2$ $\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)$

ОДЗ: $\begin{cases} \frac{x}{3}+3>0 \\ \frac{x}{3}+3\neq 1 \\ 6x-14>0 \\ 6x-14\neq 1 \\ x-1>0 \\ x\neq 2 \end{cases}$

Тогда: $2\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)$, $2\log_{6x-14}(x-1)$, $\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)$

2 числа равны

$\cancel{2\log_{(\frac{x}{3}+3)}(6x-14)=2\log_{(6x-14)}(x-1)}$

$\cancel{\log_{(\frac{x}{3}+3)}(6x-14)=\frac{\log_{(\frac{x}{3}+3)}(x-1)}{\log_{(\frac{x}{3}+3)}(6x-14)}}$

$\cancel{\log^2_{(\frac{x}{3}+3)}(6x-14)=\log_{(\frac{x}{3}+3)}(x-1)}$

$\frac{1}{\log_{6x-14}\left(\frac{x}{3}+3\right)}-\log_{6x-14}(x-1)=0$

$\frac{1-\log_{6x-14}\left(\frac{x}{3}+3\right)\cdot\log_{6x-14}(x-1)}{\log_{6x-14}}=0$

$\log_{6x-14}\left(\frac{x}{3}+3\right)\cdot\log_{6x-14}(x-1)=1$ $\log_{6x-14}(x-1)=\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)$

$\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)=\log_{(6x-14)}(x-1)+1$

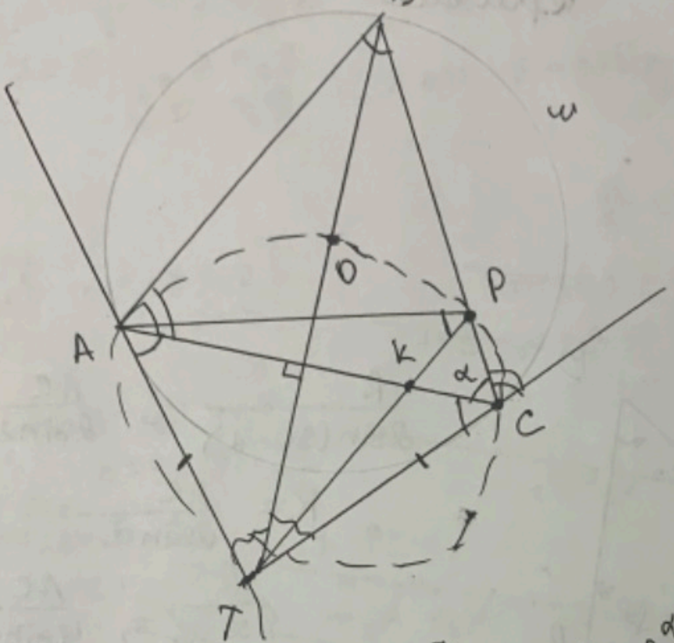
$\frac{1}{\log_{(\frac{x}{3}+3)}(x-1)}=\log\left(\frac{x}{3}+3\right)$

..

Чистовик

21102404 (U848733 M1299908)

Черновик



$$\frac{S_{APK}}{S_{CPK}} = \frac{6}{5}$$

Найти: S_{ABC}

$$\frac{AK}{KC} = \frac{6}{5}$$

$S_{ACP} = CP\,AC \sin\alpha$

$S_{CPK} = \underline{CP \cdot CK \sin\alpha}$

$\underline{CP \sin\alpha \cdot AK} = S_{APK}$

НОД $(a; b; c) = 15$

НОК $(a; b; c) = 3^{15} \cdot 5^{18}$

Пусть $a = 3^{\alpha+1} \cdot 5^{\beta+1}$

$b = 3^{d+1} \cdot 5^{d+1}$

$c = 3^{e+1} \cdot 5^{k+1}$

$\alpha/\gamma \begin{cases} \alpha / d / \beta = 0 \\ \beta / d / k = 0 \end{cases}$

НОК =

Пусть $a = 15$

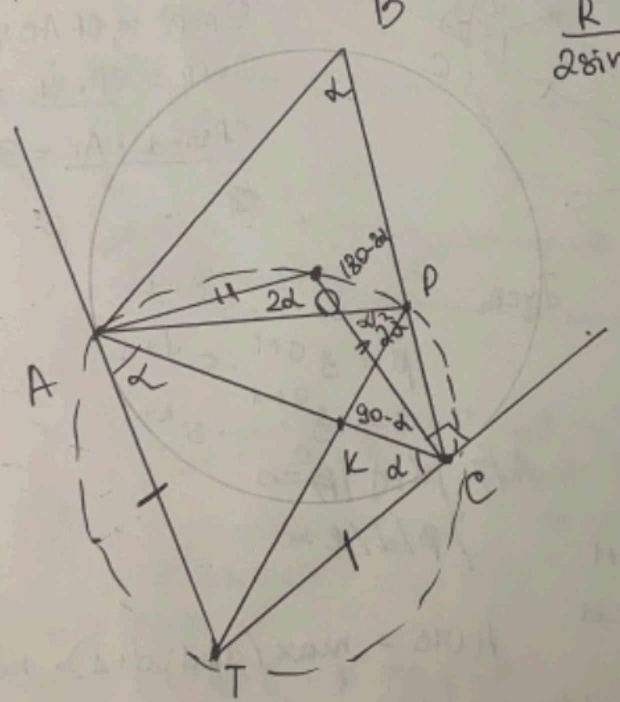
$b = 3^{d+1} \cdot 5^{\beta+1}$

$c = 3^{d+1} \cdot 5^{e+1}$

НОК $= \max(\alpha+1; d+1) \cdot \max(e+1, \beta+1)$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{ll} \alpha = 14 & d < 14 \\ d = 14 & \alpha < 14 \end{array} \right. \\ \begin{cases} e+1 = 17 \\ \beta+1 = 17 \end{cases} \end{cases}$$

Черновик



$$\frac{R}{2\sin(90-\alpha)} = \frac{AC}{2\sin 2\alpha}$$

$$R = \frac{AC}{2\sin\alpha}$$

$$\frac{R}{2\cos\alpha} = \frac{AC}{4\sin\alpha\cos\alpha}$$

~~BP~~

$$\frac{BP}{}$$

Чистовик

№4 $\begin{cases} НОД(a;b;c) = 15 \\ НОК(a;b;c) = 3^{15} \cdot 5^{18} \end{cases}$

Т.к. НОД = 15, НОК ⋮ 15 $\Rightarrow$ все числа представляются в виде $3^{\alpha} \cdot 5^{\beta}$, где $\begin{cases} \alpha \neq 0 \\ \beta \neq 0 \end{cases}$ $\alpha, \beta \in N$

Т.к. НОД = 15 и НОК ⋮ 15 $\Rightarrow$ одно из чисел = 15.

$\begin{cases} a = 3^{\alpha+1} \cdot 5^{\beta+1} \\ b = 3^{\gamma+1} \cdot 5^{d+1} \\ c = 3^{e+1} \cdot 5^{k+1} \end{cases}$, тогда $\max(\alpha+1, \gamma+1, e+1) = 15$

$\max(\alpha, \gamma, e) = 14$

$\max(\beta, d, k) = 17$

~~$\alpha = 1 \ldots 14$~~

С другой стороны, т.к. НОД = 15 $\Rightarrow$ ~~одно~~ как минимум два числа содержат 3^1 или 5^1

$\Rightarrow$ ~~одно из чисел~~ два числа $\alpha, \beta, \gamma, d, e, k = 0$ причем из α, γ и e одно число $= 0$

~~$N_1 = 14 \cdot 14$~~ из β, d и k одно число $= 0$

$\Rightarrow$ ~~у нас есть 15 способов выбрать α, 15 способов выбрать γ и~~ ~~14 способов~~

~~1) Пусть $\alpha = 0$~~
~~$\gamma = 0 \ldots 14$~~
~~$e = 1 \ldots 14$~~

~~$N = 15 \cdot 14$~~

~~$N_1 = 15 \cdot 15$~~

~~2) $\gamma = 0$~~
~~$\alpha = 0 \ldots 14$~~
~~$e = 1 \ldots 14$~~

~~$\gamma = 0$~~
~~$\alpha = 1 \ldots 14$~~
~~$e = 0 \ldots 14$~~

Обязательно одно из чисел = 0 и одно из чисел = 14

$N = 15$ (кол-во способов выбрать ост.)

$G = 6 \cdot 15$ (кол-во перестановок)

Аналогично для β, d и k
одно число $= 0$, одно $= 17$ $N = 18$ (кол-во способов выбрать третье)

$G = 6 \cdot 18$ (кол-во перестановок)

Кол-во вариантов составить пары: $36 \cdot 15 \cdot 18$

Ответ: $36 \cdot 15 \cdot 18$

№5 $\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14),\ \log_{(6x-14)}(x-1)^2,\ \log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)$

Чистовик

ОДЗ:

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{3}+3}>0 \\ \frac{x}{3}+3\neq 1 \\ 6x-14>0 \\ 6x-14\neq 1 \\ x-1>0 \\ x\neq 0 \end{cases}$$

Пусть $\begin{cases} \frac{x}{3}+3=a \\ 6x-14=b \\ x-1=c \end{cases}$ $\begin{cases} a,b,c>0 \\ a\neq 1 \\ b\neq 1 \\ c\neq 1 \end{cases}$

① $\begin{cases} \log_a b=\log_b c \\ \log_c a=2\log_a b-1 \end{cases}$ $\log_a b=\alpha$ $b=a^{\alpha}$; $\log_b c=\alpha$ $c=b^{\alpha}$ $\Rightarrow c=a^{\alpha^2}$

$\log_c a=\frac{1}{\alpha^2}$ $\frac{1}{\alpha^2}=2\alpha-1$ $2\alpha^3-\alpha^2-1=0$

$\alpha=1\Rightarrow a=b=c$

$6x-14=x-1$

$5x=13$ $\boxed{x=\frac{13}{5}}$

② $\begin{cases} \log_c a=2\log_b c \\ 2\log_a b=2\log_b c-1 \end{cases}$ $\log_c a=\alpha$

$a=c^{\alpha}$

$c^2=b^{\alpha}$ $c=b^{\frac{\alpha}{2}}$ $a=b^{\alpha^2/2}$

~~$\frac{2\cdot 2}{\alpha^2}=\frac{\alpha}{2}-1$ $|\times 2\alpha^2$~~

~~$2\alpha^3-2\alpha^2-8=0$~~

~~$\alpha^3-\alpha^2-4=0$ $\alpha=2$~~ $\alpha^3-\alpha^2-4$ | $\alpha-2$

α^2-4 | $\alpha^2+\alpha+2$

$2\alpha-4$ $\alpha^2+\alpha+2=0$ нет реш.

$\Rightarrow$ ~~$\log_c a=2$~~ $\begin{cases} a=c^2 \\ a=b^2 \end{cases}$ $c^2=b^2$

$\frac{4}{\alpha^2}-\alpha+1=0$

$\alpha^3-\alpha^2-4=0$

$\alpha=2$

~~$(6x-14)^2=(x-1)^2$~~

~~$36x^2-168x+196=x^2-2x+1$~~

~~$35x^2-166x+195=0$~~

$\begin{cases} a=c^2 \\ c^2=b^2 \end{cases}$, т.к. $c>0$, $b>0$

$\Rightarrow b=c$ $6x-14=x-1$ $x=\frac{13}{5}$.

③ $\begin{cases} \log_c a=2\log_a b \\ 2\log_b c=2\log_a b-1 \end{cases}$ $\log_c a=\alpha$ $a=c^{\alpha}$ $b^2=a^{\alpha}$

$b^2=c^{\alpha^2}$ $b=c^{\frac{\alpha^2}{2}}$

$\Rightarrow\log_b c=\frac{2}{\alpha^2}$

$\frac{4}{\alpha^2}=\alpha-1$ $\alpha^3-\alpha^2-4=0$ $\alpha=2$

$\begin{cases} a=c^2 \\ b^2=a^2 \end{cases}$ $\begin{cases} a=c^2 \\ a=b \end{cases}$

$x^2-2x+1=6x-14$

$x^2-8x+15=0$

$\left[\begin{array}{l} x_1=3 \\ x_2=5. \end{array}\right.$

Ответ: $3;5;\ \frac{13}{5}$

21102404 (U848733 M1299908)