Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102334**

ID профиля: **154417**

Вариант 18

Чистовик. Лист 1

N 1

$S = \frac{a_1+a_7}{2}7 = \frac{a_1+a_1+6d}{2}7 = (a_1+3d)7$, где d — разность прогрессии. Т.к. прогресс. возраст. и состоит из целых чисел, $\underline{d - \text{целое}}$ и $\underline{d>0}$. Запишем условия на a_7a_{12} и a_9a_{10}:

$$\begin{cases}(a_1+6d)(a_1+11d) > S+20\\ (a_1+8d)(a_1+9d) < S+44\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a_1^2+17a_1d+66d^2 > S+20\\ S+44 > a_1^2+17a_1d+72d^2\end{cases}$$

Сложим: $66d^2+44 > 72d^2+20 \Rightarrow 24 > 6d^2 \Rightarrow d^2<4 \Rightarrow$ (т.к. $d>0$) $d<2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{d=1}$. Перепишем систему неравенств, подставив d и S:

$$\begin{cases}(a_1+6)(a_1+11) > (a_1+3)7+20\\ (a_1+8)(a_1+9) < (a_1+3)7+44\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a_1^2+17a_1+66 > 7a_1+41\\ a_1^2+17a_1+72 < 7a_1+65\end{cases}$$

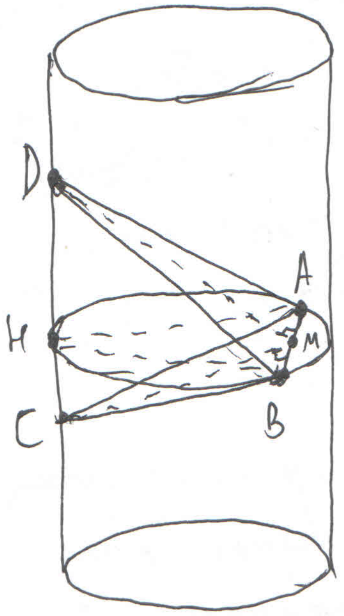
$$\begin{cases}a_1^2+10a_1+25>0\\ a_1^2+10a_1+7<0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(a_1+5)^2>0 \text{ — любое } a_1 \text{ кроме } a_1=-5\\ a_1^2+10a_1+7<0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a_1 \neq -5\\ a_1^2+10a_1+7<0\end{cases}$$

$\frac{1}{4}D = 5^2-7=18 \Rightarrow \underline{a_1^2+10a_1+7=0 \text{ при } a_1=-5\pm3\sqrt{2}} \Rightarrow a_1 \in [-9;-1]$, т.к. a_1 — цел. и $4<3\sqrt{2}<5$. Т.е. a_1 может принимать целые значения от -9 до -1 включительно кроме -5

Ответ: $-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1$

Чистовик, лист 2

№ 2



$AD=BD$; $AC=BC$ => $\triangle DAB$ и $\triangle CAB$ — равнобед. Значит, медианы DM и CM — высоты в $\triangle ADB$ и $\triangle ACB$ соотв. след., $AB\perp DM$; $AB\perp CM$ => $AB\perp(CMD)$ => (по признаку)

=> $AB\perp CD$ $(CD\subset(CDM))$

~~Значит~~, ~~в плоск.~~ (CDM) мы можем провести

CD парал. оси цилиндра => $CD\perp$ плоскости оснований =>

=> ABH плоскости основания цилиндра

Рассмотрим плоскость β, парал. основаниям цил., в которой лежит AB. Она пересеч. CD в $(\cdot)H$ $(CD\perp\beta)$. $CD\perp$ плоск. осн. => $CD\perp\beta$ => $CD\perp MH$. ~~β пересек.~~

Сечение цилиндра плоск. β — окружность (на кот. леж. точки A, B, H) радиусом R, равным радиусу цилиндра. ABH впис. в окруж. =>

=> по теор. синусов $(\triangle ABH)$: $R=\frac{AB}{2\sin\angle AHB}=\frac{1}{\sin\angle AHB}$. R_{min} достигается при максим. $\sin\angle AHB$; т.к. $\sin\angle\in[-1;1]$, $R_{min}=\frac{1}{1}=1$ и соответствует $\angle AHB=90°$. В этом случае $\angle AHB$ — прямой, опир. на хорду AB => AB — диаметр; => M — центр окруж. => $\triangle AMH$ и $\triangle BMH$ равнобед. и прямоуг. (по т. Пиф. $AH=\sqrt{AD^2-DH^2}$; $BH=\sqrt{BD^2-DH^2}$ => $AH=BH$ =>

=> $\triangle AHB$ — равнобед. => HM — бисс, выс. и мед. => $\triangle AMH$ и $\triangle BMH$ - прям.)

т.е. $AH=\sqrt{2}AM=\sqrt{2}R=\sqrt{2}=BH$. $DH=\sqrt{AD^2-AH^2}=\sqrt{49-2}=\sqrt{47}$

$CH=\sqrt{AC^2-AH^2}=\sqrt{25-2}=\sqrt{23}$. $CD=CH+DH=\sqrt{23}+\sqrt{47}$

Ответ: $\sqrt{23}+\sqrt{47}$

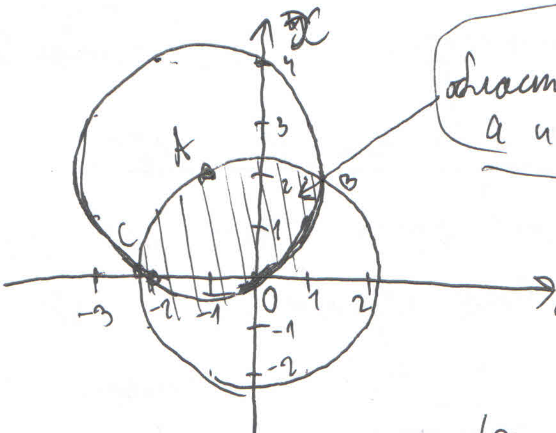
Чистовик. Лист 3

№3

Решим 2-ое ур-ие системы, чтобы найти множество возмож. а и b:

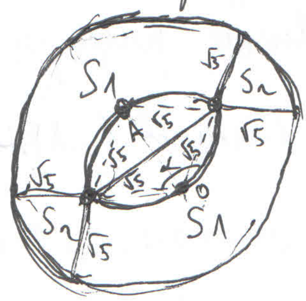
$a^2+b^2 \le \min(4a-2b, 5) \Rightarrow \begin{cases} a^2+b^2 \le 5 \\ a^2+b^2 \le 4a-2b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2+b^2 \le (\sqrt{5})^2 \\ (a-2)^2+(b+1)^2 \le (\sqrt{5})^2 \end{cases}$

т.е. на декарт. плоскости область возможных чисел a и b будет выглядеть как пересеч. 2-ух окружн. с рад. $\sqrt{5}$:



Второе ур-ие на плоскости ~~фигур~~ (y, x) выглядит как ~~окружность~~ круг с радиусом $\sqrt{5}$, центр которой лежит в заштрих. области, т.к. имеет координаты (b; a)

$(x-a)^2+(y-b)^2 \le (\sqrt{5})^2$. Нарисовав все возможн. круги, получим фигуру М:



(М — вся внутр. область)

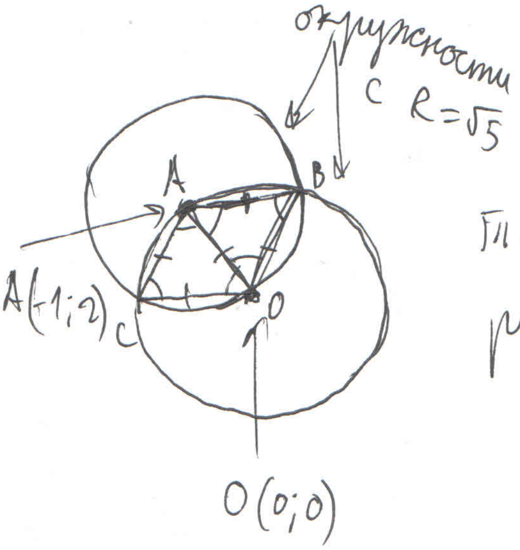
$S_M = 2(S_1+S_2)$. ~~$S_1 = S l_\smile \cdot R = \sqrt{5} l_\smile$, где $l_\smile$ — радиус дуги~~ $S_1 = S_{сек 1} - S_{сек 2}$, где $S_{сек 1}$ и $S_{сек 2}$ — площади секторов с углом $\angle$ и радиусом $2\sqrt{5}$ и $\sqrt{5}$.

$S_1 = \frac{\alpha}{2}\left((2\sqrt{5})^2 - \sqrt{5}\right)^2 = \frac{\alpha}{2}(20-5) = \frac{15}{2}\alpha$; S_2 — площ. сектора с рад. $\sqrt{5}$ и углом $\pi - \alpha \Rightarrow S_2 = \frac{\pi-\alpha}{2}\sqrt{5}$

т.е. $S_M = 15\alpha + (\pi-\alpha)\sqrt{5}$. Найдём α.

Чистовик. лист 4

(№3)



(область возм. чисел a и b)

Т.к. ~~центры~~ $A \in (O;\sqrt{5})$; $O \in (A;\sqrt{5})$, на рисунке $\triangle ABO$ и $\triangle ACO$ – равносторон. =>

=> $\underline{\alpha} = \angle COB = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

Т.к. $S_M = \frac{30\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\sqrt{5} = 10\pi + \frac{\sqrt{5}}{3}\pi$

Ответ: $\pi\left(10 + \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$

Черновик $\boxed{\text{Лист 1}}$

№1

$$\frac{a_1+a_7}{2}\cdot 7=\frac{2a_1+6d}{2}\cdot 7=(a_1+3d)7=S$$

$$(a_1+6d)(a_1+11d)>S+20 \Rightarrow a_1^2+17a_1d+66d^2>S+20$$

$$(a_1+8d)(a_1+9d)<S+44 \qquad S+44>a_1^2+17a_1d+72d^2$$

$$44+66d^2>20+72d^2$$

$$24>6d^2 \qquad d - \text{цел.}$$

$$d^2<4 \qquad d>0$$

$$\cancel{|d|<2} \Rightarrow d=\pm 1$$

$$d<2 \Rightarrow d=1$$

$$S=(a_1+3)7$$

$$\begin{cases}(a_1+6)(a_1+11)>(a_1+3)7+20\\(a_1+8)(a_1+9)<(a_1+3)7+44\end{cases}$$

$$4<3\sqrt2<5$$

$$a_1^2+17a_1+66>7a_1+41$$

$$a_1^2+10a_1+25>0$$

$$(a_1+5)^2>0$$

$$a_1\neq -5$$

$$a_1^2+17a_1+72<7a_1+65$$

$$a_1^2+10a_1+7<0$$

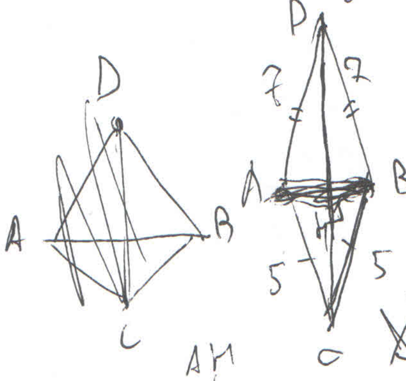
$$\tfrac{1}{4}D=25-7=18=9\cdot 2$$

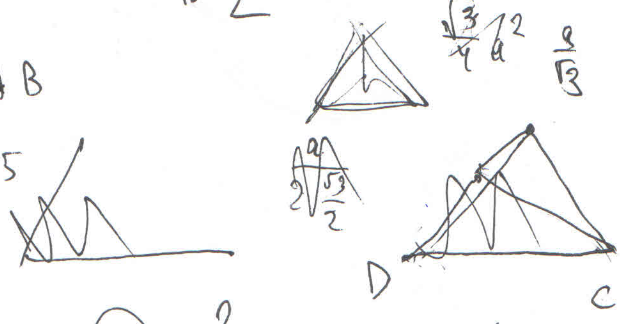
$$a_1=-5\pm 3\sqrt2$$

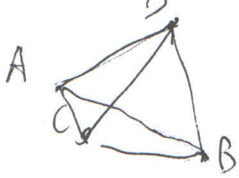
$-10 \quad -9 \quad -5 \quad -1 \quad 0$

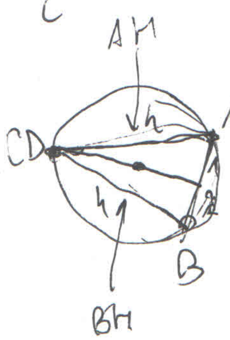
$$a_1=-9;\ -8;\ -7;\ -6;\ -4;\ -3;\ -2;\ -1$$

№2









$$R=\frac{2}{2\sin\angle AHB}=\frac{1}{\sin\angle AHB}=\frac{h^2}{2\sqrt{h^2-1}}$$

$$\cancel{\sin\tfrac{\varphi}{2}}\angle AH \qquad \sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{h} \qquad \sqrt{1-\frac{1}{h^2}}=\frac{\sqrt{h^2-1}}{h^2}$$

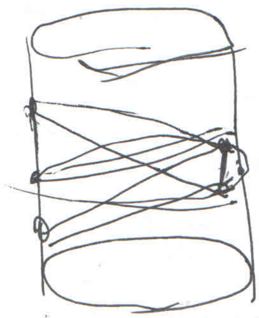
$$AH=\sqrt2 \qquad R=\frac{1}{\sin\angle AHB}\Rightarrow R_{min}=\frac{1}{1}=1 \qquad \cos\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{h^2-1}}{h} \qquad \frac{\sqrt{h^2-1}}{h}$$

$$\angle AHB=90^\circ$$

$$\sin\angle AHB=2\frac{\sqrt{h^2-1}}{h^2}$$

Ctg=

Черновик [Лист 2]

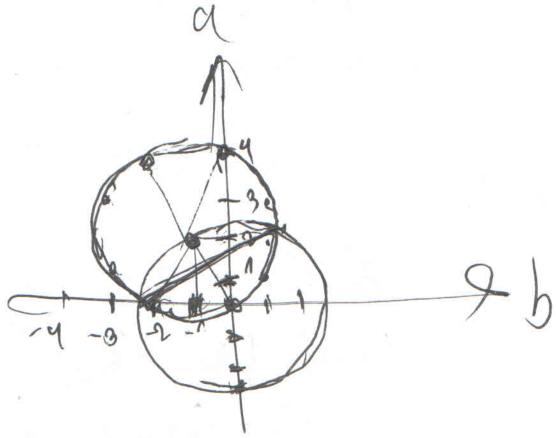


$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le (\sqrt{5})^2 \\ a^2+b^2 \le \min(4a-2b;\, 5) \end{cases}$$

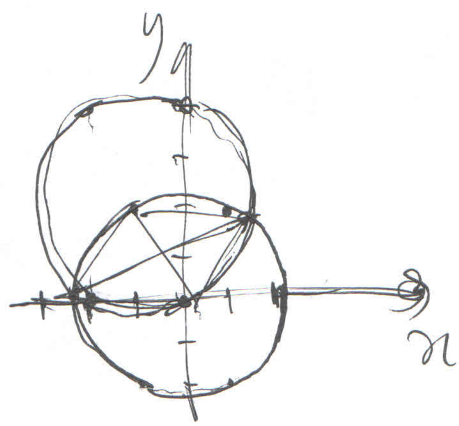
$$\begin{cases} \cancel{(x-a)^2+(y-b)^2 \le 5} \\ a^2+b^2 \le 4a-2b \Rightarrow (a-2)^2+(b+1)^2 \le (\sqrt{5})^2 \\ a^2+b^2 \le (\sqrt{5})^2 \end{cases}$$

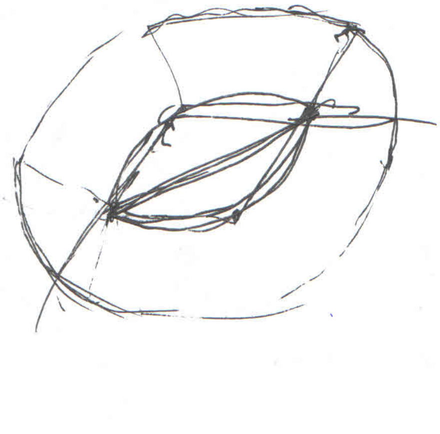
$\Rightarrow$ a и b лежат внутри окр. с $R = \sqrt{5}$

$(a-2)$



$l = 2\cdot$

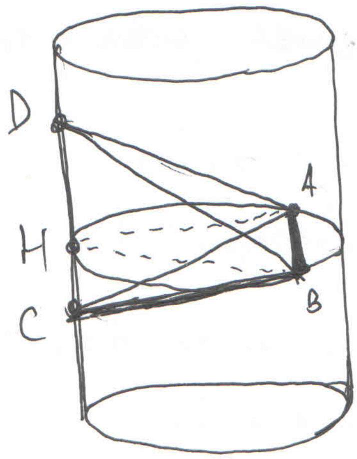




$$\frac{\varphi R^2}{2}$$

~~Чистовик~~ Черновик | Лист 3

№2



Из (·)A и (·)B опустим перпендик. AH_1 и BH_2 на стор. CD. По теор. Пиф., для $\triangle AH_1C$:

$CH_1^2 + AH_1^2 = AC^2$; для $\triangle BH_2C$: $CH_2^2 + BH_2^2 = CB^2$

$CB^2 = AC^2 = 25 \Rightarrow \underline{CH_1^2 + AH_1^2 = CH_2^2 + BH_2^2}$

Аналогично для $\triangle AH_1D$ и BH_2D: $\underline{DH_1^2 + AH_1^2 = DH_2^2 + BH_2^2 = 49}$

Вычитаем: $DH_1^2 - CH_1^2 = DH_2^2 - CH_2^2$

$(DH_1 + CH_1)(DH_1 - CH_1) = (DH_2 + CH_2)(DH_2 - CH_2)$

$DH_1 + CH_1 = DH_2 + CH_2 = CD \Rightarrow \quad DH_1 - CH_1 = DH_2 - CH_2$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102334**

ID профиля: **154417**

Вариант 18

Чистовик. Лист 1

№1

Пусть $a = 3^x \cdot 5^m$; $b = 3^y \cdot 5^n$; $c = 3^z \cdot 5^k$. ~~Имеем~~ НОД$(a;b;c) = 15_n = 3^1 \cdot 5^1$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \min(x;y;z) = 1$; $\min(m;k;k) = 1$, т.е. хотя бы одно из чисел x, y, z равно 1, и хоть одно из чисел m, n, k равно 1. Т.к. НОК$(a;b;c) = 3^{15} \cdot 5^{18}$, ~~то~~ $\max(x;y;z) = 15$; $\max(m;n;k) = 18$ $\Rightarrow$ хотя бы одно из чисел x, y, z равно 15 и хотя бы одно из чисел m, n, k равно 18. ~~Рассмотрим все случаи~~

Числа x, y и z будем рассматривать независимо от чисел m, n, k, т.к. кол-во множителей 3 и множ. 5 в числах не зависят друг от друга (т.е. если мы найдём число вариантов троек $(x;y;z)$ и число вар. троек $(m;n;k)$, каждой паре троек будет соотв. единственный и уникальный набор чисел $(a;b;c)$, причём общее число ~~способов~~ вариантов $(a;b;c)$ = число вар. $(x;y;z)$ · число вар. $(m;n;k)$). 1) Для x, y и z:

I случай: ровно 1 число из 3-ёх (x, y или z) равно 1 и ровно 1 число равно 15. Тогда третье число можно выбрать 13 способами (оно приним. знач. от 2 до 14). Общее число вариантов с учётом перестановок (т.к. нужен упорядоч. набор чисел $(a;b;c)$): $13 \cdot 3! = 13 \cdot 6 = 78$

II случай: числа равны 15; 15; 1 или 15; 1; 1. Итого: $3+3=6$ вар. ~~вариантов~~

Больше случ. нет, т.к. все числа x, y, z не могут быть равны 15 или 1

Т.е. у нас есть $6+78=84$ варианта ~~для~~ различных упорядоч. троек чисел $(x;y;z)$

2) Аналогично для степеней 5-ки (чисел m, n, k).

I случай: ровно 1 число $=1$ и ровно 1 число $=18$. Тогда третье число можно выбрать 16 способами (оно приним. знач. от 2 до 17). Итого, с учётом перестановок чисел m, n, k: $16 \cdot 3! = 16 \cdot 6 = 96$ вар.

II случай: числа равны 18; 18; 1 или 18; 1; 1. Всего $3+3=6$ ~~способов~~ вариантов.

Больше случаев нет. Всего различных упорядоч. троек $(m;n;k)$: $96+6=102$

Итого кол-во упорядоч. троек $(a;b;c)$: $84 \cdot 102 = 8568$

Ответ: 8568

Чистовик. Лист 2

№2

ОДЗ: $x > -9$; $x = -6$; $x > \frac{7}{3}$; $x \neq \frac{5}{2}$; $x > 1$; $x \neq 2$. $\Rightarrow$ $x \in \left(\frac{7}{3}; \frac{5}{2}\right) \cup \left(\frac{5}{2}; \infty\right)$

Обозначим первое число за m, второе за n, третье за k.

Заметим, что $mn = 2\log_{\left(\frac{x}{3}+3\right)}(6x-14) \cdot 2\log_{(6x-14)}(x-1) = 4\log_{\left(\frac{x}{3}+3\right)}(x-1) = \frac{4}{\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)} =$

$= \frac{4}{k} \Rightarrow mnk = 4$. По усл. ~~нужн~~ требуется, чтоб 2 числа были равны, а третье было меньше их на 1 $\Rightarrow$ пусть 2 числа равны p, тогда третье равно $p-1$

т.е. $p^2(p-1) = 4$. Легко подобрать решение $2^2 \cdot (2-1) = 4$, соответствующее $p = 2$

~~$p^2(p-1) = p^3 - p^2$~~ $\quad p^3 - p^2 - 4 = 0$ $\quad (p-2)(p^2+p+2) = 0$; у квадр. ур-ия $D = 1-8 < 0$,

т.е. единств. корень: $p = 2$. Т.е. ~~которое~~ надо найти x, при котором 2 числа равны 2, а последнее равно 1. Приравн. m, n, k к 2 и найдем для них x: $(m =)\ 2\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14) = 2 \Rightarrow \frac{x}{3} + 3 = 6x - 14 \Rightarrow x = 3$

$(n =)\ 2\log_{6x-14}(x-1) = 2 \Rightarrow 6x - 14 = x - 1 \Rightarrow x = 2{,}6$

$(k =)\ \log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right) = 2 \Rightarrow \frac{x}{3} + 3 = (x-1)^2 \Rightarrow x^2 - \frac{7}{3}x - 2 = 0$

По теор. Виета: $x = 3$; $x = -\frac{2}{3}$ не уд. ОДЗ

Получаем, что 2 числа равны 2 только при $x = 3$, эти числа — m и k

n при $x = 3$ равно: $\log_{18-14}(3-1)^2 = \log_4 4 = 1$, т.е. условие выполнено.

Ответ: при $x = 3$.

Чистовик. лист 3

N3

а) $\frac{S_{APK}}{S_{CPK}} = \frac{6}{5} \Rightarrow$ т.к. у этих треуг. одинак. высота,

$\frac{CK}{AK} = \frac{5}{6}$. По св-ву касат. $AT = CT$,

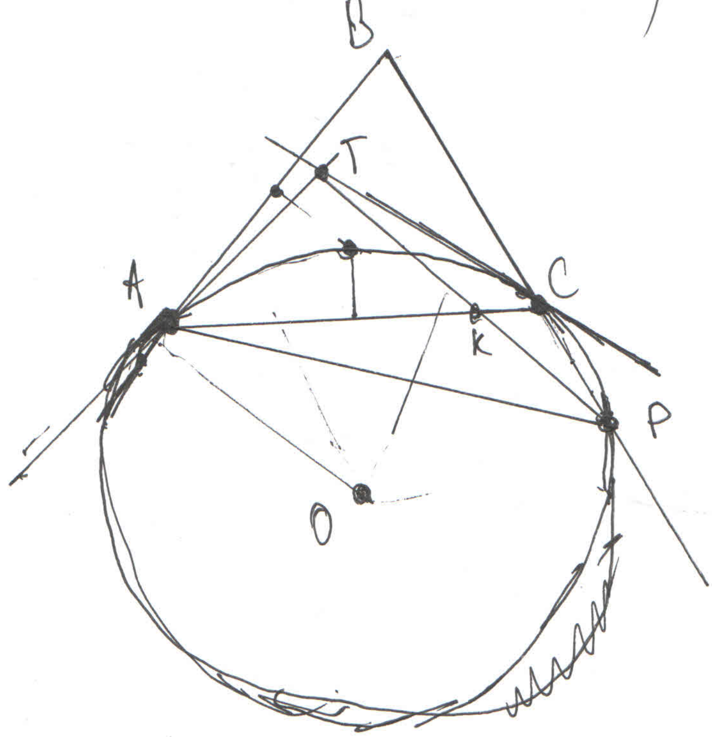
$\triangle O_1AT$ и O_1CT — прямоуг.,

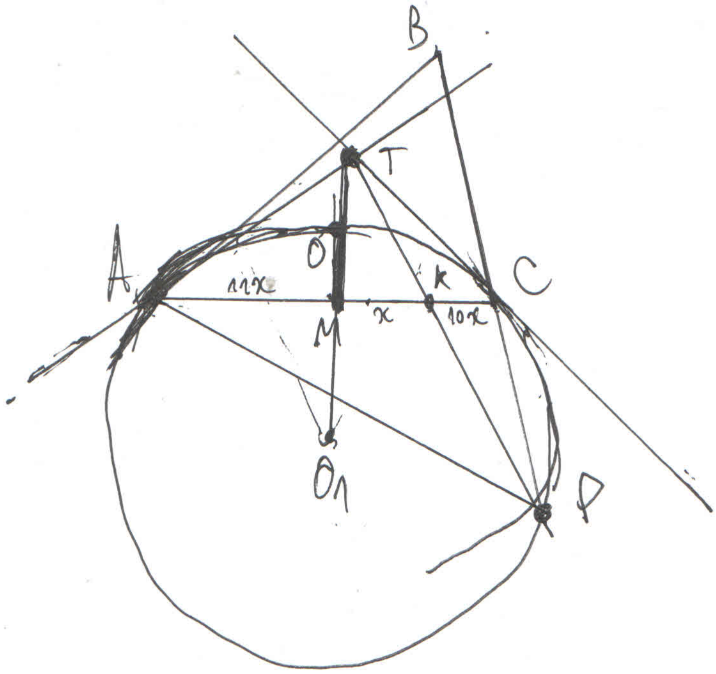
равны по кат. и гип., $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ATO_1 = \angle CTO_1 \Rightarrow TO_1$ — бисс. $\angle ATC$

$\triangle ATC$ — равнобед. $\Rightarrow TM$ — бисс., мед., выс.

~~M~~ сер. OM — сер. пер. $\Rightarrow$ пр. OM совп. с пр. $O_1T \Rightarrow O \in$ пр. O_1T





$S_{ACP} = S_{AKP} + S_{KCP} = 11$

$S_{ABC} = \frac{BC}{CP} S_{ACP} = 11\frac{BC}{CP}$ (т.к. у них одинак. высота)

$MC = \frac{1}{2}AC$; $CK = \frac{5}{11}AC \Rightarrow MK = \frac{AC}{22}$

Пусть $MK = x$, тогда $CK = 10x$; $AK = 12x$; $AM = 11x$.

б) ~~$tg\,\angle B = \frac{1}{2}$~~ $tg\angle B = \frac{1}{2}$

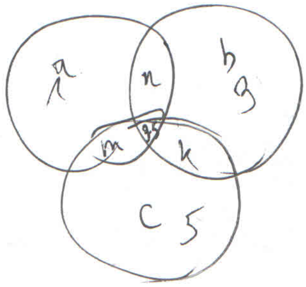
~~$tg^2\angle B$~~

$tg^2\angle B = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos^2\angle B = \frac{1}{\frac{5}{4}} = \frac{4}{5}$

$\sin^2\angle B = \frac{1}{5} \Rightarrow \sin\angle B = \frac{1}{\sqrt{5}}$

~~$AK = \ldots$~~

144 группа 17 участник Черновик $\boxed{\text{лист 1}}$



$НОК = abcmnk\,НОД$

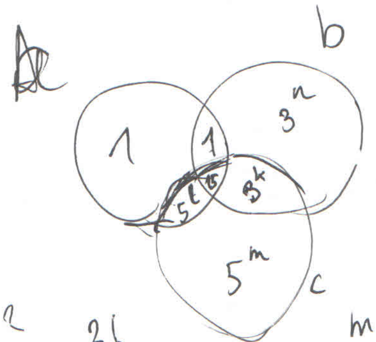
$НОК\,НОД = abcmnk\,НОД^2$

$ABC = abc\cdot(mnk)^2\cdot НОД^3 = НОК\,mnk\,НОД^2 =$

$= \frac{НОК^2\,НОД}{abc} = \cancel{3^{16}\cdot 5^{19}}$

$m+1$

3 5



$m+l+1=18$

$n+k+1=15$

$m+l=17$

$n+k=14$

m и $l \in [1;16]$

n и $k \in [$

$\cancel{3^2 = \frac{3!}{2!\,1!} = 3}$

$\cancel{3! = 6}$

Ответ $= X\cdot 3!\cdot \frac{3!}{\cancel{2!1!}}$

$3^x\cdot 5^m$ $3^y 5^n$ $3^z 5^k$

$\cancel{k \geq 1}$

$z \geq 1$ $1 \leq x/y/z \leq 15$

$\cancel{\leq \text{числа} \leq}$ $1 \leq m/n/k \leq 18$

$\max(x;y;z)=15$

$\max(m;n;k)=18$

$\min(x;y;z)=1$

$\min(m;n;k)=1$

$m \leq 18$

$n=1$

k – от 1 до 18

2 до 17

$x=15$

$y=1$

z – от 1 до 15

2 до 14

$\cancel{X = 15\cdot 18\cdot 3!\,3!}$

$16\cdot 13\cdot 3!\,3! +$

18	18
1	18
1	1
3	3

2

$(16\cdot 3!)(13\cdot 3!) + \cancel{2\cdot 3}$

$\left(\begin{matrix}16\cdot 3!\\ +\\ 2\cdot 3\end{matrix}\right)\cdot\left(\begin{matrix}13\cdot 3!\\ +\\ 2\cdot 3\end{matrix}\right) = (16\cdot 6+2\cdot 3)(13\cdot 6+2\cdot 3) = (96+6)(78+6) =$

$= 102\cdot 84 = 8568$

$$\begin{array}{r} 84\\ \times\ 102\\ \hline 168\\ +\ 84\\ \hline 8568 \end{array}$$

Черновик – Лист 2

№1

$k_1 НОД(a;b;c)=a$; $k_2 НОД(a;b;c)=b$; $k_3 НОД(a;b;c)=c$

$abc = k_1k_2k_3 НОД(a;b;c)\cdot НОД^2(a;b;c) = НОК(a;b;c)\cdot НОД^2(a;b;c)$, т.к. наим. число (НОК), кот. :a, :b и :c должно включать в себя множители чисел k_1, k_2 и k_3, которые ~~не~~ явл. делителями ровно одного числа (из чисел a, b, c) и один раз включать общие множители (НОК = уникальные множители · общие мно

$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)$, $\log_{6x-14}(x-1)^2$ $\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)$

$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}$

$a=\frac{x}{3}+3$

$b=6x-14$

$c=x-1$

ОДЗ: ~~$x>-9$; $x\neq-6$~~

$x>\frac{7}{3}$; $x\neq\frac{5}{2}$

$x>1$; ~~$x\neq2$~~

$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$

$(\log_c a)(\log_a b)=\log_c b$

$\frac{7}{3}$ $\frac{5}{2}$

m n k

$2\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)$ $2\log_{6x-14}(x-1)$ $\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)$

$\log_4 2^2=\log_4 4=1$

$2\log_a b$ $2\log_b c$ $\log_c a$

p

$x^2-\frac{7}{3}x-2=0$

$3x^2-7x-6=0$

$x=3$, $x=-\frac{2}{3}$

$mn=4\log_a c=\frac{4}{\log_c a}=\frac{4}{k}$

$nk=2\cdot\frac{2}{\log_a b}=\frac{4}{2\log_a b}=\frac{4}{m}$

$mnk=4$

$p^2(p-1)=4$

$p^3-p^2-4=0$

$(p-2)(p^2+p+2)=0$

$p=2$

~~$\log_{6x-14} x-1=1$~~

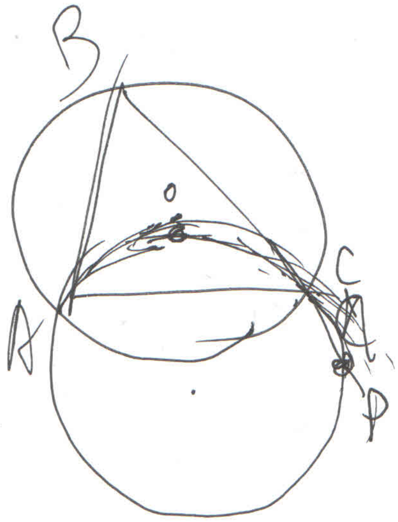
$x-1=6x-14$

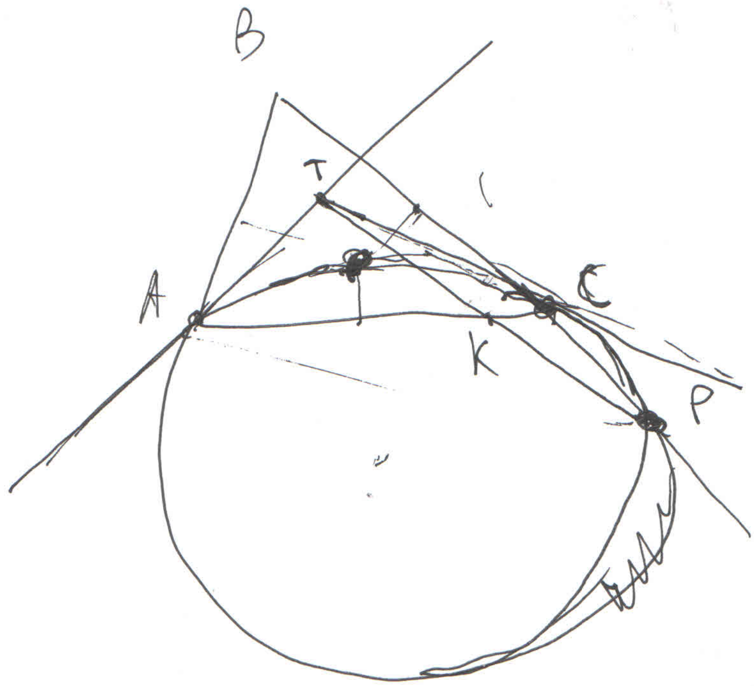
$13=5x \Rightarrow x=2,6$ – р.а II

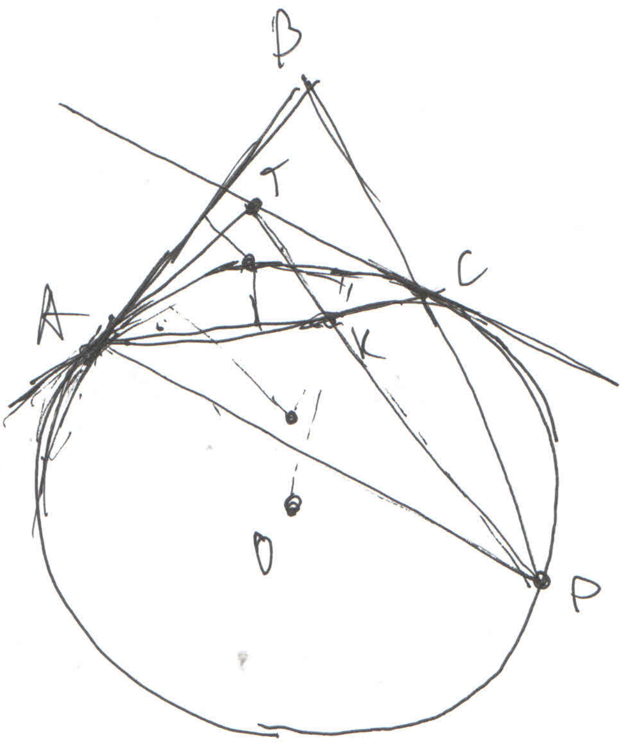
$\frac{x}{3}+3=6x-14 \Rightarrow x+9=18x-42 \Rightarrow 17x=51 \Rightarrow x=3$

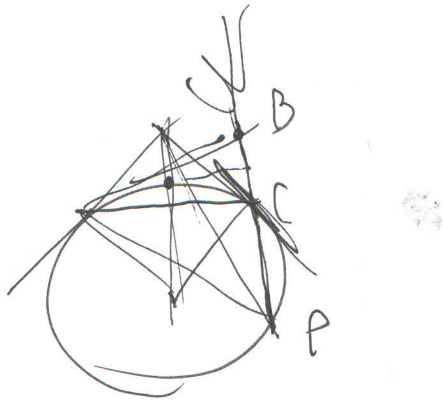
$\frac{x}{3}+3=(x-1)^2$

$x^2-\frac{?}{3}x+1=\frac{x}{3}+3$









$$1+tg^2=\frac{\sin^2}{\cos^2}+1=\frac{1}{\cos^2}\Rightarrow\cos^2=\frac{1}{1+tg^2}$$