Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102240**

ID профиля: **873833**

Вариант 18

13 вариант

№1

листовик

1

(1) $\begin{cases} a_7 \cdot a_{12} > S + 20 \\ a_9 \cdot a_{10} < S + 44 \end{cases}$ (2)

$$S = \frac{2a_1 + 6d}{2} \cdot 7 = 7a_1 + 21d$$

$a_7 = a_1 + 6d$ $a_{12} = a_1 + 11d$ $a_9 = a_1 + 8d$ $a_{10} = a_1 + 9d$

(1) $\begin{cases} (a_1 + 11d)(a_1 + 6d) > 7a_1 + 21d + 20 \\ (a_1 + 8d)(a_1 + 9d) < 7a_1 + 21d + 44 \end{cases}$ (2)

$a_1 = a$ (для удобства)

$$\begin{cases} \underbrace{a^2 + 17ad} + 66d^2 \underbrace{- 21d - 7a} > 20 \\ \underbrace{a^2 + 17ad} + 72d^2 \underbrace{- 21d - 7a} < 44 \end{cases}$$

$M + 66d^2 > 20$

$M + 72d^2 < 44$

левая часть отличается на $6d^2$, а правая на 24 $\Rightarrow$ $6d^2 < 24 \Rightarrow$

$d^2 < 4$

$d = \pm 1; 0$

$-1; 0$ не может быть так как прогрессия возрастающая чистовик

2

1) $d = 1$

$a^2 + 17a - 7a - 21 + 66 - 20 > 0$

$a^2 + 10a + 25 > 0$

$(a+5)^2 > 0$ $\quad a \Rightarrow \quad a \neq -5$

2) $d = 1$

$a^2 + 17a - 7a - 21 + 72 - 44 < 0$

$a^2 + 10a + 7 < 0$

$D = 72$

$a = \dfrac{-10 \pm 6\sqrt{2}}{2} = -5 \pm 3\sqrt{2}$

$a \in (-5 - 3\sqrt{2};\ -5 + 3\sqrt{2})$

$a \in [-9; -7]$ – мы взяли целые числа принадл. этому промежутку

Учитывая 1 пункт ~~Ответ: $a \in [9; 7] \cup \{$~~

Ответ: $a \in [-9; -7] \setminus \{-5\}$

чистовик

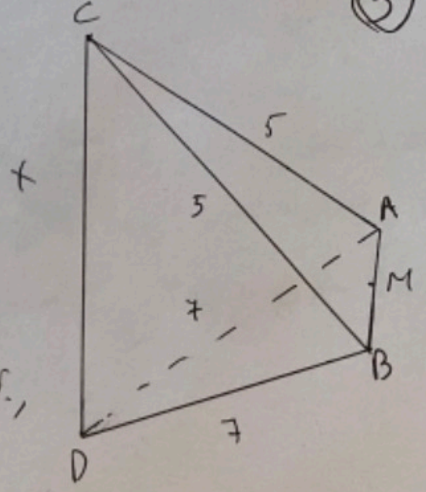
N2

3

AB = 2

AC = CB = 5

AD = DB = 7



1) Пусть M - середина AB.
т.к. $\triangle ABC$ и $\triangle BAD$ - равноб., то $CM \perp AB$ и $DM \perp AB$.

Тогда $AB \perp CMD \Rightarrow AB \perp CD$

т.к. $CD \parallel$ оси цилиндра, то $AB \parallel$ основанию.

2) Тогда AB - хорда. Так как радиус цилиндра минимальный, то AB - диаметр окружности параллельной основанию.

Радиус цилиндра равен 1, M находится в центре.

3) Из прямоугольных $\triangle CAM$ и $\triangle BDM$:

$$CM = \sqrt{5^2 - 1^2} = \sqrt{24}$$

$$DM = \sqrt{7^2 - 1^2} = \sqrt{48}$$

Рассмотрим сечение цилиндра плоскостью $\parallel$ основанию, проход. через AB.

X - точка на CD, ABX - вписанный

т.к. $CD \perp AB$ и $XM \perp AB$, то в силу

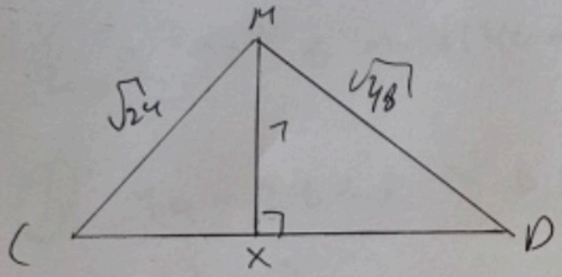
|| основанию, проходящ через AB.
X – точка на CD; ABX – вписан…
т.к. $CD \perp AB$ и $XM \perp AB$, то

чистовик

то в силу симметрии, то $XM \perp CD$. (4)

MX – радиус, $MX = 1$

Получим:



Если X лежит по одну из сторон от C и D, то: $CD = DX - CX = \sqrt{47} - \sqrt{23}$

Из т. Пифагора: $CX = \sqrt{24-1} = \sqrt{23}$

$DX = \sqrt{47}$

$CD = CX + DX = \sqrt{47} + \sqrt{23}$ – если X лежит между C и D

~~Ответ: $\sqrt{47} + \sqrt{23}$~~

Ответ: $CD = \sqrt{47} + \sqrt{23}$

$CD = \sqrt{47} - \sqrt{23}$

m. к CD ⊥ AB и XM ⊥ AB

N3

шестовка

(5)

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 5\\ a^2+b^2\le \min(4a-2b;5)\end{cases}$$

(1) $4a-2b<5 \to b\ge 2a-2{,}5$

$a^2+b^2\le 4a-2b$

$$\begin{cases}(a-2)^2+(b+1)^2=5\\ b=2a-2{,}5\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=\frac{4\pm 2\sqrt{3}}{4}=\frac{2\pm\sqrt{3}}{2}\\ b=\pm\sqrt{3}-0{,}5\end{cases}$$

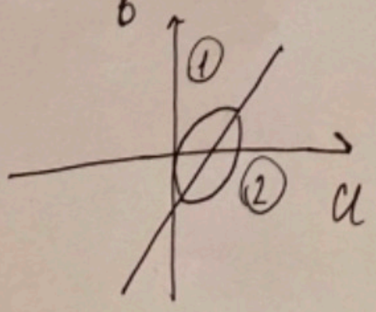
$(a-2)^2+(b+1)^2\le 5 \to O(2;-1)$
$R=\sqrt{5}$

(2) $b<2a-2{,}5$

$a^2+b^2\le 5 \to O(0;0)$
$R=\sqrt{5}$

$$\begin{cases}a^2+b^2=5\\ b=2a-2{,}5\end{cases} \to \begin{aligned}a&=\frac{2\pm\sqrt{3}}{2}\\ b&=\pm\sqrt{3}-0{,}5\end{aligned}$$

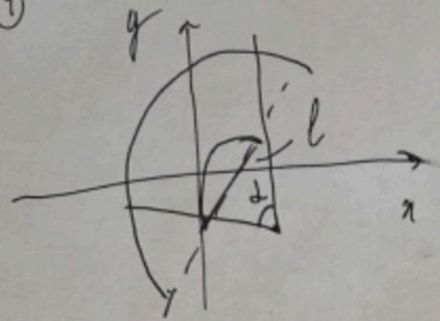
В коорд. $a; b$.



т.к. CD ⊥ AB и XM ⊥ AB

чистовик

(1) (6)



$\vec{p}(a_2-a_1;\ b_2-b_1)$

$$\begin{cases} a = \frac{2\pm\sqrt{3}}{2} \\ b = \pm\sqrt{3} - 0{,}5 \end{cases}$$

$\vec{p} = (\sqrt{3};\ 2\sqrt{3})$

$|\vec{p}| = \sqrt{15}$

По теореме Косинусов

$$15 = 5+5-10\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = -\frac{1}{2} \qquad \alpha = 120^\circ$$

Из симметрии

$$\frac{1}{2}S = \frac{\alpha}{360^\circ}\cdot\pi(2r)^2 - \frac{1}{2}r^2\cdot\sin\alpha + 2\cdot\frac{180^\circ-\alpha}{2\cdot 360^\circ}\pi r^2$$

$$\frac{1}{2}S = \frac{20}{3} - \frac{\sqrt{3}\cdot 5}{4} + \frac{5}{6})\pi$$

$$S = \frac{45}{3}\pi - \frac{5}{2}\sqrt{3}$$

∧ Ответ

Черновик

$M+16d^2>20$

$M+72d^2<4$

$d=\pm1;0$

$-1;\ 0$ — мимо

$D=-72$

$(a+5)>0 \quad a\neq-5$

$a\in[-9;-7]\setminus\{-5\}$

Черновик

$M+16d^2>20$

$M+72d^2<4$

$d=\pm1; 0$

$-1; 0$ — мимо

$D=72$

$(a+5)>0 \quad a\neq-5$

$a\in[-9;-7]\setminus\{-5\}$

черновик

S – сумма первых 7 членов

① $a_7 \cdot a_{12} > S + 20$

$a_1 = b_1 + t$

② $a_9 \cdot a_{10} < S + 44$

$S = (b+3t) \cdot 7$

① $\cancel{b + 7t - b - 12t >} 7b + 21t + 20$

$-5t > 7b + 21t + 20$

$\cancel{-26t > 7b + 20}$

② $(b+9t)(b+10t) < 7b + 21t + 44$

$b^2 + 19tb + 90t^2 < 7b + 21t + 44$

$$\begin{cases} 21t > 7b + 20 \\ b^2 + 19tb + 90t^2 < 7b + 21t + 44 \end{cases}$$

$\cancel{①}$

$a^2 + 17ad + 66d^2 - 21d - 7a > 20$

$a^2 + 17ad + 72d^2 - 21d - 7a < 44$

№2

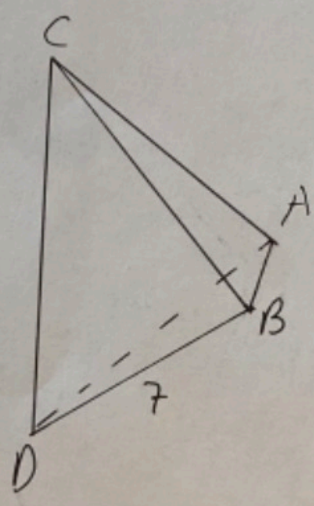
черновик

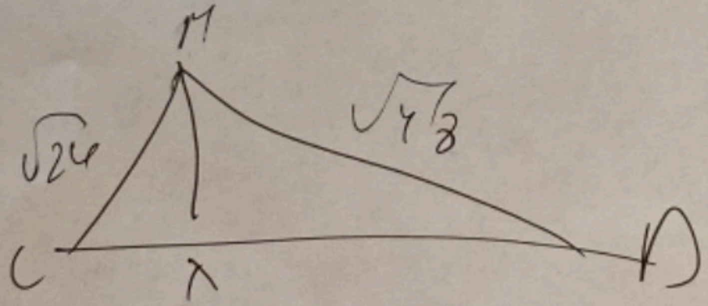
$AB = 2$

$AC = CB = 5$

$AD = DB = 7$

$XM \perp CD$





$CM = \sqrt{24}$

$DM = \sqrt{8^2 - 1^2} = 48$

~~бо~~ Сечение цилиндра плоскостью

|| основанию $\quad CD \perp AB$ и $XM \perp AB$

$\Rightarrow CD = CX + DX = \sqrt{47} + \sqrt{33}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102240**

ID профиля: **873833**

Вариант 18

вариант – 18 чистовик

№5 1

$\log_{a} b \cdot \log_{b} c = \log_{a} c$

ОДЗ: $x \neq \frac{15}{6}$

$x > \frac{7}{3}$

1) $\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}} (6x-14)$, $\log_{(6x-14)} (x-1)^2$, $\log_{(x-1)} \left(\frac{x}{3}+3\right)$

$\quad\; \overset{||}{A} \qquad\qquad \overset{||}{B} \qquad\qquad \overset{||}{C}$

$6x \neq 15$

$A \cdot B \cdot C = \frac{1}{\frac{1}{2}} \log_{\left(\frac{x}{3}+3\right)} (6x-14) \cdot 2 \log_{(6x-14)} (x-1) \cdot \log_{(x-1)} \left(\frac{x}{3}+3\right) = 4$

Пусть $A = C \Rightarrow B = A-1$

Получаем $A^2(A-1) = 4$ Решим ур-е $A^3 - A^2 - 4 = 0$

$(A-2)(A^2 + A + 2) = 0$

$D < 0$

$\Rightarrow$ ед. корень

$A = 2 \Rightarrow \log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}} (6x-14) = 2$

$\Leftrightarrow \frac{x}{3} + 3 = 6x - 14 \Leftrightarrow x = 3 \in$ ОДЗ

Проверка при $x = 3$

B: $\log_{(6x-14)} (x-1)^2 = \log_4 4 = 1$

C: $\log_{(x-1)} \left(\frac{x}{3} + 3\right) = \log_2 4 = 2$

Теперь рассмотрим, когда $C = 1$

$\log_{(x-1)} \left(\frac{x}{3}+3\right) = 1 \Leftrightarrow x - 1 = \frac{x}{3} + 3 \Leftrightarrow x = 6$

Тогда A: $\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}} (6x-14) = \log_{\sqrt{5}} 22 \neq 2$

$A = 1$

$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+2}} (6x-14) = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{3} + 3 = 36x^2 - 168x + 196$ Ответ: $x = 3$

№4

шамовск

2

$$\begin{cases} \text{НОД}(a,b,c) = 15 \\ \text{НОК}(a,b,c) = 3^{15}\cdot 5^{18} \end{cases}$$

Пусть $a = 15a'$, $b = 15b'$, $c = 15c'$. Тогда:

НОД $(a', b', c') = 1$; т.к если он больше, то и НОД $(a,b,c) > 15$

При этом a', b' и c' имеют вид $3^x\cdot 5^y$, $x \geq 0$ $y \geq 0$. Но если в одном из них $x>0$, то во всех остальных равен 0. т.к иначе НОД будет степень тройки >0. Аналогично про y. Тогда a', b', c' имеет вид либо

$\{3^x, 5^y, 1\}$ либо $\{3^x\cdot 5^y, 1, 1\}$

Чтобы выполнялось, что НОК $(a,b,c) = 3^{15}\cdot 5^{18}$ нужно, чтобы $x = 14$, $y = 17$.

Тогда искомых тройки две, с точнос с точностью до порядка a, b, c

~~$\{3\cdot 5$~~ $\{5\cdot 3^{15}, 3\cdot 5^{18}, 15\}$ и

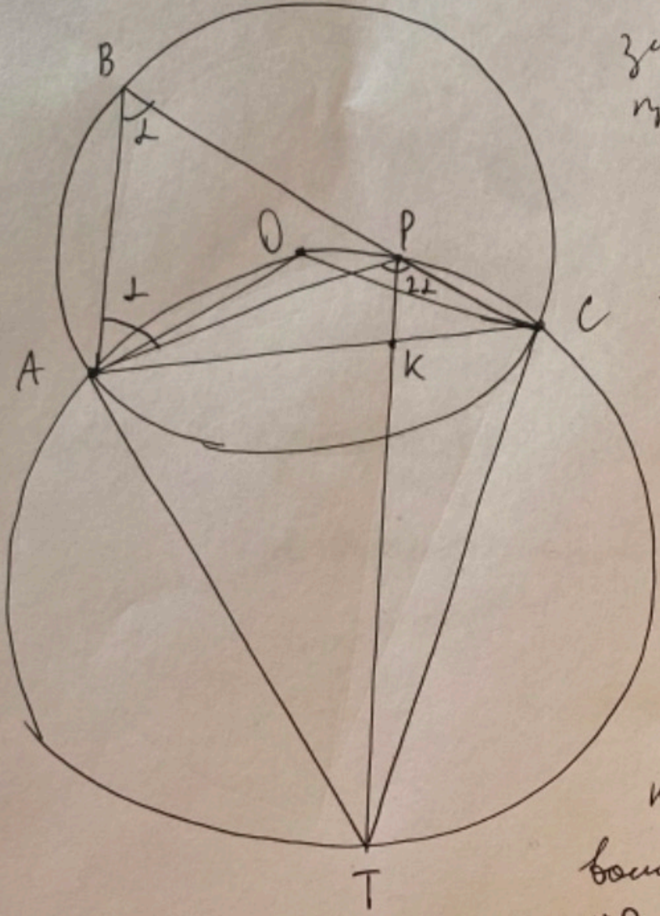
$\{3^{15}\cdot 5^{18}, 15, 15\}$

21102240 (U873833 M1297566)

N 6

чистовик

3



1) $\angle OAT = \angle OCT = 90^\circ$, а значит точки A, O, P, C, T принадлежат одной окружности. Более того, $AT = TC$

$\Rightarrow PK$ - бисс. $\angle CPA$

$\Rightarrow \frac{AK}{KC} = \frac{AP}{PC}$.

Также по усл. $\frac{AK}{KC} = \frac{S_{APK}}{S_{PKC}} = \frac{6}{5}$

$\Rightarrow \frac{AP}{PC} = \frac{6}{5}$,

но так же выполняется условие:

$$11 = 6+5 = S_{APK} + S_{PKC} = S_{CAP} = \frac{AP \cdot CP \cdot \sin(APC)}{2};$$

$\hookrightarrow PC = \frac{5}{6} AP$, получим: $11 = \frac{\frac{5}{6} AP^2 \cdot \sin(APC)}{2}$

выходит, что $AP^2 \cdot \sin\angle APC = \frac{110}{3}$

$\angle CBA = \alpha$, $\angle CPA = 2\alpha \Rightarrow \angle BAP = \alpha$

т.е. ΔBPA - равнобедренный и $BP = \cancel{AB}\ AP$,

но $S_{ABP} = \frac{AP \cdot BP \cdot \sin\angle APB}{2} = \frac{110}{3}$

т.к. $\angle APB + \angle APC$ - развернутый (180°)

чистовик (4)

$\Rightarrow S_{ABD} + S_{ADC} = \frac{143}{3}$

б) По условию: $tg\,\alpha = \frac{1}{2}$, $\Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{2}$

при этом $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, тогда

Далее $\sin\angle ADC = \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha =$

не успела всё

написать

вариант - 18 ~~[illegible]~~ черновик

№5 ОДЗ: $x \neq 9{,}5$; $x \neq 7$

$x \neq -6$ $\quad x > 1$

$x > \frac{7}{3}$ $\quad x > -9$

$\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$

1) $\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-74)$, $\quad \log_{(6x-74)}(x-7)^2$, $\quad \log_{(x-7)}\left(\frac{x}{3}+3\right)$

$\quad\quad A \quad\quad\quad\quad\quad\quad B \quad\quad\quad\quad\quad\quad C$

$$A \cdot B \cdot C = \frac{1}{\frac{1}{2}} \log_{\left(\frac{x}{3}+3\right)}(6x-74) \cdot 2\log_{(6x-74)}(x-7) \cdot \log_{(x-7)}\left(\frac{x}{3}+3\right) =$$

$$= 4$$

Пусть $A = B \Rightarrow C = A - 1$

получаем $A^2(A-1) = 4$. Решим ур-е:

$A^3 - A^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (A-2)(A^2 + A + 2) = 0$

$D < 0$

ед. корень

$A = 2 \Rightarrow \log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-74) = 2$

$\Leftrightarrow \frac{x}{3} + 3 = 6x - 74 \Leftrightarrow 77 = \frac{17}{3}x \Leftrightarrow x = 3$

Ответ: 3

черновик

$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)$; $\log_{(6x-14)}(x-1)^2$

$\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)$

$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14) = \log_{(6x-14)}(x-1)^2$

$\cancel{\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14) - \frac{1}{\log_{(x-1)^2}(6x-14)}} = 0$

$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14) - \log_{(6x-14)}(x-1)^2 = 0$

$\frac{\log_{(6x-14)}(6x-14)}{\log_{(6x-14)}\sqrt{\frac{x}{3}+3}} - \log_{(6x-14)}(x-1)^2 = 0$

$\log_{(6x-14)}(6x-14) - \log_{(6x-14)}(x-1)^2 \cdot \log_{(6x-14)}\sqrt{\frac{x}{3}+3} = 0$

$1 = \underbrace{\log_{(6x-14)}(x-1)^2}_{k} \cdot \underbrace{\log_{(6x-14)}\sqrt{\frac{x}{3}+3}}_{\frac{1}{k}}$

$1 = k \cdot \frac{1}{k} \Rightarrow \quad \log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}} \log(6x-14) = \log_{6x-}$

~~вариант 13~~ ~~чистовик~~ ~~вар~~ черновик

№4

$$\begin{cases} НОД(a,b,c)=15 \\ НОК(a,b,c)=3^{15}\cdot 5^{18} \end{cases}$$

$$НОК(a,b,c) = \frac{a\cdot b\cdot c}{НОД(a,b,c)} \to$$

$$\to abc = 3^{16}\cdot 5^{19}$$

Пусть: $a=15a'$, $b=15b'$, $c=15c'$, тогда $НОД(a',b',c')=1$, т.к если он больше 1, то и $НОД(a,b,c)>15$

$$a'\cdot b'\cdot c' = \frac{a\cdot b\cdot c}{15^3} = 3^{13}\cdot 5^{16}$$

Тогда $НОК(a',b',c')=3^{13}\cdot 5^{16}$. Но тогда $НОК(15a',15b',15c') = НОК(a,b,c) = 15\,НОК(a',b',c')$ $= \cancel{15}\ 3^{14}\cdot 15^{17}$. Но он должен равен $3^{15}\cdot 5^{18}$.

Противоречие.