Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102116**

ID профиля: **54188**

Вариант 18

Чистовик.

№1.

d – разность прогрессии $d \in \mathbb{N}$. (т.к. $a_i \in \mathbb{Z}$; $d>0$; $i \in \mathbb{N}$).

$$\Rightarrow S = \frac{2a_1 + 6d}{2} \cdot 7 = 7a_1 + 21d;$$

$$\left.\begin{matrix} a_7 = a_1 + 6d \\ a_{12} = a_1 + 11d \end{matrix}\right\} \Rightarrow a_7 \cdot a_{12} = a_1^2 + 17a_1 d + 66d^2 > 7a_1 + 21d + 20$$

$$\left.\begin{matrix} a_9 = a_1 + 8d \\ a_{10} = a_1 + 9d \end{matrix}\right\} \Rightarrow a_9 a_{10} = a_1^2 + 17a_1 d + 72d^2 < 7a_1 + 21d + 44$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 17a_1 d + 66d^2 > 7a_1 + 21d + 20 & | \cdot -1 \\ + \\ a_1^2 + 17a_1 d + 72d^2 < 7a_1 + 21d + 44 \end{cases}$$

$$6d^2 < 24$$

$$d^2 < 4$$

$$0 < d < 2 \Rightarrow d = 1. \quad (\text{т.к. } d \in \mathbb{N})$$

$$\cancel{\Rightarrow a_1^2 + 17a_1 + 66 < 7a_1 + 21 + 44; \quad a_1 \in \mathbb{Z};}$$

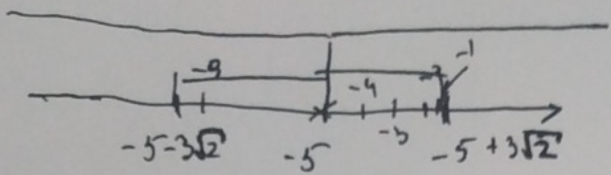
$$\begin{cases} a_1^2 + 17a_1 + 66 > 7a_1 + 21 + 20 \\ a_1^2 + 17a_1 + 72 < 7a_1 + 21 + 44; \quad a_1 \in \mathbb{Z}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0; \\ a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a_1 + 5)^2 > 0; \\ (a_1 + 5 + 3\sqrt{2})(a + 5 - 3\sqrt{2}) < 0; \quad a_1 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Чистовик.

№1. (продолжение).

Лист 2 из 5



$a_1 \in \mathbb{Z}$.

$a_1 = -9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1$

Ответ: $a_1 = -9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1$

М:

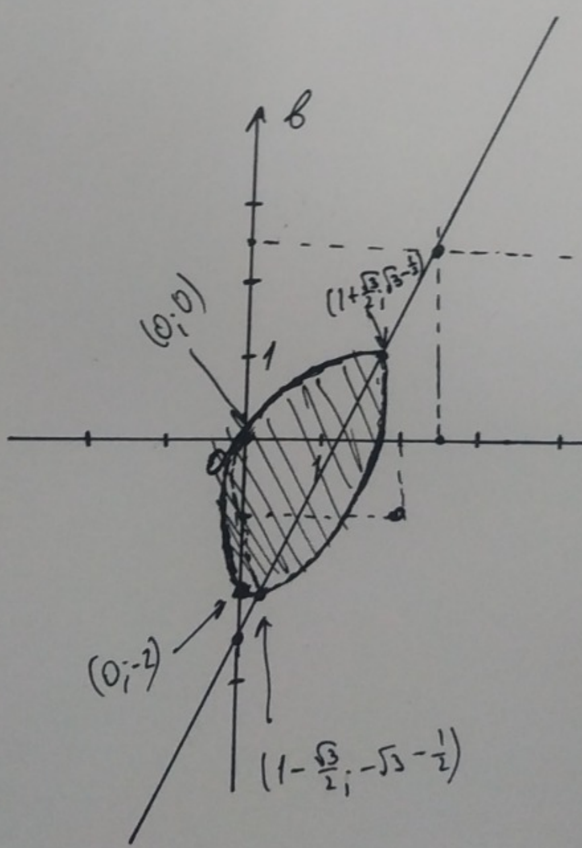
$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 5; & (1) \\ a^2+b^2 \le \min(4a-2b;\ 5) & (2) \end{cases}$$

(1): – круг с центром в $(a;b)$ и $R=\sqrt{5}$;

(2):

$$a^2+b^2 \le \min(4a-2b;5);$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a^2+b^2 \le 4a-2b; \iff (a-2)^2+(b+1)^2 \le 5; \\ 4a-2b \le 5; \end{cases} \\ \begin{cases} a^2+b^2 \le 5; \\ 4a-2b \geqslant 5; \end{cases} \end{array}\right.$$

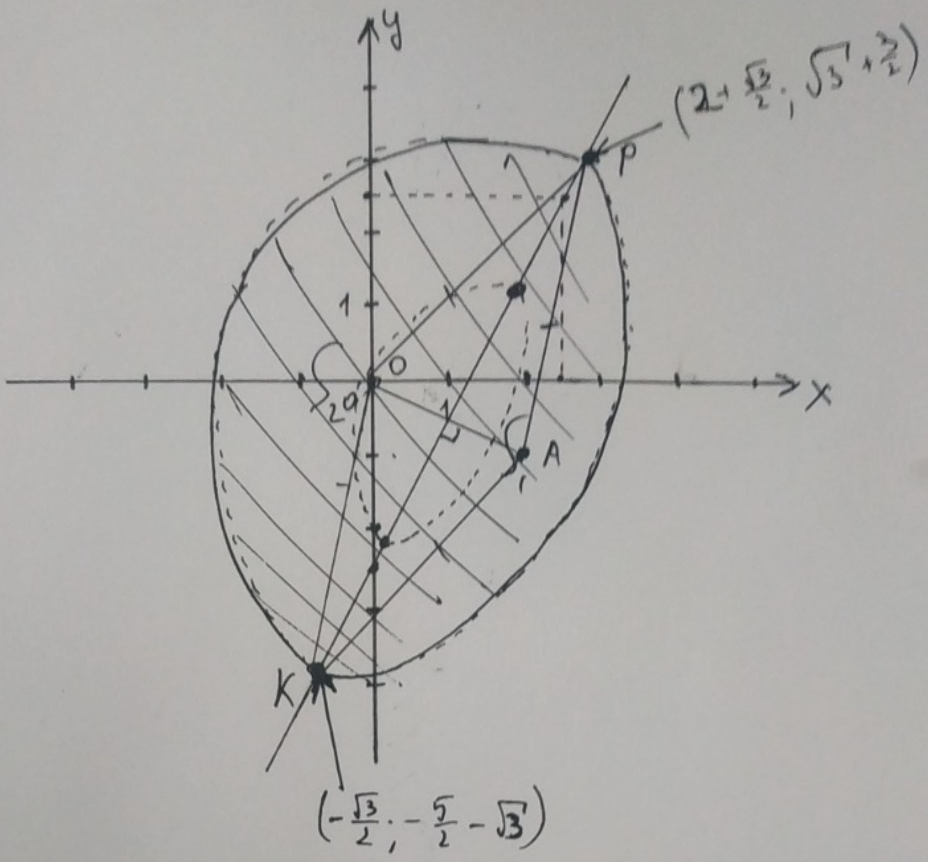


Заметим, что в координатах $(x;y)$ эта фигура будет область, внутри по которой „бегает" центр (1);

№ 3 Чистовик (продолжение) Лист 4 из 5.

M:

(эскиз)



$S_M = S_1 + S_2.$

OPAK – ромб $\left(\text{т.к. } OP = OK = AK = AP = \sqrt{\left(2+\frac{\sqrt3}{2}\right)^2+\left(\sqrt3+\frac32\right)^2} = \sqrt{10+5\sqrt3} = R_1\right)$

$OA = \sqrt5 \Rightarrow \sin\angle KAP = \dfrac{\sqrt{(35+20\sqrt3)5}}{4(10+5\sqrt3)} = \dfrac{\sqrt{7+4\sqrt3}}{8+4\sqrt3} = \sin\angle KOP$

$S_{\triangle KAP} = S_{\triangle KOP} = \dfrac{(10+5\sqrt3)\sqrt{7+4\sqrt3}}{2\cdot 4(2+\sqrt3)} = \dfrac{5\sqrt{7+4\sqrt3}}{8}$

$\Rightarrow S_1 = \dfrac{R_1^2 \arcsin\angle KAP}{2} - S_{\triangle KAP};\quad S_2 = \dfrac{R_1^2 \arcsin\angle KOP}{2} - S_{\triangle KOP} = S_1$

$\Rightarrow S_M = R_1^2 \arcsin\angle KAP - 2S_{\triangle KAP} =$

$= 5(2+\sqrt3)\arcsin\left(\dfrac{\sqrt{7+4\sqrt3}}{4(2+\sqrt3)}\right) - \dfrac{5\sqrt{7+4\sqrt3}}{4};$

Ответ: $S_M = 5(2+\sqrt3)\arcsin\left(\dfrac{\sqrt{7+4\sqrt3}}{4(2+\sqrt3)}\right) - \dfrac{5\sqrt{7+4\sqrt3}}{4};$

21102116 (U54188 M1304970)

№2 Чистовик.

БП - боковая поверхность

Дано: $ABCD$

$AB = 2$;

$AC = CB = 5$

$AD = DB = 7$.

$CD_{min} = ?$

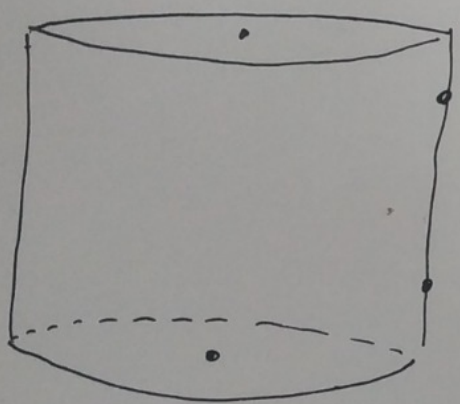
1) Т.к. $A; B; C; D \in$ БП и $CD \parallel$ оси цилиндра

$\Rightarrow$ $CD \not\subset$ БП

2) Также заметим, что радиус цилиндра

будет min, когда $(ABC) \parallel$ основанию цилиндра

$\left(r = \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$



Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102116**

ID профиля: **54188**

Вариант 18

$НОД(a;b;c) = 15 = 3\cdot 5;$

$НОК(a;b;c) = 3^{15}\cdot 5^{18}$

Заметим, что $a;b;c$ не могли делиться одновременно на 3^i; $i \in \{2;3;\ldots;\cancel{15}\}$ или 5^j; $j \in \{2;3\ldots\}$

(т.к. тогда НОД был не равен 15).

Также у ~~простых чисел~~ $a;b;c$ из простых делителей только 3 и 5 (т.к. тогда НОК был бы другой)

I случ. $c = 3\cdot 5$ $\cancel{(\Rightarrow a\cdot b = 3^{16}\cdot 5^{19})}$: тогда кол-во ~~пар~~ пар $(a;b)$:

$$C_{16}^2\cdot C_{19}^2 = \frac{16!\cdot 19!}{2!\cdot 14!\cdot 2!\cdot 17!} = \frac{15\cdot 16\cdot 18\cdot 19}{4} = 18\cdot 19\cdot 60$$

II случ. $c = 3\cdot 5^i$; $i \in \{\cancel{2};1$

Т.е. одно число $\vdots 3$, но $\not\vdots\, 9$, и ещё одно $\vdots 5$, но $\not\vdots\, 25$

(это может быть одно и тоже число)

1) Пусть $a = 3\cdot 5^x$; $b = 3^y\cdot 5$; $c = 3^z\cdot 5^w$

кол-во вариантов $(y;z)$: $C_{15}^1 = 15$

кол-во вариантов $(x;w)$: $C_{18}^1 = 18$

$\Rightarrow$ кол-во вариантов $(x;y;z;w)$: $C_{15}^1\cdot C_{18}^1$

$\Rightarrow$ кол-во $(a;b;c)$: $3!\cdot C_{15}^1\cdot C_{18}^1 = 6\cdot 15\cdot 18 = 1620$

Ответ: 1620.

$$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14); \quad \log_{6x-14}(x-1)^2; \quad \log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)$$

1) ОДЗ:

$$\begin{cases} \frac{x}{3}+3>0 \\ 6x-14>0 \\ x-1>0 \\ x-1\neq 1 \\ \sqrt{\frac{x}{3}+3}\neq 1 \\ 6x-14\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\frac{7}{3} \\ x>-9 \\ x>-9 \\ x\neq 2 \\ x\neq -6 \\ x\neq \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x\in\left(\frac{7}{3};+\infty\right)/\left\{\frac{5}{2}\right\}$$

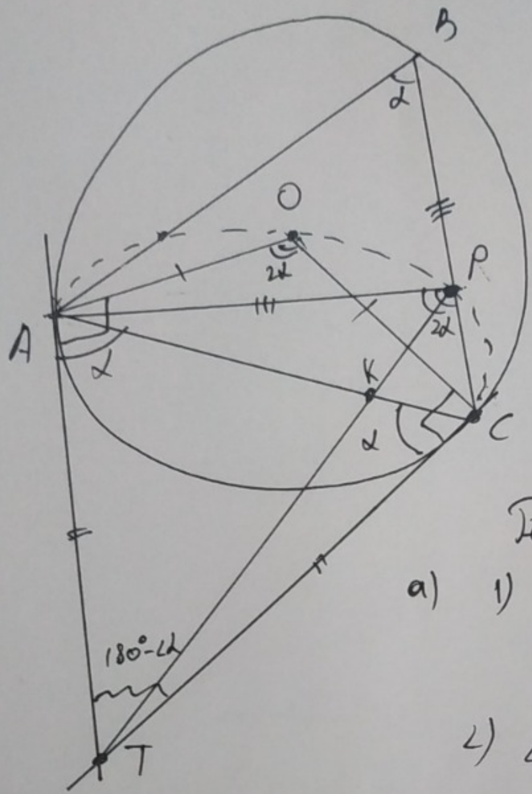
2) Заметим, что $\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)\cdot\log_{(6x-14)}(x-1)^2\cdot\log_{(x-1)}\left(\frac{x}{3}+3\right)=4; \forall x\in ОДЗ$

№6. Черновик Лист 3 из 4

Дано: окр. $(O; R)$ – окружн.
ΔABC – впис. в окр.

$S_{\Delta APK} = 6$
$S_{\Delta KPC} = 5$

а) $S_{\Delta ABC}$ – ?
б) $\angle ABC = \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$
AC – ?



Решение:

а) 1) Пусть $\angle ABC = \alpha \Rightarrow \angle AOC = 2\alpha$
(т.к. $\angle AOC$ – центральный); $\angle TAC = \angle TCA = \frac{\smile AC}{2} = \alpha$ (угол между кас. и хорд.)

2) $\angle OAT = \angle OCT = 90^\circ$ т.к. AT и CT – кас. окр.
$\Rightarrow AOCT$ – впис $\Rightarrow \angle ATC = 180^\circ - 2\alpha$

3) $AOPC$ – впис (по усл.) $\Rightarrow \angle AOC = \angle APC = 2\alpha$
$\Rightarrow APCT$ – впис (по приз.) $(\angle ATC + \angle APC = 180^\circ - 2\alpha + 2\alpha = 180^\circ)$
$\Rightarrow \angle TPC = \angle TAC = \alpha$; $\angle APT = \angle ACT = \alpha \Rightarrow PT$ – бис-са $\angle APC$.

4) Т.к. $\angle TPC = \angle ABC = \alpha \Rightarrow PT \parallel AB$ (по приз.); $\angle BAP = \angle APT = \alpha$
$\Rightarrow \Delta APB$ – р/б $\Rightarrow AP = PB$

5) по св-ву бис-сы PK в ΔAPC: $\frac{AK}{KC} = \frac{AP}{PC}$
в ΔAPC: $\frac{S_{\Delta APK}}{S_{\Delta KPC}} = \frac{AK}{KC} = \frac{6}{5}$ (т.к. высота общ.) $\Rightarrow \frac{AP}{PC} = \frac{6}{5}$

т.к. $AP = BP \Rightarrow \frac{BP}{PC} = \frac{AP}{PC} = \frac{6}{5} \Rightarrow \frac{PC}{BP} = \frac{5}{6} \Rightarrow \frac{PC}{BC} = \frac{5}{11}$

6) $\Delta ABC \sim \Delta KPC$ (по 2 углам): ~~$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta KPC}} = \left(\frac{BC}{PB}\right)^2 = \frac{25}{121}$~~

$\frac{S_{\Delta KPC}}{S_{\Delta ABC}} = \left(\frac{PC}{BC}\right)^2 = \frac{25}{121} \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{121}{25} \cdot S_{\Delta KPC} = \frac{121}{5}$

б) 1) $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} \Rightarrow tg\alpha = \frac{1}{2}$; $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$; $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$;

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin\alpha = \frac{121}{5} \Rightarrow AB \cdot BC = \frac{242}{\sqrt{5}}$

2) по обобщ. теор. синусов: $R = \frac{AC}{2\sin\alpha} = \frac{BC}{2\sin\angle BAC} = \frac{AB}{2\sin\angle ACB}$

$AC = 2R\sin\alpha. = \frac{2R}{\sqrt{5}}$

21102116 (U54188 M1304971)