Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102102**

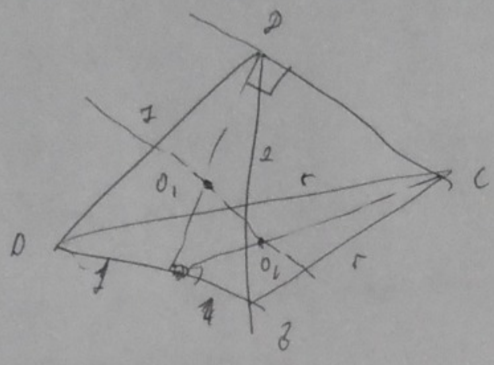
ID профиля: **367917**

Вариант 18

№2 Чистовик.

Радиус минимален, когда это ортогон. проекция

R оп. окр. Δ ADB



$CD = \sqrt{(7^2-1^2)-(5^2-1^2)} = \sqrt{24} =$

$= 2\sqrt{6}$

$O_1O_2 \parallel CD$

№3 Чистовик

Нарисуем множество точек a и b, таких что:

$a^2+b^2 \le \min(4a-2b;5)$

$$\left[\begin{array}{l} a^2+b^2 \le 4a-2b \\ a^2+b^2 \le 5 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} (a-2)^2+(b+1)^2 \le 5 \\ a^2+b^2 \le 5 \end{array}\right.$$

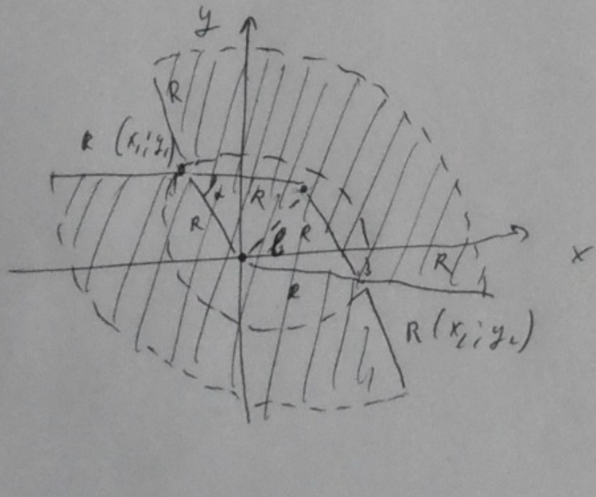
Пусть $a^2+b^2>5 \Rightarrow 4a-2b<5 \Rightarrow a^2+b^2>4a-2b$
Пусть $a^2+b^2>4a-2b \Rightarrow 5<4a-2b \Rightarrow a^2+b^2>5$ $\Bigg\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ эти два неравенства должны быть верны одновременно.

$$\begin{cases} (a-2)^2+(b+1)^2 \le 5 \\ a^2+b^2 \le 5 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} a-x \\ b-y \end{array}$$

область пересечения двух кругов с $R=\sqrt{5}$ и центрами $(0;0)$ и $(2;-1)$.

Неравенство $(x-a)^2+(y-b)^2 \le 5$ – задаёт ГМТ, являющееся кругом с центром $(a;b)$ и $R=\sqrt{5}$ $\Rightarrow$ конечное множество точек выглядит так:



$l = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5} \Rightarrow l = R \Rightarrow \angle = 120 \Rightarrow \beta = \frac{2\pi}{3}$

$S_м = \frac{1}{2} \alpha \cdot R^2 \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{10}{3}\pi \cdot \frac{1}{2} = \frac{10}{6}\pi$

№1 Чистовик.

$$S = \frac{(2a_1+6d)\cdot 7}{2} = (a_1+3d)\cdot 7,$$ где d – разн. прогрессии.

$$\begin{cases}(a_1+6d)(a_1+11d) > (a_1+3d)\cdot 7+20\\ (a_1+8d)(a_1+9d) < (a_1+3d)\cdot 7+44\end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$66d^2+22 > 72d^2+20$$

$$\Downarrow$$

$20 > 6d^2$, т.к. $d>0 \Rightarrow d=1$.

Получим:

1) $a_1^2+17a_1+66 > 7a_1+21+20$

$a_1^2+10a_1+25>0$

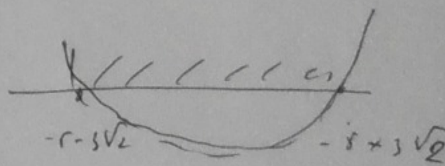
$(a_1+5)^2>0$ – справедливо при $\forall a_1$.

2) $a_1^2+17a_1+72 < 7a_1+21+44$

$a_1^2+10a_1+7<0$

$\sqrt{D} = 6\sqrt{2}$

$a_1 = \frac{-10\pm 6\sqrt{2}}{2} = -5\pm 3\sqrt{2}$



$\cancel{8<6\sqrt{5}<9}$ $\left.\begin{array}{l}-10<-5-3\sqrt{2}<-9\\ -1<-5+3\sqrt{2}<0\end{array}\right\} \Rightarrow a_1 \in [-9;-1];\ a\in\mathbb{Z}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102102**

ID профиля: **367917**

Вариант 18

Чистовик

$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-17)=2y_1$

$\log_{6x-17}(x-1)^2=2y_2$

$\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)=\frac{1}{y_1y_2}$

Рассмотрим 3 случая:

1) $y_2=y_1=y \Rightarrow \frac{1}{y^2}+1=2y \Rightarrow 2y^3-y^2-1=0 \Rightarrow y=1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 6x-17=\frac{x}{3}+3$; ~~так~~ $6x-17=x-1$.

В первом случае получим, что $x=3$, а во втором, $x=\frac{13}{5}$ –

– против.

2) $\frac{1}{y_1\cdot y_2}=2y_2 \Rightarrow \begin{cases}\frac{1}{y_1}=2y_2^2\\ 2y_1+1=2y_2\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix}y_2=1\\ y_1=\frac{1}{2}\end{matrix}$

Получаем, что $x=\frac{13}{5}$ и $(x-1)^2=\frac{x}{3}+3$, где корни $x=3$; $-\frac{2}{3}$ –

– не подходит.

3) $\frac{1}{y_1\cdot y_2}=2y_1 \Rightarrow \begin{cases}\frac{1}{y_2}=2y_2^2\\ 2y_2+1=2y_1\end{cases} \Rightarrow \begin{matrix}y_1=1\\ y_2=\frac{1}{2}\end{matrix}$

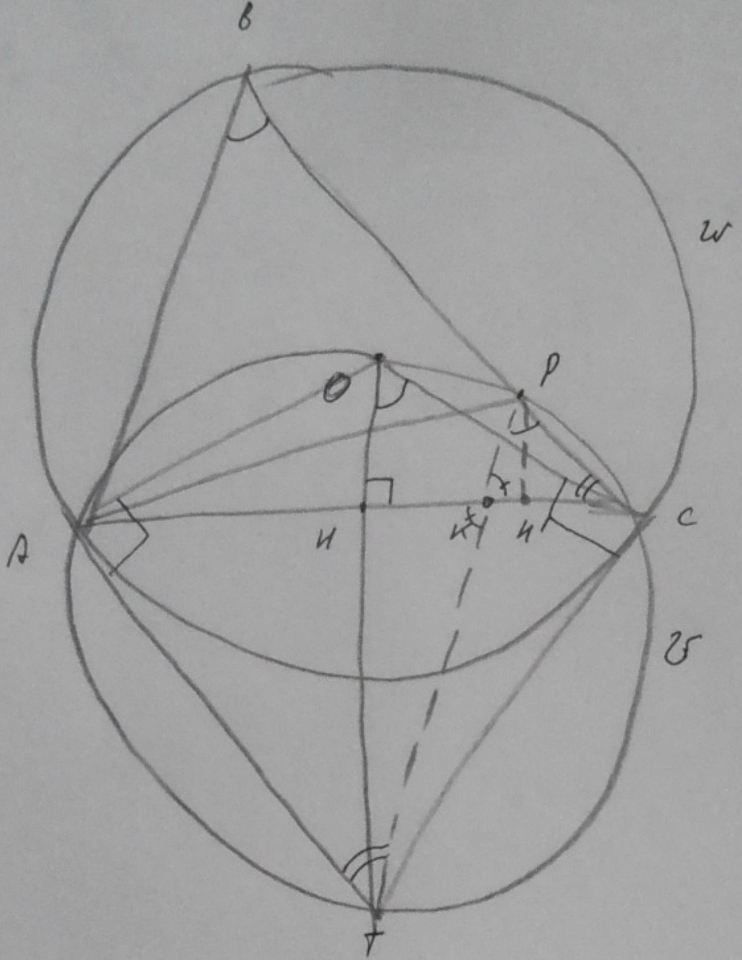
решая уравн., получаем, что $x=3$ $\left(\frac{x}{3}+3=6x-17\right)$

Подставим его в остальные урав.!

$\log_{\sqrt{4}}2=2$ $\quad \log_2 4=2 \Rightarrow x=3$ – подходит

$\log_4 2^2=1$ $\quad x=3$ – удовлетворяет ОДЗ

Ответ: $x=3$



Окр, описанная около $AOPC$ – υ, заметим, что $AOCT$ –
– вписанный четырёхугольник, т.к $\angle OAT + \angle OCT = 180^\circ \Rightarrow$
$\Rightarrow T \in \upsilon$; $\angle TOC = \angle AOC$ (по свойству центра окр.);
т.к. $\angle TPC$ и $\angle TOC$ опир. на одну дугу $\Rightarrow \angle TPC = \angle TOC \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle TPC = \angle ABC \Rightarrow AB \parallel KP \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle KPC$ по двум углам
; $k = \dfrac{AC}{CK} = \dfrac{11}{5}$ $(AK/KC = S_{APK} : S_{KPC}) \Rightarrow S_{ABC} = \dfrac{121}{25} \cdot 5 =$
$= \dfrac{121}{5}$

$\frac{TH}{PH'} = \frac{6}{5}$; $OC = R \Rightarrow TC = \frac{R}{2}$; $CH = \frac{R}{\sqrt{5}}$; $OH = \frac{2R}{\sqrt{5}}$; $TH = \frac{R}{2\sqrt{5}}$

$\frac{CH}{AC} = \frac{1}{2}$; $\frac{CK}{DC} = \frac{5}{11} \Rightarrow \frac{CH}{CK} = \frac{11}{10}$

$CK = \frac{10}{11}$ $CK = \frac{10R}{\sqrt{5}\cdot 11}$ $S_{KPC} = \frac{1}{2} CK \cdot PH' = \frac{1}{2} \cdot \frac{10R \cdot 5 \cdot R}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}\cdot 11 \cdot 12} =$

$PH' = \frac{5}{6} TH = \frac{5R}{12\cdot\sqrt{5}}$

$= \frac{5R^2}{2\cdot 66} = 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow R^2 = 2\cdot 66 \Rightarrow R = 2\cdot\sqrt{33} \Rightarrow CH = 2\sqrt{\frac{33}{5}} \Rightarrow AC =$

$= 2\sqrt{\frac{33}{5}}$

Чистовик стр 4.

№1 Чистовик

Заметим, что все числа $a; b; c \vdots 15$, а также не содержат других простых делителей помимо 3 и 5.

Представим числа в виде:

$a = 3 \cdot 5 \cdot 3^{x_1} \cdot 5^{y_1}$

$b = 3 \cdot 5 \cdot 3^{x_2} \cdot 5^{y_2}$

$c = 3 \cdot 5 \cdot 3^{x_3} \cdot 5^{y_3}$

Заметим, что:

$x_{max} + 1 = 15$

$y_{max} + 1 = 18$

Не умаляя общности, пусть $x_1 = max \Rightarrow$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x_2 = \{0; \dots ; 14\} \\ x_3 = \{0; \dots ; 14\} \end{array}\right\} \Rightarrow$ возм. пар $x_2; x_3$ — $15^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ возм. троек $(x_1; x_2; x_3)$ — $(3 \cdot 15^2 - 2)$ (см. $(14;14;14)$ – посчитан 3 раза).

Аналогично получаем, что возм. троек $(y_1; y_2; y_3)$ –

– $(3 \cdot 18^2 - 2) \Rightarrow$ кол. $(a; b; c) = (3 \cdot 15^2 - 2) \cdot (3 \cdot 18^2 - 2) =$

$= 9 \cdot 15^2 \cdot 18^2 - 6(18^2 + 15^2) + 4$

№2

О.Д.З.:

1) $\frac{x}{3} + 3 > 0$; $\frac{x}{3} + 3 \neq 1$

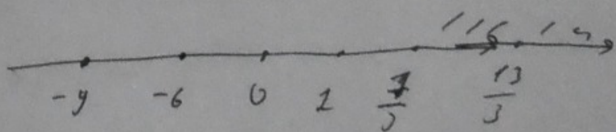
$x > -9$; $x \neq -6$

2) $6x - 14 > 0$; $6x - 14 \neq 1$

$x > \frac{7}{3}$; $x \neq \frac{13}{6}$

3) $x - 1 > 0$; $x - 1 \neq 1$

$x > 1$ $x \neq 0$



$x \in \left(\frac{7}{3}; \frac{13}{6}\right); \left(\frac{13}{6}; +\infty\right)$