Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102080**

ID профиля: **857313**

Вариант 18

Чистовик

① $d = a_2 - a_1$

$d > 0$, т.к. прогр $\uparrow \Rightarrow d \in \mathbb{Z}$; $a_2; a_1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow d \in \mathbb{N}$.

$a_n = a_1 + (n-1)d$

$S = a_1 + \ldots + a_7 = 7a_1 + 21.$

$$+\begin{cases} a_7 \cdot a_{12} > S + 20 \\ a_9 \cdot a_{10} < S + 44 \end{cases}$$

$a_7 \cdot a_{12} + \cancel{S} + 44 > \cancel{S} + 20 + a_9 \cdot a_{10} \Leftrightarrow a_7 \cdot a_{12} + 24 > a_9 \cdot a_{10}$

$(a_1 + 6d)(a_1 + 11d) + 24 > (a_1 + 8d)(a_1 + 9d)$

$\Leftrightarrow \cancel{a_1^2} + \cancel{17a_1 d} + 66d^2 + 24 > \cancel{a_1^2} + \cancel{17a_1 d} + 72d^2$

$\Leftrightarrow 24 > 6d^2 \Leftrightarrow -2 < d < 2$, $d \in \mathbb{N} \Rightarrow d = 1.$

$a_7 \cdot a_{12} > S + 20$

$(a_1 + 6d)(a_1 + 11d) > S + 20$

$\Leftrightarrow a_1^2 + 17a_1 + 66 > 7a_1 + 21 + 20$

$\Leftrightarrow (a_1 + 5)^2 > 0 \Rightarrow a_1 \neq -5.$

$a_9 \cdot a_{10} < S + 44$

$a_1^2 + 17a_1 d + 72d^2 < 7a_1 + 21 + 44$

$a_1^2 + 10a_1 d + 7 < 0$

$(a_1 + 5)^2 < 18$ $\quad / \ \sqrt{18} > 4 \quad 4$

$\Leftrightarrow -4 \leq a_1 + 5 \leq 4 \Leftrightarrow \begin{cases} -9 \leq a_1 \leq -1. \\ a_1 \neq -5. \end{cases}$

Ответ: $-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1.$

(2.)

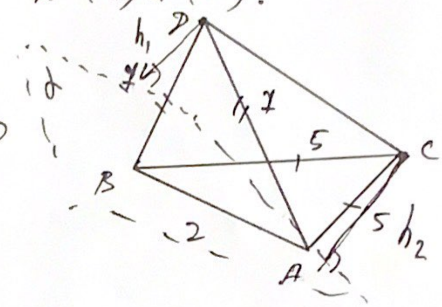
Чистовик

Проведём серединную пл-ть к AB

$AC = CB = 5$

$AD = DB = 7$.

Значит, эта пл-ть прох. через т. (C) и (D).



Обозначим ось цилиндра: l.

$CD \parallel l$, $AB \perp l$, значит $AB \perp CD$

Проведём через A пл-ть $\alpha \perp l$

Заметим: B лежит в α.

Поэтому AB - хорда на окр-ти цилиндра

Хорда по длине не превосходит диаметр

$\Rightarrow$ ее половина не превосходит радиус.

$R \geq \frac{AB}{2} = 1$

Существует такой цилиндр с $R=1$.

BC и BD можно отложить в 2 стороны $\Rightarrow$ сущ. 2 вар. расположения точек C и D.

$\exists$ высоты из т.(D) и (C) на пл-ть, проход. через AB, $\perp$ оси обозн. h_1 и h_2

Тогда, по т. Пиф-ра:

$1^2 + h_1^2 + 1^2 = AD^2 = 49$

$h_1 = \sqrt{47}$

$1^2 + h_2^2 + 1^2 = AC^2 = 25$

$h_2 = \sqrt{23}$

Тогда CD либо $h_1 - h_2 = \sqrt{47} - \sqrt{23}$, либо $h_1 + h_2 = CD = \sqrt{47} + \sqrt{23}$.

Ответ: $\sqrt{47} - \sqrt{23}$; $\sqrt{47} + \sqrt{23}$.

Чистовик

3.

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 5 \\ a^2+b^2 \le \min(4a-2b;\,5) \end{cases}$$

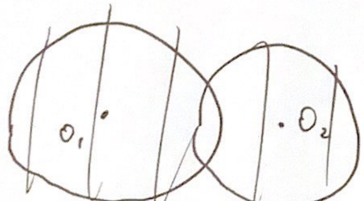
$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 5$ – просто означает, что $(x;y)$ – удалена от $(a;b)$ на не более чем $\sqrt{5}$.

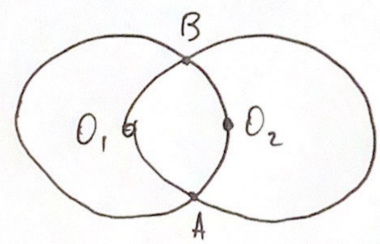
Построим все точки $(a;b)$ подходящие под 2ое ур-ие.

$$a^2+b^2 \le \min(4a-2b;\,5) \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2 \le 4a-2b \\ a^2+b^2 \le 5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

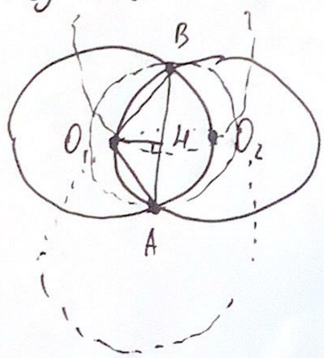
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-2)^2+(b+1)^2 \le 5 \\ a^2+b^2 \le 5 \end{cases} \Rightarrow$$ a, b – пересечение кругов с центрами в т. $(-2;1)$ и $R=\sqrt{5}$
т. $(0;0)$ и $R=\sqrt{5}$

и р-ие между центрами $= \sqrt{(-2)^2+1^2} = \sqrt{5}$



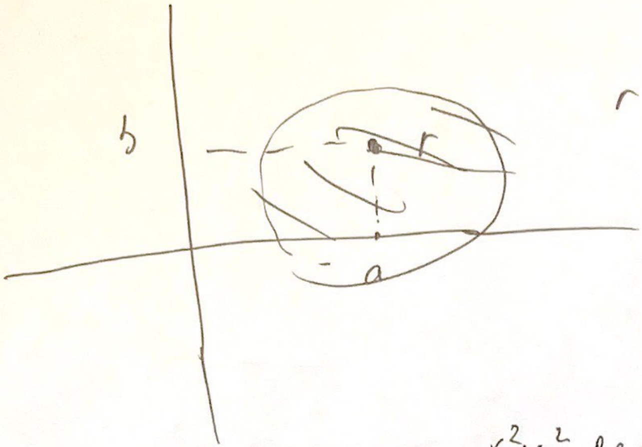


– След. у нас такая картина, а т. $(a;b)$ в области.
А т$(x;y)$ на р-ие $\le \sqrt{5}$ от этих точек.
Т.е. фигура М сост. из 2 секторов.



$S(ABO_2) = \frac{1}{3} S_{\text{окр. с ц. в}(O_1)} -$
$S_{\triangle AO_1B} = S_{\triangle AO_1B} = \frac{1}{2} \cdot O_1H \cdot AB =$
$= \frac{1}{2}\sqrt{5}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{5}\right)$

Исследование



$r = 5$

$S = \pi \cdot r = 5\pi$

$(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq 5$

$a^2 + b^2 \leq \min(4a - 2b; 5)$

$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 \leq 5$

$-\sqrt{18} < (a_1 + 5)^2 < \sqrt{18}$

$-3\sqrt{2} \quad -4 \quad 4 \quad 3\sqrt{2}$

$\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2} > 4$

44
24
65

77
-65
7

$3\sqrt{2} \quad \vee \quad 4$

$9 \cdot 2 \quad > \quad 16$

$-4 < a + 5 < 4$

$-9 < a < -1$

$(a_1 + 5)^2 = a_1 + 10a + 25 \leq 18$

$4 \leq \sqrt{18} < 5$

Черновик

1.

a_1 ; a_1+d ; a_1+2d . . . $a_1+?d$ $\qquad S_n = n\cdot a_1 +$

$\cancel{S_n = (a_1+d(n-1)) \Rightarrow S_7 = 5 = a_1+6d}$

$a_n \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow d \in \mathbb{Z}$

$a_{12} = a_1 + d\cdot 11 = a_1 + 11d$

$$\begin{cases} a_7 \cdot a_{12} > S+20 \\ a_9 a_{10} < S+44 \end{cases}$$

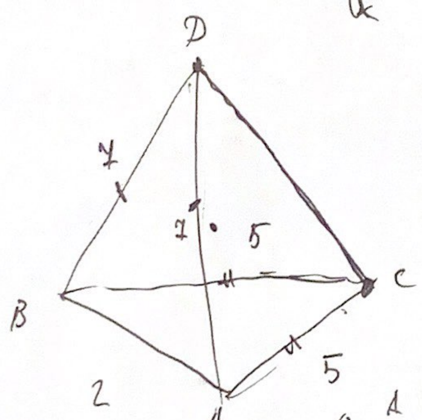
$S_2 = 2a+d$, $S_4 = 4a+6d$

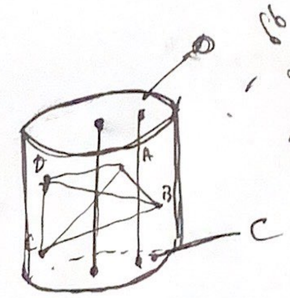
$S_3 = 3a+3d$, $S_5 = 5a+10d$, $S_6 = 6a+15d$

$S_7 = 7a+21d$

$$\begin{cases} (a_1+6d)(a_1+11d) > S+20 \\ (a_1+8d)(a_1+9d) < S+44 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 + 17d\cdot a_1 + 66d^2 > S+20 \\ a_1^2 + 17da_1 + 72d^2 < S+44 \end{cases}$$

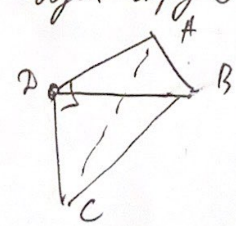
2.



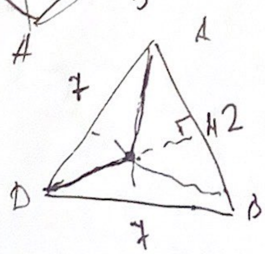


$CD \parallel$ оси $\Rightarrow$ C, D $\in$

Двум окружностям цилиндра.



$CD < 12$



$AH = \sqrt{49-1} = \sqrt{48}$

$R^2 + (\sqrt{48} - R)^2 = 1$

$R^2 + 48 + R^2 - 2R\sqrt{48} = 1$

$a_7^2 + a_{12}^2 - a_9^2 - a_{10}^2$

$(a_1+6d)^2 - (a_1+8d)^2 +$

$+(a_1+11d)^2 - (a_1+9d)^2$

$(-2d)(2a_1+14d) +$

$+2d(2a_1+20d)$

$S_7 = 7a_1 + 21d = 7(\underbrace{a_1+3d}_{a_4})$

$a_7 = a_1+6d$

$a_{12} = a_1+11d$

$a_9 = a_1+8d$

$a_{10} = a_1+9d$

24

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_7 \cdot a_{12} > 7a_4 + 20 \\ a_9 \cdot a_{10} < 7a_4 + 44 \end{cases} \Leftrightarrow$$

Заметим: $a_7 + a_{12} = a_9 + a_{10}$

$a_7^2 + 2a_7a_{12} + a_{12}^2 = a_9^2 + a_{10}^2 + 2a_9a_{10}$

$$\begin{cases} k > 7a_4 + 20 \\ k + 6d^2 < 7a_4 + 44 \end{cases} \qquad 7a_4 + 20 < k + 6d^2 < 7a_4 + 44$$

Черновик

$a_7 + a_{12} = a_9 + a_{10}$

$$\begin{cases} a_7 a_{12} > S + 20 \\ a_9 a_{10} < S + 44 = S + 20 + 24 \end{cases}$$

$a_1 \quad a_2 = a_1 + d \quad a_1 + 2d$

$S = 7a_1 + 21d$

$a_9 a_{10} < a_7 a_{12} + 24$

$a_9 a_{10} - a_7 a_{12} < 24$

$/ a_7^2 + a_{12}^2 + 2a_7 a_{12} - a_9^2 - a_{10}^2 - 2a_9 a_{10} = 0 /$

$(a_1+6d)^2 + (a_1+11d)^2 - (a_1+8d)^2 - (a_1+9d)^2 + 2(a_7 a_{12} - a_9 a_{10}) = 0$

$\cancel{a_1^2} + 36d^2 + 12a_1 d + \cancel{a_1^2} + 121d^2 + 22da_1 - \cancel{a_1^2} - 64d^2 - 2 \cdot a_1 8d - \cancel{a_1^2} - 81d^2 - 18a_1 d -$

$- 2(\underbrace{a_9 a_{10} - a_7 a_{12}}_{<24}) = 0.$

$\underbrace{36 + 121}_{157} - 64 - 81$

$$\begin{array}{r} 121 \\ 36 \\ \hline 157 \\ -\ 157 \\ 64 \\ \hline 93 \\ -\ 81 \\ \hline 12 \end{array}$$

$\underbrace{12 + 22}_{40} \underbrace{- 16 - 18}_{34} = 6da_1$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102080**

ID профиля: **857313**

Вариант 18

(4.) Чистовик.

НОД $(a, b, c) = 15$

НОК $(a, b, c) = 3^{15} \cdot 5^{18}$

$3^{15} \cdot 5^{18} \vdots a \Rightarrow$ в разложении a на простые только 3 и 5, аналогично про b и c.

Пусть $(a_1 ; b_1 ; c_1)$ – степени вхождения "3" в $(a; b; c)$ соотв-но.

$(a_2 ; b_2 ; c_2)$ – степени вхождения "5" в $(a; b; c)$

$$\text{НОД}(a; b; c) = 15 \Rightarrow \begin{cases} \min(a_1; b_1; c_1) = 1 \\ \min(a_2; b_2; c_2) = 1. \end{cases}$$

$$\text{НОК}(a; b; c) = 3^{15} \cdot 5^{18} \Rightarrow \begin{cases} \max(a_1; b_1; c_1) = 15 \\ \max(a_2; b_2; c_2) = 18 \end{cases}$$

Значит в $(a_1; b_1; c_1)$ есть одни 1, ~~а~~ на одна 15 и еще число от 1 до 15.

Вариантов, где "15" встр. не 2 раза, и "1" не 2 раза: $13 \cdot 3!$

Все 3! перестановки возможны,

а) в $(1; 1; 15)$ и $(1; 15; 15)$ только по 3 перестановки

Итого $13 \cdot 3! + 6 = 84$.

Аналогично для $(a_2; b_2; c_2)$:

$(18 - 2) \cdot 3! + 6 = 102$

Выбираем любую $3^{ку}$: $(a_1; b_1; c_1)$ и скрещиваем с любой $(a_2; b_2; c_2)$

(Очевидно, получим все решения)

Итого: $84 \cdot 102 = 8568$ (вариантов).

Ответ: 8568.

Чистовик

(5.)

$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)$; $\log_{6x-14}(x-1)^2$; $\log_{x-1}(\frac{x}{3}+3)$

ОДЗ: $6x-14>0 \Rightarrow x>14/6$.

$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14) = 2\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)$

$\log_{6x-14}(x-1)^2 = 2\log_{6x-14}(x-1)$

Рассмотрим произведение log-ов из условия:

$2\cdot\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)\cdot 2\log_{6x-14}(x-1)\cdot\log_{x-1}(\frac{x}{3}+3) =$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{x}{3}+3=a \\ 6x-14=b \\ x-1=c \end{array}\right] \Leftrightarrow 4\cdot\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c a = 4\cdot\frac{a_1}{c_1}\cdot\frac{c_1}{b_1}\cdot\frac{b_1}{a_1}=4.$

Если $\begin{cases} a=e^{a_1} \\ b=e^{b_1} \\ c=e^{c_1} \end{cases}$, то / это верно если никто из $a_1, b_1, c_1 \neq 1$ / но никто $\neq 1$, т.к. изначально log-и существуют

Если 2 из наших лог-ов $= u$, то:

$u\cdot u\cdot(u-1)=4 \Leftrightarrow u^3-u^2-4=0 \Leftrightarrow (u-2)(\underbrace{u^2+u+2}_{D<0})=0$

$\Rightarrow u=2.$

$\Rightarrow \log_{x-1}(\frac{x}{3}+3)=\left[\begin{array}{l} 2 \\ 1 \end{array}\right.$

1°. $\log_{x-1}(\frac{x}{3}+3)=1 \Leftrightarrow x-1=\frac{x}{3}+3 \Leftrightarrow 3x-3=x+9 \Rightarrow x=6$

но $\log_{\sqrt{\frac{6}{3}+3}}(6\cdot 6-14) = 2\log_{\sqrt{5}}22 \neq 2$, т.е. $x=6 \Leftrightarrow \varnothing$.

2°. $\log_{x-1}(\frac{x}{3}+3)=2 \Leftrightarrow \frac{x}{3}+3=(x-1)^2 \Leftrightarrow x+9=3x^2-6x+3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x^2-7x-6=0$; $D=49+72=121 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{7\pm 11}{6} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-4/6 \\ x=3 \end{array}\right.$

$x=-\frac{4}{6}$ не подходит по ОДЗ $\Rightarrow x=3$.

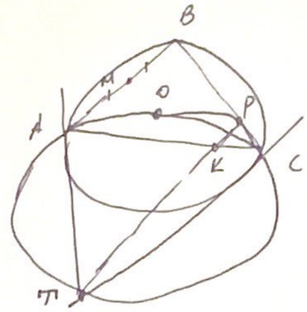
Проверка: $\log_{\frac{3}{3}+3}(6\cdot 3-14)=\log_2 4=2$; $\log_{3-1}\frac{3}{3}+3=2.$

$\log_{6\cdot 3-14}4=1$

2/3

Ответ: $x=3$.

(6.)



а) $\angle AOC = 2\angle ABC$, тогда $\angle OAC = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle AOC = 90^\circ - \angle ABC$, тогда если ок-ть (AOC) пересекает BC вторично $\overset{B \text{ и } C}{}$, то $\angle OPB = \angle OAC = 90^\circ - \angle ABC$,

значит $OB \perp AB$, тогда OB - сер. пер к AB.

M - середина AB, тогда $AB = BP$

$\frac{AB}{BC} = \frac{\sin \angle ADB}{\sin \angle BDC}$ = (т.к. точки на одной окр-ти)

= $\frac{AK}{KC}$ (т.к. $\triangle ATC$ - р/б)

~~т.к.~~ $\triangle$ => $\frac{AB}{BC} = \frac{AK}{KC}$. т.к. $S_{APK} = 6$, $S_{CBK} = 5$, то $\frac{AK}{KC} = \frac{6}{5}$, тогда

$\frac{AB}{BC} = \frac{6}{5}$

$\frac{S_{ABP}}{S_{ABC}} = \frac{BP}{BC}$, ($BP = AB$) как $\frac{6}{5}$

Тогда $S_{ABP} = \frac{6}{5}(6+5)$, $S_{всего} = 11 + \frac{6}{5}(6+5)$

Ответ: а) $S_{всего\ \triangle\text{-ка}} = 11 + \frac{6}{5}(6+5) = \frac{121}{5}$

б) $\exists$ $BM = x$, тогда т.к. $tg\, ABC = 1/2$, то $BM = 2x$, тогда $S_{BPM} = \frac{1}{2}2x \cdot x = \frac{1}{2}\frac{6}{5}\cdot 1$ (по а).

тогда $x = \sqrt{33/5}$, тогда $BA = 4x = 4\cdot\sqrt{\frac{33}{5}}$, а $BC = BD + \frac{5}{6}BD = \frac{11}{6}\sqrt{\frac{33}{5}} = \frac{11}{6} \cdot 33$, теперь мы знаем $\cos ABC = \frac{2}{\sqrt{5}}$

=> по т. Cos для ABC:

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB\cdot BC\cdot \cos ABC = 16\cdot\frac{33}{5} + \frac{121\cdot 33}{36} - 2\cdot$

=> $\frac{11}{6}\cdot\sqrt{33}\; 4\sqrt{\frac{33}{5}} \cdot \frac{2}{\ } = 130$

3/3

Ответ:

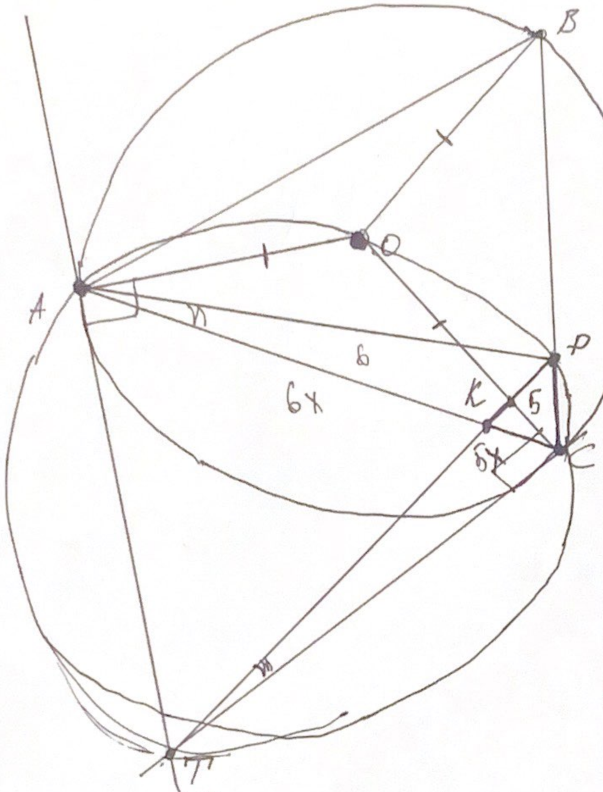
Черновик.

$S_{APK}=6$

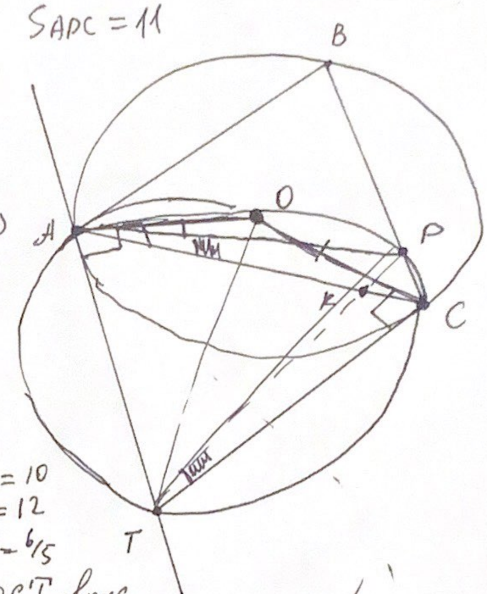
$S_{CPK}=5$

S_{APB} - ?

$S_{APC}=11$



=)



$CK\cdot h=10$

$AK\cdot h=12$

$\Rightarrow \frac{AK}{CK}=6/5$

1) AOCT - впис.

$AO=OC=R$

① ②

$\log_{\sqrt{\frac{x+9}{3}}}(6x-14)$; $\log_{6x-14}(x-1)^2$; $\log_{x-1}\left(\frac{x+9}{3}\right)$

Пусть равны ① и ③: $\log_{\sqrt{\frac{x+9}{3}}}(6x-14) - \frac{1}{\log_{\frac{x+9}{3}}(x-1)} = 0$

$6x-14>0$

$\Leftrightarrow \boxed{x>\frac{7}{3}}$

$\boxed{x>1}$

№4 Чтобы НОД $=15$, H и D: $a = 15x$, $b = 15y$, $c = 15z$ $(a_1; b_1; c_1) - 3^0$ $(a_2; b_2; c_2) - 5^0$

$x \not\vdots y$, $x \not\vdots z$; $y \not\vdots z$.

$3^{16}; 5^{16}; 5^{3}$

$\Rightarrow (3\cdot 5\cdot 5^2; 5^{16}$

$3\cdot 5; 5^{12}\cdot 3; 5^{18}\cdot 3^{14}$

$3^4 3^4$

$3^4 5^4$

$15\cdot\ ; 15\cdot 5^{16}; 15\cdot 3^{13}$

$15\cdot 3!-2\cdot 3!+6$

$13\cdot 3!+6$

$60+18+6=84$

$18\cdot 3!-2\cdot 3!+6$

$16\cdot 3!+6$

$60+36+6=96+6=102$

$102; 84$

~~$x=3$: $\log_2 4=2$; $\log_4 4$;~~

$x=3$: $\log_2 4=2$; $\log_4 4=1$; $\log_2 4=2$

Черновик

4. $\begin{cases} НОД(a;b;c) = 15 \\ НОК(a;b;c) = 3^{15}\cdot 5^{18} \end{cases}$ $a, b, c \in \mathbb{N}$

$НОД \cdot НОК = a\cdot b\cdot c = 15\cdot 3^{15}\cdot 5^{18} = \underline{3^{16}\cdot 5^{19}} = 3^{16}\cdot 5^{16}\cdot 5^{3}$

$3^{16}\ ;\ 5^{16}\ ;\ 5^{3}$

~~125~~

Чтобы НОД было 15: ~~Н и D : одно из чисел должно быть 15,~~

$66 + 55 = 121$

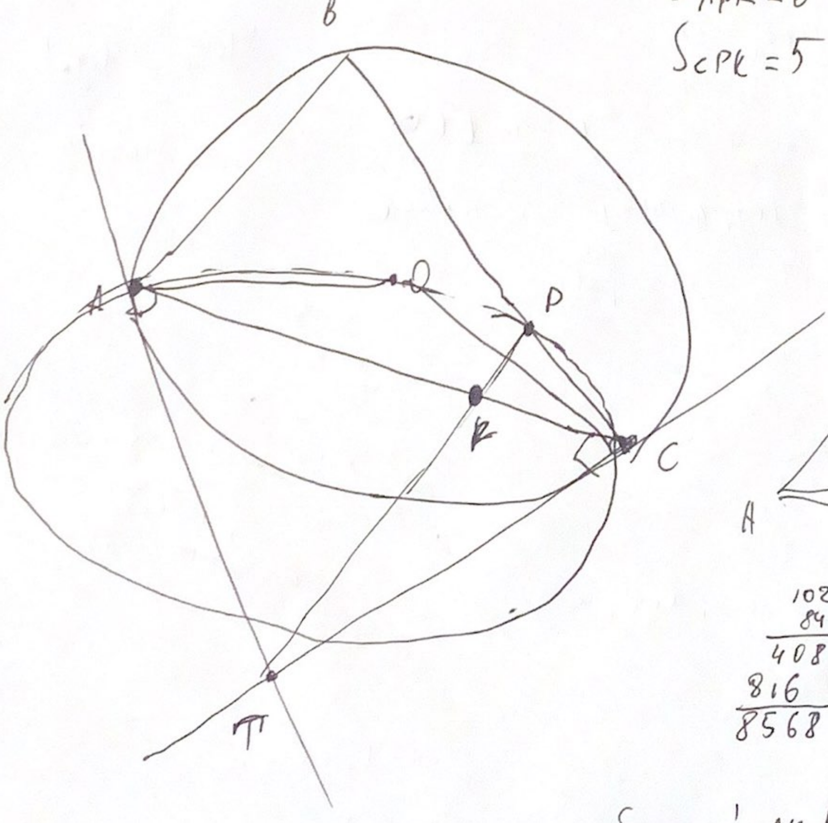
6.

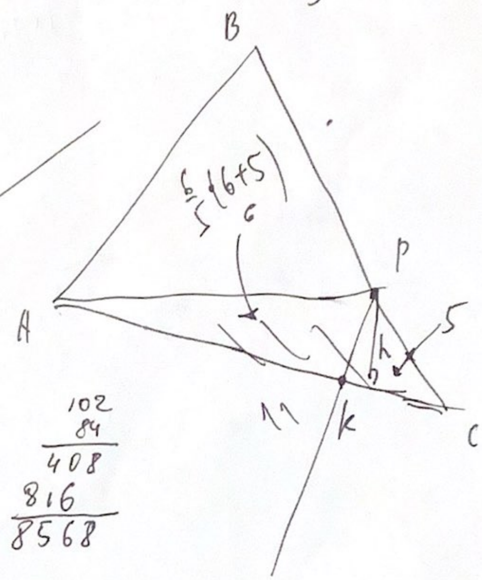
$S_{APK} = 6$

$S_{CPK} = 5$

$11 + 11\cdot\frac{6}{5} = \frac{66}{5} + \frac{55}{5}$

$11\left(1 + \frac{6}{5}\right) = \frac{11\cdot 11}{5} = \frac{121}{5}$





$102 \cdot 84$: 408, 816, 8568

$S_{APK} = \frac{1}{2}\cdot AK\cdot h = 6 \to AK\cdot h = 12$

$S_{PKC} = \frac{1}{2}\cdot KC\cdot h = 5 \Rightarrow CK\cdot h = 10$

$(AC + CK)\cdot h = 22$

Черновик:

(2.) (5).

ОДЗ: $\frac{x+9}{3} > 0, \neq 1$ $\begin{cases} x > -9 \\ x = -6 \end{cases}$

$6x-14 > 0, \neq 1$ $\begin{cases} x > 7/3 \\ x \neq \frac{15}{6} \end{cases}$

$x-1 > 0, \neq 1$ $\begin{cases} x > 1 \\ x \neq 2 \end{cases}$

$x = 3$ – очев. корень.

$\log_{\sqrt{\frac{x+9}{3}}}(6x-14)$; $\log_{6x-14}(x-1)^2$; $\log_{x-1}(\frac{x}{3}+3)$

$\log_{\sqrt{a}} b$; $\log_b c^2$; $\log_c a^2$

$2\log_a b$; $2\log_b c$; $2\log_c a$

$\exists \log_b c = \log_c a = 2\log_a b + 1$

$\log_c a - \frac{1}{\log_c b} = 0$ $\log_c a \cdot \log_c b = 1 \Rightarrow$ ~~a+b~~

$\log_c(a+b) = 1 \Rightarrow a+b = c$

$= x-1$

$\sqrt{x+9}$

$\log_{\sqrt{b}} a = \frac{1}{\log_a \sqrt{b}} =$

$= \frac{1}{\frac{1}{2}\log_a b} = \frac{2}{\log_a b} =$

$= 2\log_b a$

$2\log_{6x-14} x-1 = \log_{x-1} \frac{x+9}{3}$

$2\log_{6x-14} x-1 = \frac{\cancel{1}}{\log_{\frac{x+9}{3}} x-1}$

$\frac{7}{3} \Leftrightarrow 2\frac{8}{3}$.

$\Rightarrow$ $x-1 = 6x-14 \Rightarrow x = 3$

$x - 1 = \frac{x}{3} + 3 \Leftrightarrow$

~~$3x-3 = x+9 \Leftrightarrow 2x =$~~

$\log_a b$; $\log_b c$; $\log_c a$

$\exists \log_a b = \log_b c \Rightarrow \log_a b - \frac{1}{\log_c b} = 0$.

$\log_a b \cdot \log_c b = 1 \Rightarrow$

$\cancel{\log_b a \cdot \log_b c} = 1$

$\begin{cases} a+c = b \\ a+b = c \\ b+c = a \end{cases}$