Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102049**

ID профиля: **135377**

Вариант 18

Чистовик.

№1. (вар. 18)

$S = a_1 + (a_1 + b) + (a_1 + 2b) + \ldots + (a_1 + 6b) = 7a_1 + 21b.$

$\left.\begin{array}{l} a_7 = a_1 + 6b \\ a_{12} = a_1 + 11b \end{array}\right| \Rightarrow (a_1 + 6b)(a_1 + 11b) > 7a_1 + 21b + 20$

$\left.\begin{array}{l} a_9 = a_1 + 8b \\ a_{10} = a_1 + 9b \end{array}\right| \Rightarrow (a_1 + 8b)(a_1 + 9b) < 7a_1 + 21b + 44$

$a_1^2 + 17a_1 b + 72b^2 < 7a_1 + 21b + 44 = 7a_1 + 21b + 20 + 24 < a_1^2 + 17a_1 b + 66b^2 + 24$

$6b^2 < 24$

$b^2 < 4$

$\left.\begin{array}{l} \text{арифм. прогрессия} \uparrow \Rightarrow b > 0 \\ \text{члены прогрессии} \in \mathbb{Z} \Rightarrow b \in \mathbb{Z} \end{array}\right| \Rightarrow b = 1 \text{ или } b = 2$

$a_1^2 + 10a_1 + 7 = 0$

$D_{/4} = 18$

$a_{11} = -5 - 3\sqrt{2} \quad a_{12} = -5 + 3\sqrt{2}$

$4 < 3\sqrt{2} < 5$

$b = 1: \begin{cases} a_1^2 + 17a_1 + 72 < 7a_1 + 21 + 44 \\ a_1^2 + 17a_1 + 66 > 7a_1 + 21 + 20 \end{cases}$

$\left.\begin{cases} a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0 \\ a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0 \end{cases}\right| \Rightarrow a_1 \in (-5 - 3\sqrt{2}; 5) \cup (5; -5 + 3\sqrt{2})$

$a_1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow a_1 \in \{-9; -8, -7, -6, -4, -3, -2, -1\}$

$b = 2: \begin{cases} a_1^2 + 34a_1 + 288 < 7a_1 + 42 + 44 \\ a_1^2 + 34a_1 + 264 < 7a_1 + 42 + 20 \end{cases}$

$\begin{array}{r} {}^{2} \\ \times 66 \\ 4 \\ \hline 264 \end{array}$

$\begin{cases} a_1^2 + 27a_1 + 202 < 0 \\ a_1^2 + 27a_1 + 202 > 0 \end{cases}$

$\varnothing$

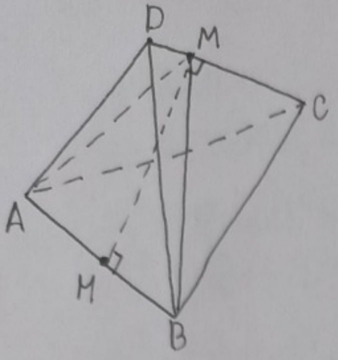
Тогда a_1 может принимать значения $-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1$

Ответ: $-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1.$

1

21102049 (U135377 M1295713)

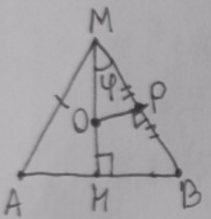
Чистовик.



№2 (вар. 18)

Дано: $AB=2$
$AC=CB=5$
$AD=DB=7$
$ABCD$ впис в цилиндр
$CD \parallel$ оси цилиндра
$R_ц$ – min.
$CD=?$

Решение: Пусть H – середина AB. A и B симметричны отн (HDC), $\Rightarrow$ ~~можно взять плоскость~~ $CD \parallel$ оси цилиндра $\Rightarrow$ можно взять плоскость α, $\parallel$ оси цилиндра и проход через A; B. $\Rightarrow$ $\alpha \perp DC$. Пусть DC пересекает α в точке M. Из симметрии отн (HDC) $\triangle AMB$ – р/б. Пусть $MH=x$, т.к. $AB=2$ из усл, то $AH=BH=1 \Rightarrow MB=\sqrt{x^2+1} \Rightarrow \cos\varphi=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

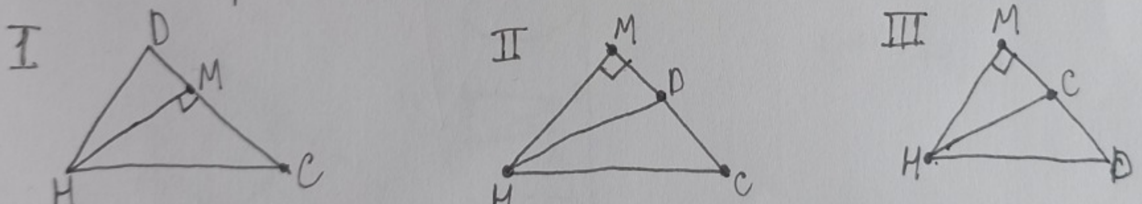


$(\angle HMB=\varphi)$. $\Rightarrow R_ц=MO=\frac{PM}{\cos\varphi}=\frac{MB}{2\cos\varphi}=\sqrt{x^2+1}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}}{2x}=$

$$=\frac{x^2+1}{2x}=\frac{x}{2}+\frac{1}{2x}=\frac{x+1/x}{2}\geqslant\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=1$$

Минимум достигается, когда $x=\frac{1}{x}$: $x>0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow R_ц$ достигает минимума при $MH=1$. Из этого найдем CD.

Есть 3 варианта сечения HDC:



Из т. Пифагора: $MC=\sqrt{CB^2-HB^2}=\sqrt{25-1}=\sqrt{24}$

$MD=\sqrt{BD^2-HB^2}=\sqrt{49-1}=\sqrt{48}$

$MD=\sqrt{HD^2-MH^2}=\sqrt{48-1}=\sqrt{47}$

$MC=\sqrt{HC^2-MH^2}=\sqrt{23}$

Для I случая: $DC=MD+MC=\sqrt{47}+\sqrt{23}$

Для II случая: $MD>MC \Rightarrow$ такого нет

Для III случая: $DC=MD-MC=\sqrt{47}-\sqrt{23}$

Ответ: $\sqrt{47}+\sqrt{23}$; $\sqrt{47}-\sqrt{23}$.

Чистовик.
№3. (вар. 18).

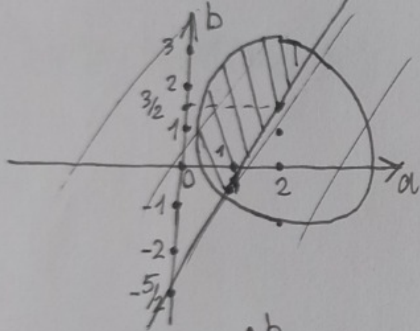
$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 5\\ a^2+b^2 \le \min(4a-2b;\,5)\end{cases}$$

a^2+b^2 — квадрат расстояния до точки с коорд. $(a;b)$.
$(x-a)^2+(y-b)^2 \le 5$ — точки круга с центром (a,b) и радиусом $\sqrt{5}$.
Рассмотрим вариант, когда $4a-2b<5$:

$$\begin{cases}4a-2b<5\\ a^2+b^2 \le 4a-2b\end{cases}$$

$$\begin{cases}4a-2b<5\\ (a-2)^2+(b+1)^2 \le 5\end{cases}$$

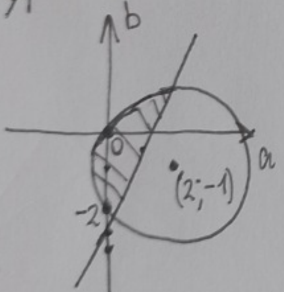
$$\begin{cases}(a-2)^2+(b+1)^2 \le 5\\ b>2a-5/2\end{cases}$$



~~Точки пересечения:~~

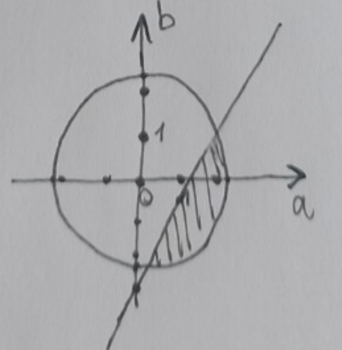
$$\cancel{b=2a-\frac{5}{2} \Rightarrow (a-2)^2+\left(2a-\frac{7}{2}\right)^2=5}$$

$$\cancel{a^2-4a+4+4a^2-14a+\frac{49}{4}=5}$$



$4a-2b \ge 5$: $\begin{cases}4a-2b\ge 5\\ a^2+b^2 \le 5\end{cases}$

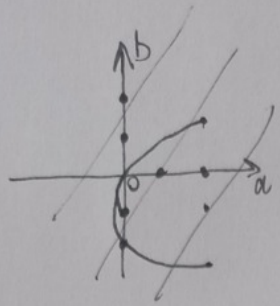
$$\begin{cases}a^2+b^2 \le 5\\ b \le 2a-5/2\end{cases}$$

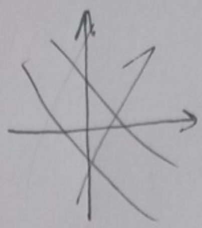


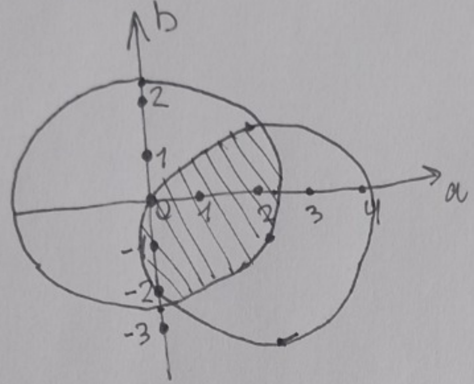
$(a-2)^2+(b+1)^2=a^2+b^2$
$-4a+2b+5=0$
$b=2a-5/2 \Rightarrow$ подходит под a,b точки пересечения 2-ух окр

3

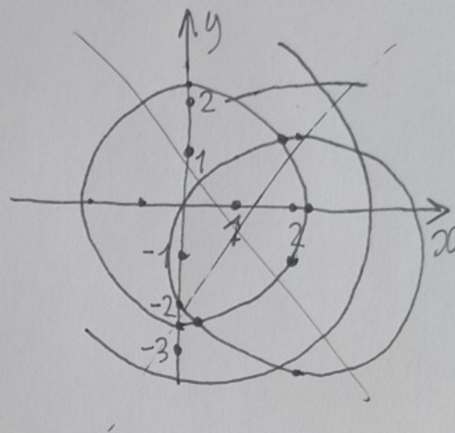
Чистовик.







$\cancel{a \in [2-\sqrt{5}; \sqrt{5}]}$



Подход область (a; b).

4

21102049 (U135377 M1295713)

$a_1, a_1+b, a_1+2b \dots a_1+6b$ $\qquad a_1, b \in \mathbb{Z}$

$b>0$

$$\begin{cases} (a_1+6b)(a_1+11b) > 7a_1+21b+20 \\ (a_1+8b)(a_1+9b) < 7a_1+21b+44 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2+17a_1b+66b^2 > 7a_1+21b+20 \\ a_1^2+17a_1b+72b^2 < 7a_1+21b+44 \end{cases}$$

$a_1^2+17a_1b+66b^2+24 > a_1^2+17a_1b+72b^2$

$6b^2<24$

$b^2<4$

$b>0 \Rightarrow$ ~~$b\in\{1;2\}$~~ $b=1$ или $b=2$

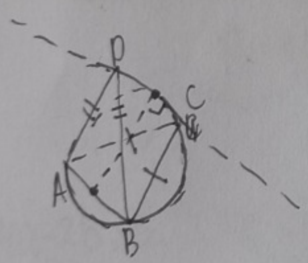
$b=1$: $a_1^2+17a_1+72 < 7a_1+21+44$ и $a_1^2+17a_1+66 > 7a_1+21+20$

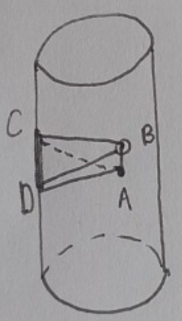
$a_1^2+10a_1+7<0$ $\qquad a_1^2+10a_1+25>0$

$D/4=25-7=18$ $\qquad (a_1+5)^2>0$

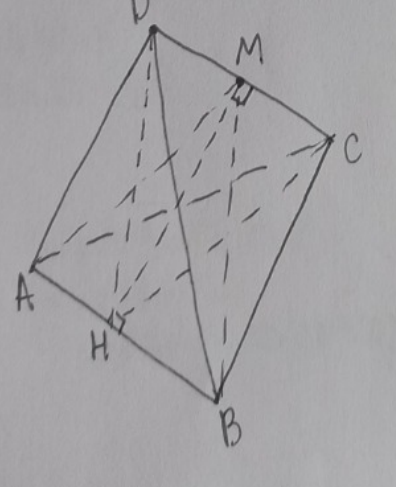
$a_1 \in (-5-3\sqrt{2}; -5+3\sqrt{2})$ $\qquad a_1 \neq -5$

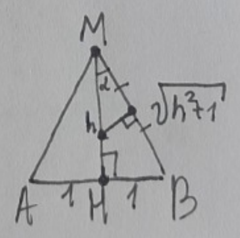
$$\begin{cases} a_1 \in (-5-3\sqrt{2}; -5) \cup (-5; -5+3\sqrt{2}) \\ a_1 \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow a$$





$(x^{-1})' = -1/x^2$





Вывод:

$\cos\alpha = \frac{h}{\sqrt{h^2+1}}$

$R = \frac{\sqrt{h^2+1}}{2} : \cos\alpha = \frac{h^2+1}{2h} =$

$= \frac{h}{2} + \frac{1}{2h}$

$\frac{dR}{dh} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{h^2} = 0$

$1-\frac{1}{h^2}=0 \qquad 1=h^2$

$h=1$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102049**

ID профиля: **135377**

Вариант 18

№4. (18 вар)

$НОД(a,b,c)=15$
$НОК(a,b,c)=3^{15}\cdot 5^{18}$

$a=15k$ $НОД(k,m,n)=1$
$b=15m$
$c=15n$

$НОК(a,b,c)=15kmn=3^{15}\cdot 5^{18}$

$kmn=3^{14}\cdot 5^{17}$

$k=3^{p_1}\cdot 5^{q_1}$
$m=3^{p_2}\cdot 5^{q_2}$
$n=3^{p_3}\cdot 5^{q_3}$

$НОД(k,m,n)=1 \Rightarrow$ какое-то p_i и какое-то $q_j=0$

Пусть $p_1=0$, $q_2=0$ (т.к. все в общем виде, то других вариантов с $i\neq j$ можно добиться перестановками). $\Rightarrow k=5^{q_1}$, $m=3^{p_2}$, $n=3^{p_3}\cdot 5^{q_3}$

$q_1+q_3=17$, $p_2+p_3=14$

Кол-во способов выбрать q_3 – ~~18~~ 17, p_3 – ~~15~~ 14 (q_1 и p_2 задаются автоматически при выборе q_3 и p_3) (q_3 выбирается из набора чисел от 1 до 17, p_3 – от 1 до 14). $\Rightarrow$ кол-во способов задать 3ку таким образом – ~~18·15=150+80+40=270~~ $17\cdot 14=238$ способов, с учетом перестановок ~~238~~ $238\cdot 6=1428$ способа

$238\times 6=1428$

Рассмотрим случай, когда $p_1=q_1=0$ и $p_2\neq p_3$:

$k=1$, $m=3^{p_2}\cdot 5^{q_2}$, $n=3^{p_3}\cdot 5^{q_3}$

$p_2+p_3=14$, $q_2+q_3=17 \Rightarrow$ кол-во способов будет ~~15·18+18~~ $14\cdot 18=252$,

с перестановками $252\cdot 6=1512$

$252\times 6=1512$

$p_1=q_1=0$, $p_2=p_3=7$: кол-во способов будет 18, с перестановками 108.

Тогда суммарное кол-во способов: $1428+1512+108=1428+1620=3048$

Ответ: 3048.

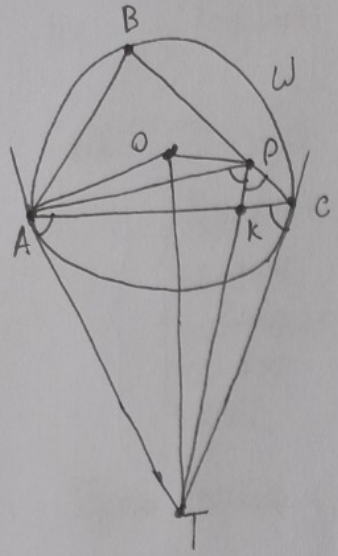
Чистовик.

1

21102049 (U135377 M1295714)

Чистовик.

№6. (18 вар.)



$S_{\Delta APK}=6$

$S_{\Delta CPK}=5$

TA, TC – кас к ω

A, O, P, C лежат на одной окр.

а). $S_{\Delta ABC}=?$

б). AC, если $\operatorname{arctg}\angle ABC=\frac{1}{2}$

Решение: а). AOPC – впис $\Rightarrow \angle OPC = 180^\circ - \alpha$ ($\angle OAC=\alpha$).

TC и TA – кас к ω $\Rightarrow \angle OAT=\angle OCT=90^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow$ OATC – впис, но т.к. Δ может быть вписан только в одну окр, то T, A, O, P, C лежат на одной окр $\Rightarrow \angle OPT = 180^\circ - \angle OAT = 90^\circ \Rightarrow \angle TPC = 90^\circ-\alpha$.

$\angle OAT=90^\circ \Rightarrow \angle CAT = 90^\circ-\alpha$. С другой стороны $\angle CAT=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}=\angle ABC \Rightarrow \angle ABC = 90^\circ-\alpha = \angle TPC \Rightarrow$ по 2ум углам $\Delta ABC \sim \Delta KPC$.

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta KPC}}=\left(\frac{AC}{KC}\right)^2=\left(\frac{AK+KC}{KC}\right)^2=\left(\frac{AK}{KC}+1\right)^2=\left(\cancel{\frac{6}{5}}\frac{S_{\Delta APK}}{S_{\Delta CPK}}+1\right)^2=\left(\frac{11}{5}\right)^2$$

$$S_{\Delta ABC}=5\cdot\frac{121}{5^2}=\frac{121}{5}$$

б). Пусть $\angle ABC=\beta \Rightarrow tg\beta=\frac{1}{2} \Rightarrow \sin\beta=\frac{1}{\sqrt5}$, $\cos\beta=\frac{2}{\sqrt5}$

~~AP·PK·sin∠APK~~ $PK\perp OP \Rightarrow OP\perp AB$ ($PK\parallel AB$ по углам) $\Rightarrow$ OP – сер. пер. $\Rightarrow$

$\Rightarrow AP=BP$

$$S_{\Delta APB}=S_{\Delta ABC}-S_{\Delta APC}=\frac{121}{5}-11=\frac{121}{5}-\frac{55}{5}=\frac{66}{5}$$

$\frac{1}{2}AB\cdot BP\cdot\sin\beta=\frac{66}{5}$

$\cancel{\frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin\beta=\frac{121}{\sqrt5}}$ $AB\cdot BP=\frac{132}{\sqrt5}$

$\angle APB=180^\circ-2\beta \Rightarrow \angle APC=2\beta. \Rightarrow \angle APT=\beta \Rightarrow$ PT – биссектриса $\Rightarrow \frac{AP}{PC}=\frac{6}{5}$

$11=\cancel{\frac{1}{2}(Pk\cdot AK+Pk\cdot KC)\cdot\sin\angle A=\frac{1}{2}Pk}\cdot AC\cdot\sin\angle A.$ По т.cos: $AB^2=BC^2-2\cos\beta\, \cancel{AB\cdot BC}$

2

Чистовик.

N5 (18 вар).

$\log_{\sqrt{x/3+3}}(6x-14)$, $\log_{6x-14}(x-1)^2$, $\log_{x-1}(x/3+3)$

ОДЗ: $\begin{cases} \frac{x}{3}+3>0 \\ x\neq-6 \\ 6x-14>0 \\ 6x-14\neq1 \\ x-1>0 \\ x\neq2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>\frac{7}{3} \\ x\neq\frac{5}{2} \end{cases}$

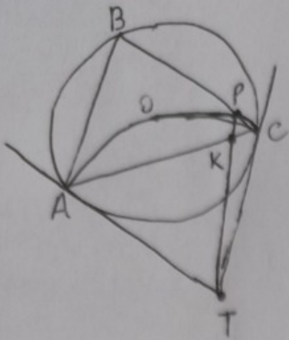
Пусть первые 2 равны: $\begin{cases} 2\log_{x/3+3}(6x-14)=2\log_{6x-14}x-1 \\ 2\log_{x/3+3}(6x-14)=\log_{x-1}(x/3+3)+1 \end{cases}$

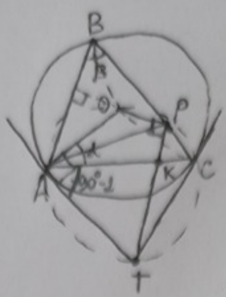
$\begin{cases} \log_{6x-14}(x-1)=\cancel{\frac{1}{\log_{6x-14}x/3+3}} \\ \cancel{6x-14 \; 1/\log} \end{cases}$

3

21102049 (U135377 M1295714)

№6.





$S_{\Delta APK}=6$

$S_{\Delta CPK}=5$

$\frac{AK}{KC}=\frac{6}{5} \Rightarrow \frac{KC}{AC}=\frac{5}{11}$

$\angle OPC=180^\circ-\alpha$
$\angle OPT=90^\circ$ $\Big| \Rightarrow \angle CPT=90^\circ-\alpha$

$\angle CAT=90^\circ-\alpha=\angle ABC=\beta$

$\frac{121}{5}$

$tg\beta=\frac{1}{2} \Rightarrow \cancel{cos}\ tg^2\beta+1=\frac{1}{cos^2\beta}$ $AB\cdot BC=\frac{121}{5}\cdot\sqrt{5}\cdot 2=$

$cos^2\beta=\frac{4}{5}$ $=\frac{242}{\sqrt{5}}$

$AP=BP=$ $cos\beta=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $sin\beta=\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\angle PAT=180^\circ-\angle PCT=180^\circ-\gamma+\alpha-90^\circ=$
$=90^\circ-(\gamma-\alpha)$

123
213
231
312
321
132

Черновик

$\begin{array}{r} 17 \\ \times 14 \\ \hline 108 \\ +17\ \ \\ \hline 178 \end{array}$ $\begin{array}{r} 17 \\ \times 14 \\ \hline 68 \\ 17\ \ \\ \hline 238 \end{array}$

$q_1+q_2=3$
$p_1+p_2=12$

0 0
0 1
0 2
0 3
1 0
1 1
1 2
1 3

$270\cdot 6=$

$\begin{array}{r} 27 \\ \times\ 6 \\ \hline 1620 \end{array}$

21102049 (U135377 M1295714)