Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21102021**

ID профиля: **383030**

Вариант 18

Чистовик

N1

$S = S_7$ по сумме арифм. прогрессии равно $\frac{2a_1+d(7-1)}{2}\cdot 7$

$a_7 = a_1+6d$ d - разность

$a_{12} = a_1+11d$ $d>0$

$a_9 = a_1+8d$ $a_1; a_2; a_3 \ldots \in \mathbb{Z}$

$a_{10} = a_1+9d$

Тогда $\begin{cases} a_7\cdot a_{12} = (a_1+6d)(a_1+11d) > S+20 \\ a_{10}\cdot a_9 = (a_1+8d)(a_1+9d) < S+44 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} a_1^2+17a_1d+66d > S+20 \\ a_1^2+17a_1d+72d < S+44 \end{cases}$ Пусть $a_1^2+17a_1d+66d = t$

$\Rightarrow$ $t > S+20$

$t+6d < S+44$

Отсюда понятно, что $6d<24$

$\Rightarrow d<4$ $d \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \boxed{d=1,2,3}$

Если $d=1$

$\Rightarrow \begin{cases} a_1^2+17a_1+66 > \frac{2a_1+6}{2}\cdot 7+20 \\ a_1^2+17a_1+72 < \frac{2a_1+6}{2}\cdot 7+44 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1^2+17a_1+66 > 7a_1+41 \\ a_1^2+17a_1+72 < 7a_1+65 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1^2+10a_1+25>0 \\ a_1^2+10a_1+7<0 \end{cases}$ $\begin{cases} (a_1+5)^2>0 \\ a_1 \in (-5-3\sqrt{2}; -5+3\sqrt{2}) \end{cases}$ т.к. $a_1 \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ $0<5-3\sqrt{2}<1$ и $9<5+3\sqrt{2}<10$ $\Rightarrow$ $\boxed{a_1 \in [-9; -1] \quad a_1 \neq -5}$

Если $d=2$

$\begin{cases} a_1^2+34a_1+132 > \frac{2a_1+12}{2}\cdot 7+20 \\ a_1^2+34a_1+144 < \frac{2a_1+12}{2}\cdot 7+44 \end{cases}$ $\begin{cases} a_1^2+34a_1+132 > 7a_1+62 \\ a_1^2+34a_1+144 < 7a_1+\overset{42}{}+44 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1^2+27a_1+70>0 \\ a_1^2+27a_1+58<0 \end{cases}$ $\begin{cases} a_1 \in (-\infty; \frac{-27-\sqrt{449}}{2}) \cup (\frac{-27+\sqrt{449}}{2}; +\infty) \\ a_1 \in (\frac{-27-\sqrt{497}}{2}; \frac{-27+\sqrt{497}}{2}) \end{cases}$

$\begin{cases} 21<\sqrt{449}<22 \\ 22<\sqrt{497}<23 \end{cases}$ $\Rightarrow \begin{cases} a_1 \in (-\infty; -24) \cup (-3; +\infty) \\ a_1 \in (-25; -2) \end{cases}$ $\Rightarrow a_1 \in \mathbb{Z}$ не может быть

1

Чистовик

Если $d = 3$

$$\begin{cases} a_1^2+51a_1+138 > 7a_1+63+20 \\ a_1^2+51a_1+216 < 7a_1+63+44 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2+44a_1+115 > 0 \\ a_1^2+44a_1+109 < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 \in (-\infty; -22-\sqrt{369}) \cup (-22+\sqrt{369}; +\infty) \\ a_1 \in (-22-\sqrt{375}; -22+\sqrt{375}) \end{cases}$$

$19 < \sqrt{369} < 20$ $\Rightarrow a_1 \in \mathbb{Z}$ – не имеет решений эта система

$19 < \sqrt{375} < 20$

Тогда подходит только

$a_1 \in [-9; -1]$ и $a \neq -5$ и $a_1 \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Ответ: } -9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1}$

№3

Рассм. уравнение в плоскости с осями координат b и a

Тогда второе уравнение ($a^2+b^2 \leq \min(4a-2b; 5)$) принимает вид

$$\begin{cases} a^2+b^2 \leq 4a-2b & \text{если } 4a-2b \leq 5 \quad (1) \\ a^2+b^2 \leq 5 & \text{, если } 4a-2b > 5 \quad (2) \end{cases}$$

То есть в зависимости от того с какой стороны от прямой $a = \frac{b}{2} + \frac{5}{4}$ лежит точка (b, a)

Тогда в уравнении (1) (если $a \leq \frac{b}{2} + \frac{5}{4}$)

$a^2-4a+4+b^2+2b+1 \leq 5$

$(a-2)^2+(b+1)^2 \leq 5$ То есть точки (b, a) принадлежат кругу с центром $(-1; 2)$ и радиусом $\sqrt{5}$

В уравнении (2) (если $a > \frac{b}{2} + \frac{5}{4}$)

точки принадлежат кругу с центром в $(0; 0)$ и радиусом $\sqrt{5}$

2

Чистовик

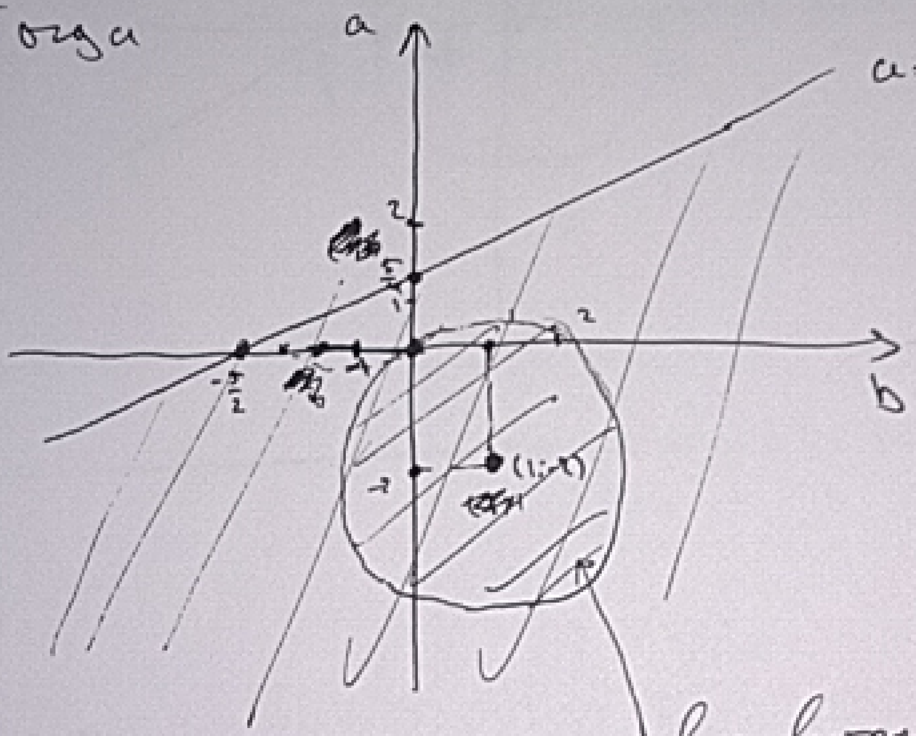
[illegible] В первом уравнении исходной системы ($(a-x)^2+(b-y)^2 \le 5$) для любой пары (x,y) задаётся круг с центром в (x,y) и радиусом $\sqrt{5}$, и можно выбирать ~~[illegible]~~ (b,a) только из этого круга.

Нарисуем вариант когда

$$\begin{cases}(a-x)^2+(b-y)^2 \le 5\\ (a+2)^2+(b-1)^2 \le 5\end{cases}$$

то есть $a \le \frac{b}{2}+\frac{5}{4}$

Тогда



все возможные $(b;a)$ точки лежат внутри круга

Тогда для каждой точки (x,y) которая удалена от ~~[illegible]~~ этого круга не более чем на $2\cdot\sqrt{5}$ можно подобрать такое (b,a), что будет выполняться система

$\Rightarrow S_1=\pi\cdot r^2$, где $r=2\sqrt{5}$ $\Rightarrow \boxed{S_1=\pi\cdot 20}$

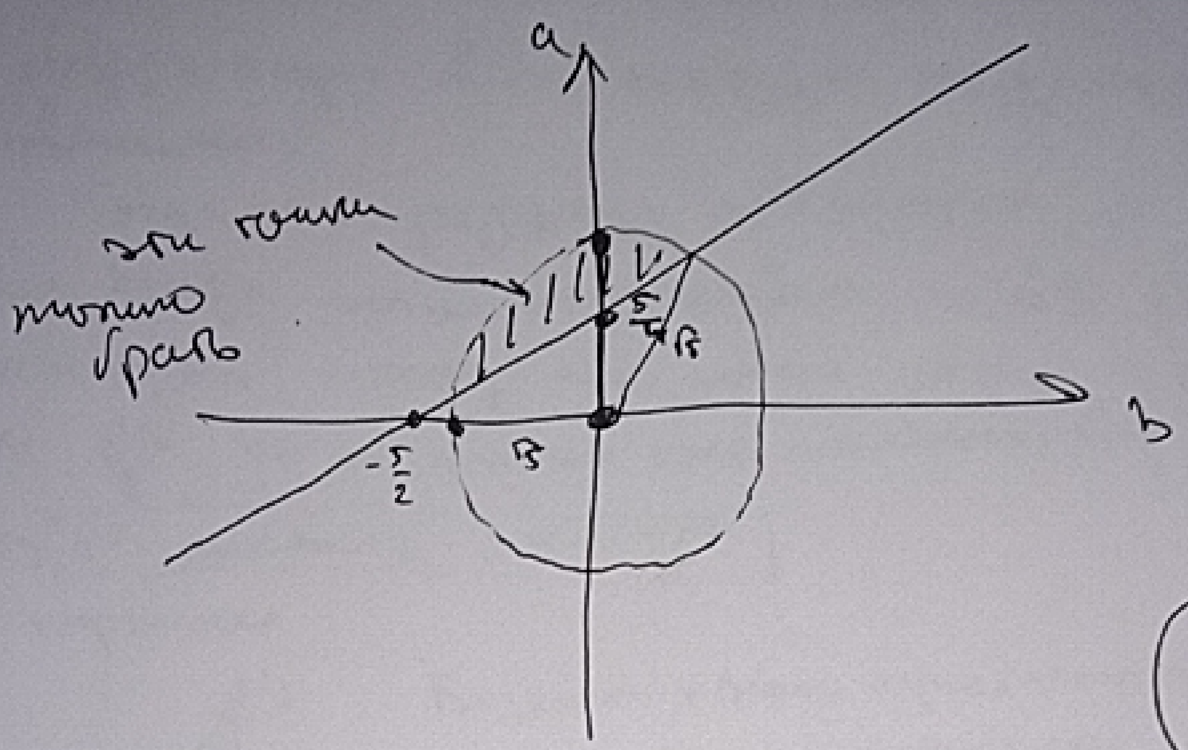
3

Чистовик
№ 2

Дано:
AD = DB = 1
AC = CB = 5 AB = 2

Чистовик

Наглядно две случая
когда
г ~~..~~ $a > \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{4}$
строим график



4

Чистовик
№ 2

Дано:
$AD=DB=7$
$AC=CB=5$ $AB=2$

Заметим, что т.к. $AD=DB$ и $AC=CB$

$\Rightarrow AB \perp DC$

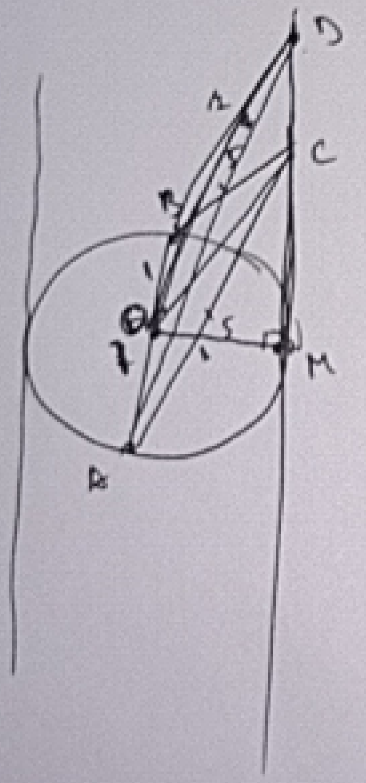
Потому т.к. $CD \parallel$ ~~...~~ оси цилиндра
$\Rightarrow AB \parallel$ основаниям этого цилиндра

Тогда понятно, что ~~...~~ если взять сечение ~~...~~ в плоскости параллельной основаниям цилиндра и содержащей AB - это будет окружность равная основаниям.

Тогда т.к. радиус минимален, а AB - это любая хорда этой окружности $\Rightarrow AB$ должна быть диаметром, потому что иначе радиус будет больше чем $\frac{AB}{2}$, но он должен быть минимальным.

$\Rightarrow$ $\boxed{AB \text{ диаметр цилиндра}}$

1) картинка



Возьмем точку пересечения CD и окружности содерж. AB пусть равно M.

Тогда $CM \perp$ окружности т.к. $\parallel$ главной оси ~~...~~ и OM равно 1, а CO - высота, медиана р/б $\triangle ABC$

$\Rightarrow CO = \sqrt{-BO^2+CB^2} = \sqrt{(\frac{AB}{2})^2+CB^2} = \sqrt{-1+25} =$
$= \sqrt{24}$

$\Rightarrow CM = \sqrt{CO^2-OM^2} = \sqrt{24-1} = \sqrt{23}$

$DO = \sqrt{-OB^2+BD^2} = \sqrt{49-1} = \sqrt{48}$

$\Rightarrow DM = \sqrt{DO^2-OM^2} = \sqrt{48-1} = \sqrt{47}$

$\Rightarrow$ $\boxed{CD = DM-CM = \sqrt{47}-\sqrt{23}}$

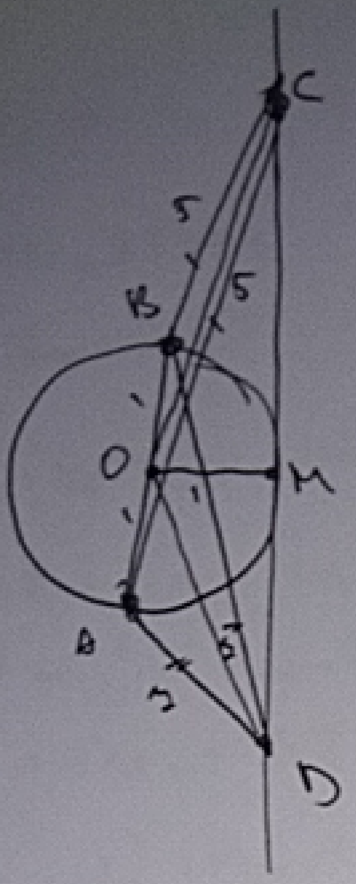
1 вариант

Второй вариант

5

№1 Н......

Чистовик



Аналогично 1 случаю

$CM = \sqrt{23}$

$DM = \sqrt{42}$

но $\boxed{CD = \sqrt{23} + \sqrt{42}} = DM + CM$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Ответ: } CD = \sqrt{42} \pm \sqrt{23}}$

6

№1 Черновик

7 $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Z}$

d

$a_7 \cdot a_{12} > S + 20$

$a_9 \cdot a_{10} < S + 44$

$-22 - \sqrt{369}$ $-22 + \sqrt{369}$

$\begin{cases} (a_1+6d)(a_1+11d) > \frac{2a_1+d6}{2} \cdot 7 + 20 \\ (a_1+8d)(a_1+9d) < \frac{2a_1+d6}{2} \cdot 7 + 44 \end{cases}$ $a_1 \in \mathbb{Z}$, $d \neq 0$

$a_1^2 + 6da_1 + 66d + 11da_1 > 7a_1 + 21d + 20$

$a_1^2 + 8da_1 + 72d + 9da_1 < 7a_1 + 21d + 44$

$D_4 = 22^2 - 115 \cdot 4$

$a_1^2 + 17a_1d + 66d > 7a_1 + 21d + 20$

$a_1^2 + 17a_1d + 72d < 7a_1 + 21d + 20 + 24$

$484 - 109 =$

$= 375$

$t > S + 20$

$t + 6d < S + 20 + 24$

$\rightarrow 6d < 24$

$d < 4$ $d = 1, 2, 3$

Если $d = 1$

$484 - 4 \cdot 115 =$

$= 369$

$100 - 28 = 72$ $= (6\sqrt{2})$

$4 + b^2 + 2b + 1 \leq 5$

104 $b^2 + 2b \leq 0$

$\frac{10+6\sqrt{2}}{2}$ $5+3\sqrt{2}$

$5-3\sqrt{2}$

$a^2 + 4a = 0$ $b = 0$

$b = -2$

$a = -4$ $a_1 \in ($

$\frac{10-6\sqrt{2}}{2}$

$27 + 21$

$21 - 22$ $22 - 23$

$2{,}5$ 2

$3 \cdot \sqrt{2} \approx$

83 $198 - 83 = 115$

$58 \cdot 4 = 232$

$1{,}44 \cdot 3 = 4{,}32$

$5 - 4{,}32$

$729 - 232$

497

$3^3 \cdot 3^3 = 3^6$

9^3

$81 \cdot 9 = 729$

$729 - 30 \cdot 4 = 280$

$729 - 280 =$

449

$51 - 7$

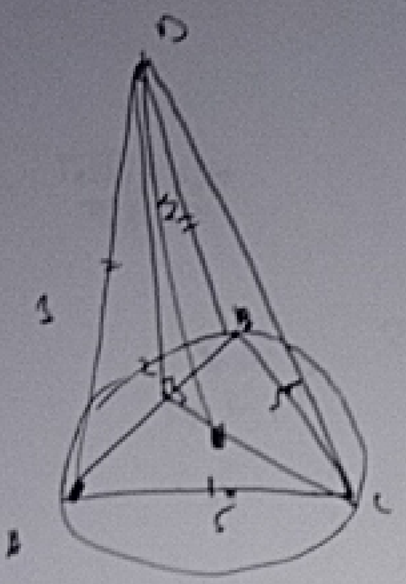
44

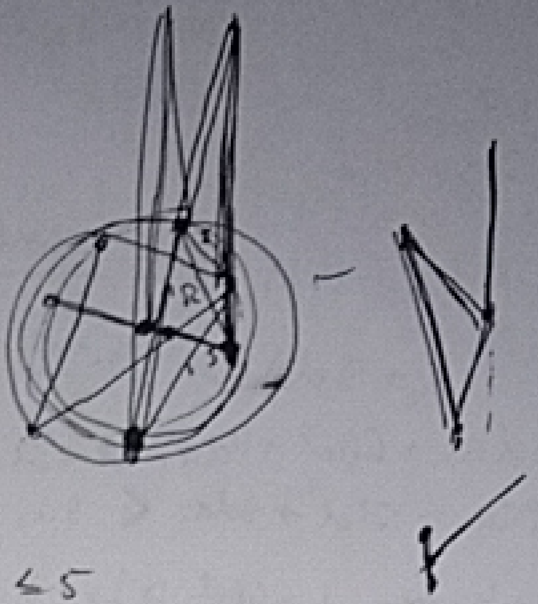
729

$\frac{23-21}{2}$; $\frac{21}{2}$

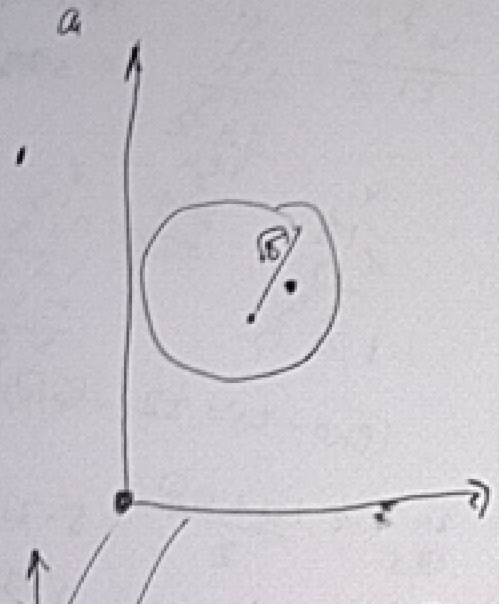
3; $2{,}5$

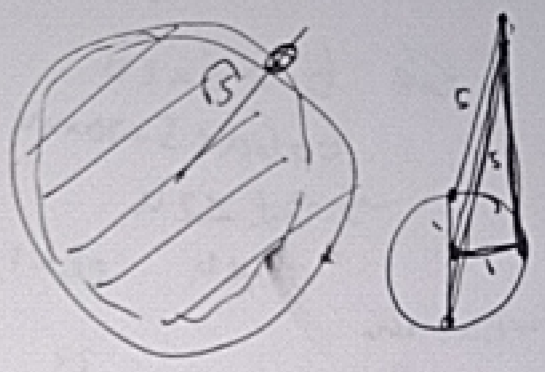
Черновик





$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 5\\ a^2+b^2\le \min(4a-2b;5)\end{cases}$$





a^2+b^2

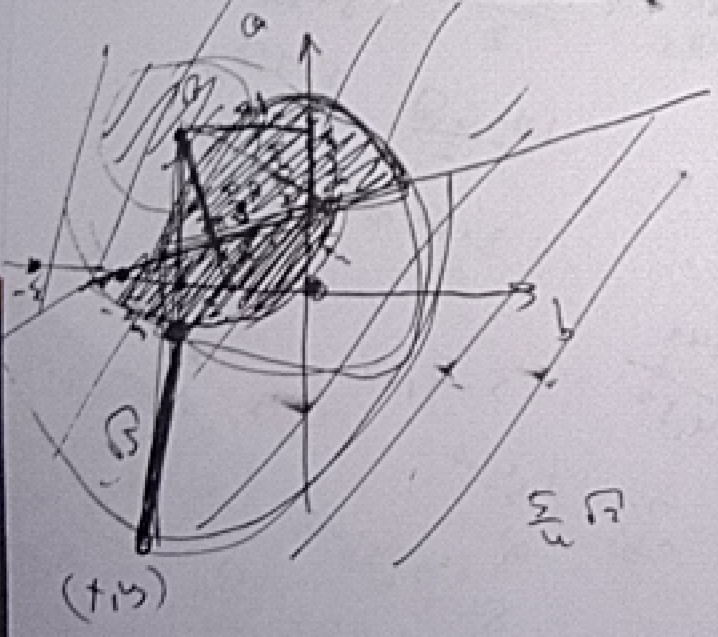
$4a-2b<5$

$a^2+b^2\le 4a-2b$

$a^2-4a+4+b^2+2b+1\le 5$

$(a-2)^2+(b+1)^2\le 5$

$4a-2b-5<0$



$a^2+b^2<\sqrt{5}$

$a=\frac{2b+5}{4}=\frac{b}{2}+\frac{5}{4}$

$a\in\frac{b}{2}+\frac{5}{4}$

$\frac{5}{4}\sqrt{?}$

$1+\frac{9}{16}=\frac{5}{4}$

$\frac{25}{16}-\frac{25}{32}=\sqrt{\frac{25}{32}}=\frac{5}{4\sqrt{2}}$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21102021**

ID профиля: **383030**

Вариант 18

Чистовик
№4

Т.к. НОД$(a,b,c) = 15$

$\Rightarrow \begin{cases} a = 15m \\ b = 15n \\ c = 15k \end{cases}$ где НОД$(m,n,k) = 1$

Тогда НОК$(m,n,k) = \frac{3^{15}\cdot 5^{18}}{3\cdot 5} = 3^{14}\cdot 5^{17}$

Тогда $m = 3^x\cdot 5^y$
$n = 3^p\cdot 5^q$
$k = 3^i\cdot 5^j$

Причем т.к. их НОД$=1$

$\Rightarrow$ $y,q,j = 0$ и $x,p,i = 0$ -(одно из каждых равно нулю)

Также т.к. их НОК $= 3^{14}\cdot 5^{17}$

$x,p,i = 14$ и $y,q,j = 17$ (одно из каждых равно максимальной степени)

То есть два из каждой тройки чисел заданы однозначно, третье же может быть любым.

Для x,p,i третье в промежутке $[0;14]$ для y,q,j в $[0;17]$

Тогда: т.к. способов выбрать из трех чисел два $=3$ $\Rightarrow$ способов сделать тройку чисел $x,p,i = 3\cdot 15$, а тройку $y,q,j = 3\cdot 18$

$\Rightarrow$ всего способов $3\cdot 15\cdot 3\cdot 18$

Также нужно учесть, что тройки по типу

$3^{14}\cdot 1$
$3^{14}\cdot 1$ - посчитаны 4 раза
$1\cdot 5^{14}$

То есть когда два числа равны (причем они могут быть равны хоть $3^{14}\cdot 1$ и $5^{14}\cdot 1$)

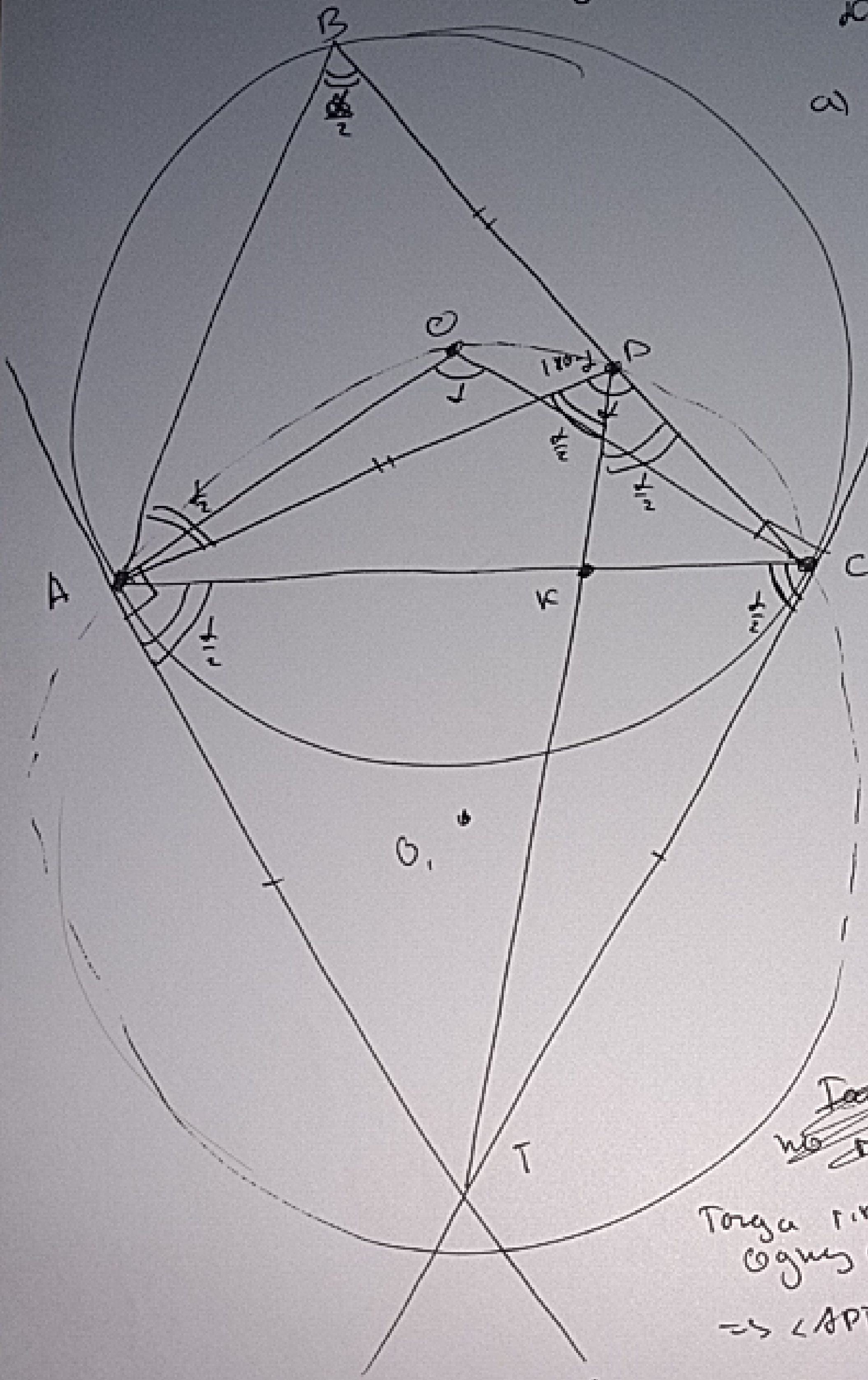
И таких случаев будет $3\cdot 2$, то есть нужно вычесть $3\cdot 2\cdot 3$

$\Rightarrow$ всего случаев $9\cdot 15\cdot 18 - 3\cdot 3\cdot 2 = 9\cdot(15\cdot 18 - 2) = 18\cdot(15\cdot 9 - 1) =$
$= 2412$

Ответ: 2412

Чистовик №6

2



Дано:

а) AT и CT – касательные

$S_{APK}=6$

$S_{CPK}=5$

1) Пусть $\angle APC = \alpha$

Тогда $\angle AOC = \alpha$ (опираются на одну дугу)

Тогда угол $\angle ABC = \frac{\alpha}{2}$ т.к. $\angle AOC$ – центральный.

Т.к. $\angle ABC = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow$ $\angle ACT$ и $\angle CAT$ равны $\frac{\alpha}{2}$, потому что по св-ву угла между касательной и хордой.

Т.к. $\angle APC = \alpha$

$\Rightarrow \angle APB = 180 - \alpha$

В $\triangle ABP \Rightarrow \angle BAP = 180 - 180 + \alpha - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}$

$\Rightarrow$ по признаку р-ба углов $\triangle ABP$ – р/б и $AP=BP$

~~Также $\triangle APB$ и $\triangle ACT$ подобны по трем углам~~

Тогда т.к. $\angle APT$ опирается на одну дугу с $\angle ACT \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle APT = \angle ACT = \frac{\alpha}{2}$

$\Rightarrow$ т.к. $\angle ABC = \angle TPC = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow PT \parallel AB$ по св-ву соотв. углов.

$\Rightarrow \boxed{\triangle PKC \sim \triangle ABC}$ с коэф. $\frac{AC}{KC}$

2) т.к. $S_{APK}=6$, $S_{PCK}=5$ и эти треугольники имеют общую высоту $\Rightarrow \frac{S_{APK}}{S_{PCK}} = \frac{AK}{KC} = \frac{6}{5} \Rightarrow \frac{AC}{KC} = \frac{6+5}{5} = \frac{11}{5}$

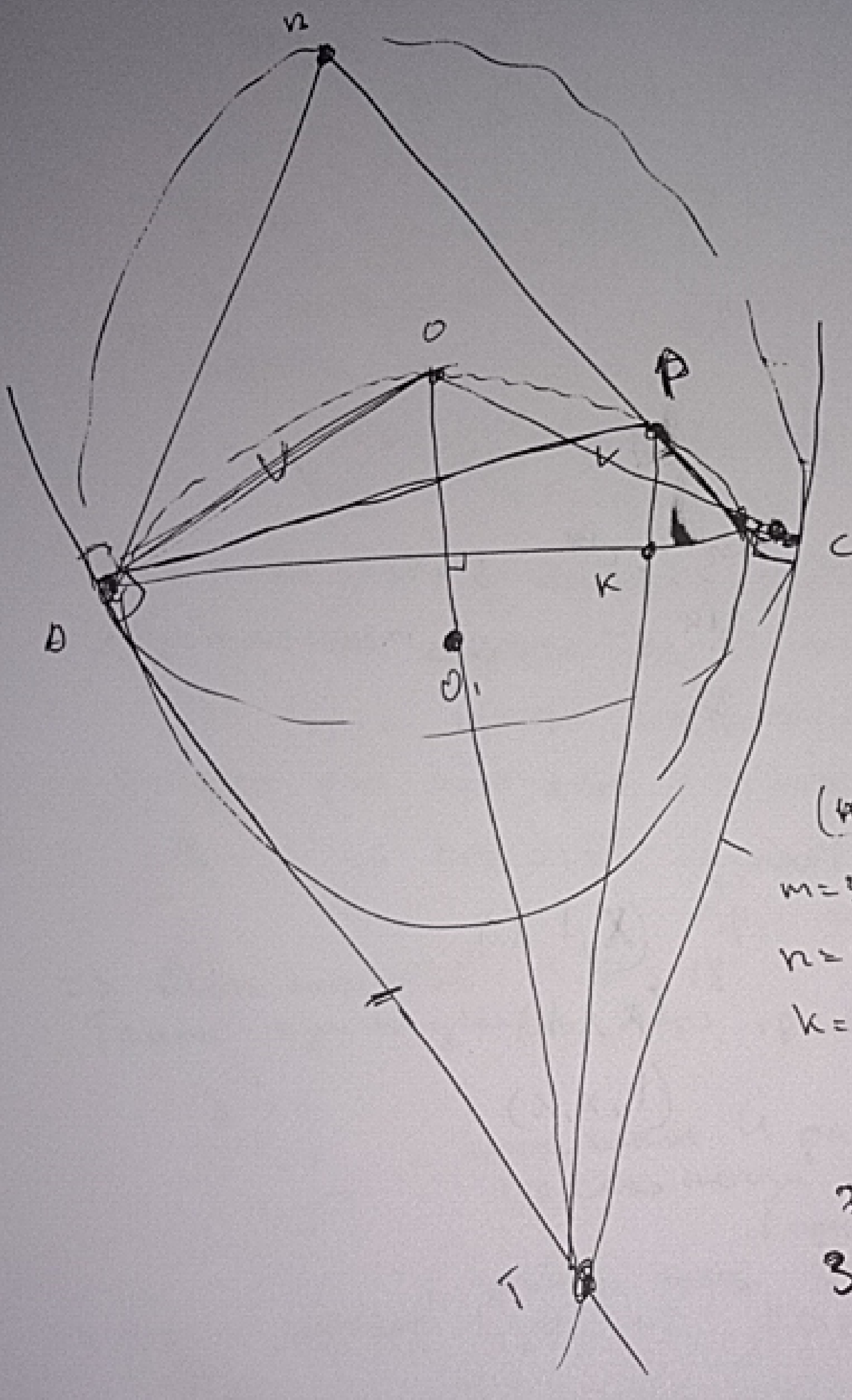
Тогда $\triangle PKC \sim \triangle ABC$ с коэф. $\frac{AC}{KC} = \frac{11}{5}$

$\Rightarrow \frac{S_{\triangle PKC}}{S_{ABC}} = \left(\frac{5}{11}\right)^2 = \frac{25}{121}$ т.к. $S_{\triangle PKC} = 5$

$\Rightarrow \boxed{S_{ABC} = \frac{121 \cdot 5}{25} = \frac{121}{5}}$ Ответ: $\frac{121}{5}$

Черновик

$x=y$



$\frac{3^{14}\cdot 5^{12}}{m}$

(m, n, k)

$m=3^x\cdot 5^y$ $\left[\begin{array}{l} x,q,a=0\\ y,p,b=0\end{array}\right.$

$n=3^q\cdot 5^p$

$k=3^a\cdot 5^b$ $x,q,a=14$

$y,p,b=15$

$3\cdot 15$ $3\cdot 18$ $\begin{array}{r} 18\\ \times 15 \end{array}$

$3^{14}\cdot 1$ $135-1=134$

$3^{14}\cdot 1$

$\begin{array}{r} 134\\ \times 18\\ \hline 1072\\ 1340\\ \hline 2412 \end{array}$

~~Бездомная~~ Черновик
№3

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 < 5 \\ a^2+b^2 \le \min(4a-2b,5) \end{cases}$$

$$2\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)=2\log_{6x-14}(x-1)$$

$$\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)=\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)+1$$

$$\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)=\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)(x-1)$$

$$\begin{cases} \log_a b=\log_b c \\ 2\log_a b=\log_c a+1 \\ 2\log_b c=\log_c a+1 \end{cases} \quad 2\log_a b=$$

$a=\frac{x}{3}+3$

$b=6x-14$

$c=x-1$

$$\log_a b=\frac{\log_a c}{\log_a b}$$

$$\log_a b=\frac{1}{\log_c b} \qquad \log_a b\cdot\log_c b=1$$

$$\log_a b^{\log_c b}$$

$$6x-14=2(3x-7)=2(3x+9-16)$$

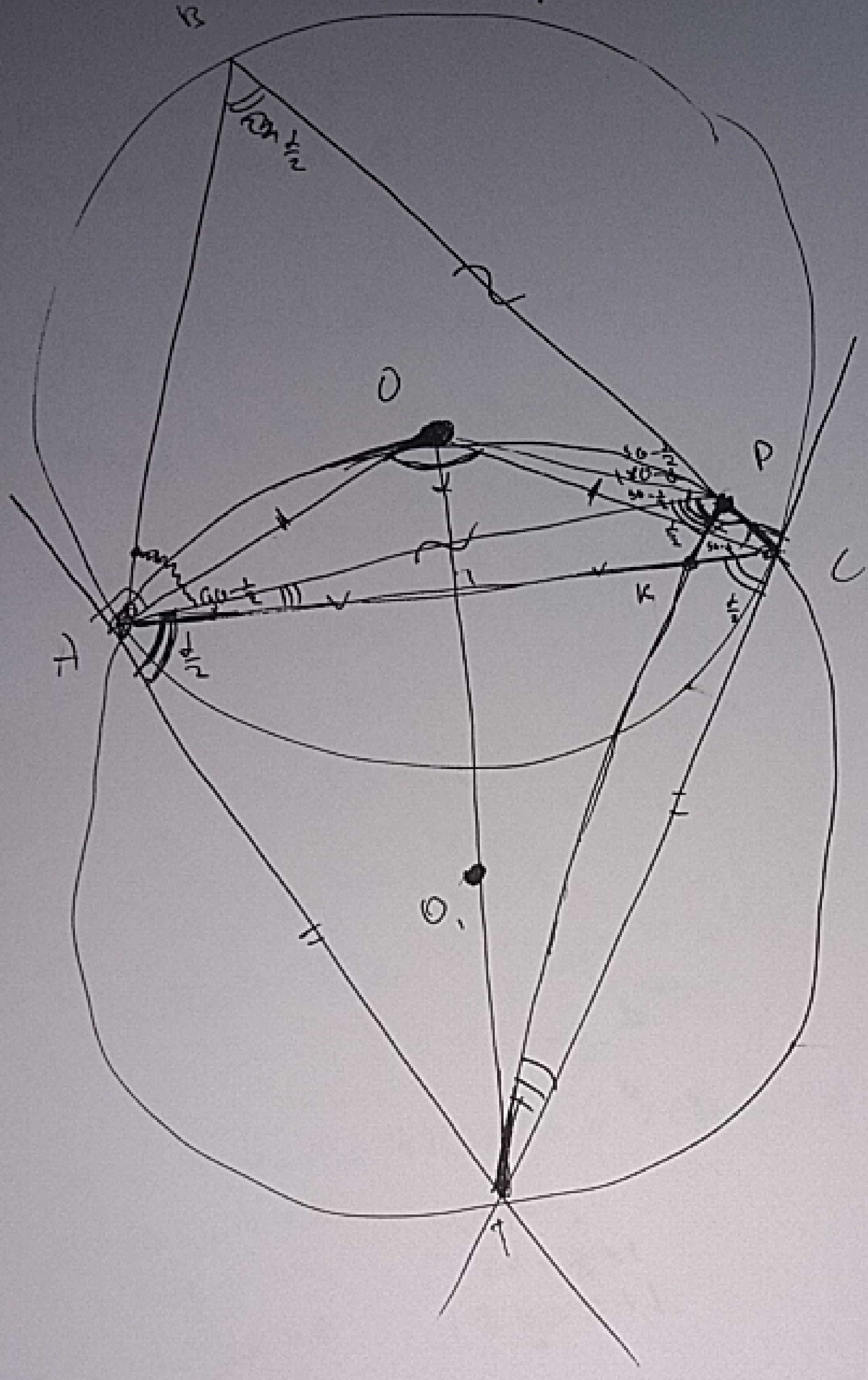
$\log_a b=x$

$\log_b c=y$

$\log_c a=z$

$$\begin{cases} x=y \\ 2x=z+1 \\ 2y=z+1 \end{cases}$$

Черновик



$\frac{AK}{KC} = \frac{6}{5}$

$S_{CPA} = 4$

~~180~~

$180 - 180 + \alpha - \frac{\alpha}{2}$

$\frac{AC}{AB}$