Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101926**

ID профиля: **332724**

Вариант 18

№1 Чистовик

Вариант 18.

$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_7 = 7a_1 + 21d$, где d - разность прогрессии

$a_7 a_{12} > S + 20$

$a_9 a_{10} < S + 44$

$(a_1 + 6d)(a_1 + 11d) > S + 20$

$(a_1 + 9d)(a_1 + 8d) < S + 20 + 24$

$a_1^2 + a_1(6d + 11d) + 66d^2 > S + 20$

$a_1^2 + a_1(9d + 8d) + 72d^2 < S + 20 + 24$

$a_1^2 + 17a_1 d + 66d^2 > S + 20$ (1)

$a_1^2 + 17a_1 d + 72d^2 - 24 < S + 20$ (2)

Пусть $T = S + 20 - a_1^2 - 17a_1 d - 66d^2$

Тогда (1): $0 > T$

(2): $6d^2 - 24 < T$

Т.е

$6d^2 - 24 < T < 0$

Тогда справедливо:

$6d^2 - 24 < 0$

$d^2 < 4$

ТК $a_1 \in \mathbb{Z}$, и прогрессия возрастающая, то $d = 1$

$d = 1$

$a_7 a_{12} > S + 20$

$a_9 \cdot a_{10} < S + 44$

21101926 (U332724 M1304232)

(1)

См след стр.

№1 продолжение Чистовик

$(a_1+6)(a_1+11) > 7a_1+21+20$

$(a_1+8)(a_1+9) < 7a_1+44+21$

$a_1^2+17a_1+66-7a_1-41>0$

$a_1^2+17a_1+72-7a_1-44-21<0$

$a_1^2+10a_1+25>0$

$a_1^2+10a_1+7<0$

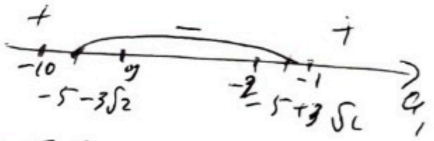
$(a_1+5)^2>0$; всегда выполнено при $a_1 \neq -5$

$(a_1+5)^2-18<0$ решим как кв-ное относительно a_1

$(a_1+5)^2=18$

$a_1+5=\pm 3\sqrt{2}$

$a_1=-5\pm 3\sqrt{2}$



$-5-3\sqrt{2} \vee -9$

$-3\sqrt{2} \vee -4$

$3\sqrt{2} \vee 4$

$18>16$

$-5-3\sqrt{2}<-9$

$-5-3\sqrt{2} \vee -10$

$3\sqrt{2} \wedge 5$

$18<25$

$-5-3\sqrt{2}>-10$

$-5+3\sqrt{2} \vee -1$

$3\sqrt{2} \vee 4$

$18>16$

$-5+3\sqrt{2}>16$

$-5+3\sqrt{2} \vee -2$

$3\sqrt{2}>3$

$-5+3\sqrt{7}>3$

Те $a_1=\{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2\}$

2

21101926 (U332724 M1304232)

Ответ: $-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2$

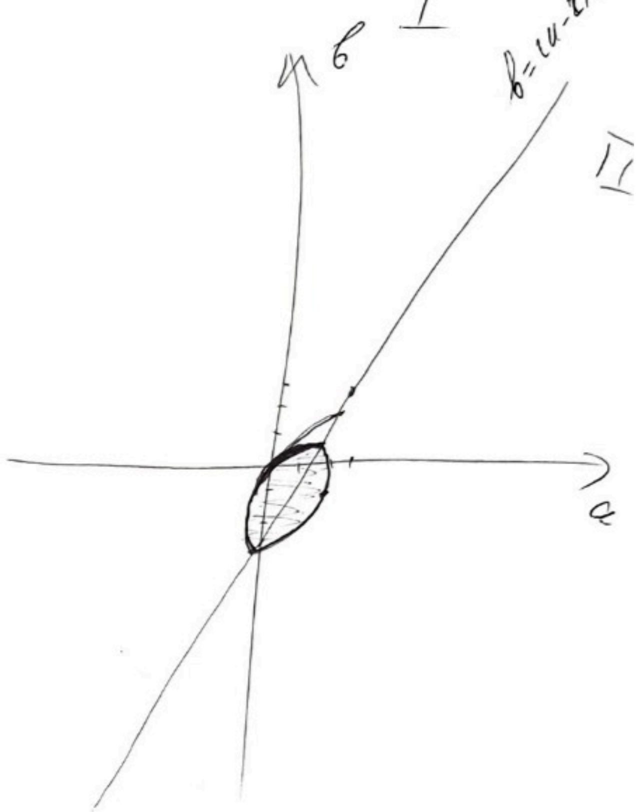
№3 Чистовик

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 5 & ② \\ a^2+b^2\le \min(4a-2b;5) & ①\end{cases}$$

① построим в осях ab.
найдём когда узнаем $\min(4a-2b;5)$
т.е. $4a-2b=5$

$b=2a-2{,}5$ (*)

т.е. прямая (*) поделила плоскость на 2 части. Тогда в I
$\min(4a-2b;5)=4a-2b$
тогда построим в I части фигуру:
$a^2+b^2\le 4a-2b+5-5$
$(a-2)^2+(b-1)^2\le 5$ - круг с центром $(2;1)$ и радиуса $\sqrt5$
Заметим, что $2^2+1^2=\sqrt5^2$, т.е. круг проходит через $(0;0)$.



Теперь построим во II полуплоскости.
т.е. $\min(4a-2b;5)=5$
$a^2+b^2\le 5$ — круг с центром $(0;0)$ и радиуса $\sqrt5$.
Тогда пересечение с (*) будет при

$a^2+(2a-2{,}5)^2=5$
$a^2+4a^2-10a+6{,}25=5$
$5a^2-10a+1{,}25=0$
$a^2-2a+0{,}25=0$

$a=\dfrac{2\pm\sqrt{4-4\cdot 0{,}25}}{2}=\dfrac{2\pm\sqrt3}{2}$

т.е. $\left(\frac{2+\sqrt3}{2};\ \sqrt3-0{,}5\right)$, $\left(\frac{2-\sqrt3}{2};\ -\sqrt3-0{,}5\right)$

См след стр.

3

21101926 (U332724 M1304232)

Чистовик

Получаем, что

① ~~мн~~ мн-во у нас 2 симметричных сегмента.

Так же если посмотреть на ур-ние ①, то это окружность с центром $(a;b)$ и радиуса $\sqrt{5}$.

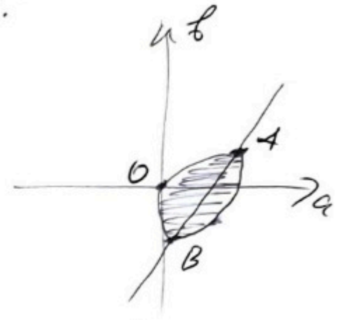
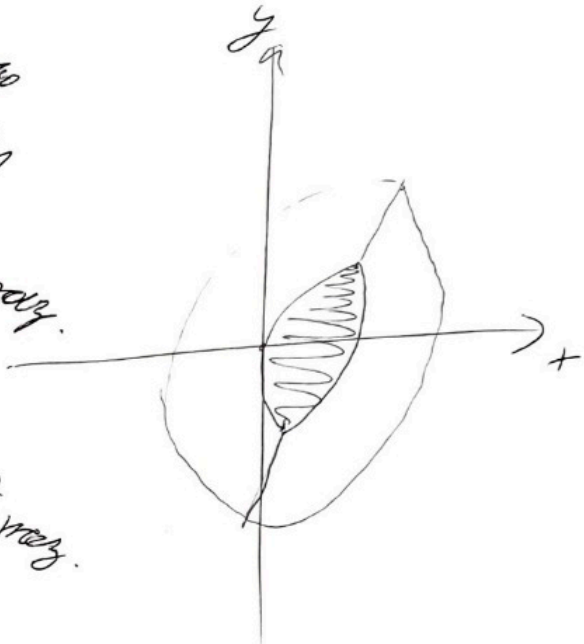


рис. 1

Т.к центр окружности описывает такую фигуру (рис. 1), то искомая фигура M это фигура с (рис 1) увеличенная в $\sqrt{3}$ раз.

Чтоб найти площадь M надо найти площадь с рис. 1 и увеличить в $(\sqrt{3})^2$ раз.



(рис 2)

Как мы нашли ранее координаты

$A\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2};\ \sqrt{3}-0{,}5\right)$

$B\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2};\ -\sqrt{3}-0{,}5\right)$.

Тогда $AB=\sqrt{\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}-\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)^2+(\sqrt{3}-0{,}5-(-\sqrt{3}-0{,}5))^2}=$

$=\sqrt{3+12}=\sqrt{15}$

~~∠AOB~~

по т. косинусов в △AOB

$AB^2=OA^2+OB-2\,OA\cdot OB\cdot\cos\angle AOB$

$15=5+5-10\cos\angle AOB$

$\cos\angle AOB=-\frac{1}{2}$

$\angle AOB=\frac{2\pi}{3}$. ~~[illegible]~~ смслеу сер.

21101926 (U332724 M1304232)

№2

Чистовик

$AB = 2$
$AC = CB = 5$
$AD = DB = 7$

$r \to \min$
$CD = ?$

~~Пусть на CD есть точка M.~~

$\sin 2AMB$

– середина AB.

$DT = \sqrt{48}$
$CT = \sqrt{24}$ по т. Пифагора.

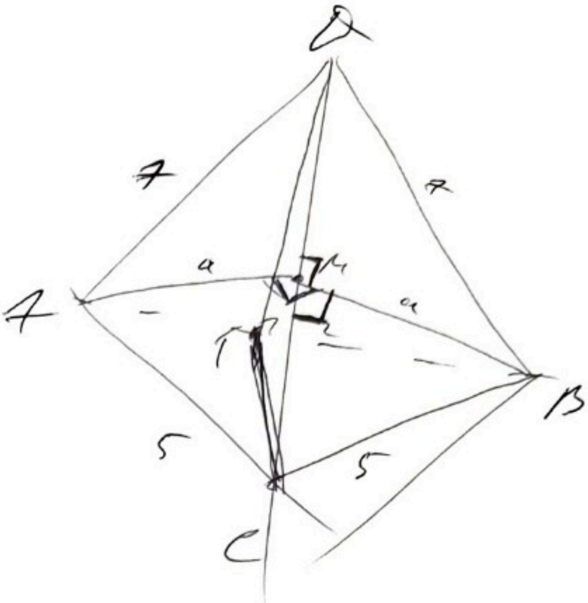
~~.~~ r может быть меньше $\frac{AB}{2}$.

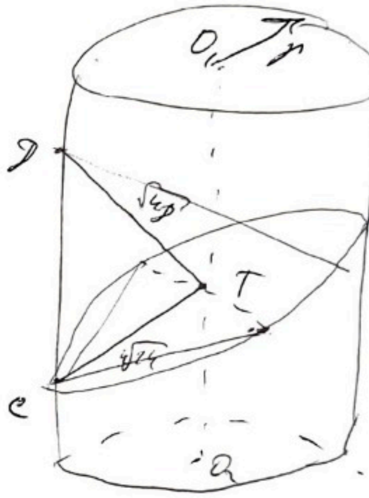
$\min r = 1$

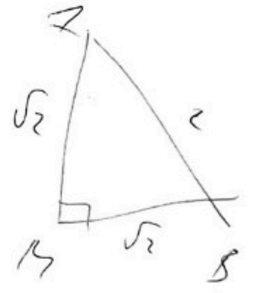
M – должна быть выбрана при том что $\frac{AB}{\sin AMB} \to \min$

$\sin AMB = 1$

$\angle AMB = \frac{\pi}{2}$







6

Чистовик

Тогда площадь сектора OAB это $\frac{\pi r^2}{3}$ т.е. $\frac{\pi 5}{3}$.

Площадь сегмента $\frac{5\pi}{3} - S_{AOB} = \frac{5\pi}{3} - \frac{1}{2} \cdot AB \cdot OB \sin\angle AOB =$

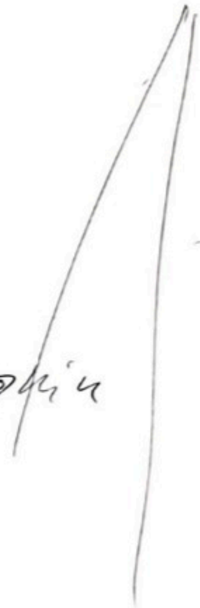
$= \frac{5\pi}{3} - \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \underline{\frac{5\pi}{3} - \frac{5\sqrt{3}}{4}}$.

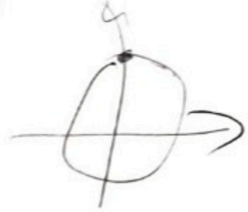
Тогда площадь двух сегментов это $\frac{10\pi}{3} - \frac{5\sqrt{3}}{2}$

А площадь искомой фигуры это $\frac{50\pi}{3} - \frac{25\sqrt{3}}{2}$

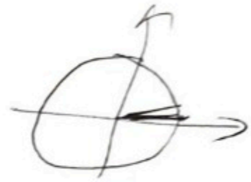
Ответ: $\frac{50\pi}{3} - \frac{25\sqrt{3}}{2}$.

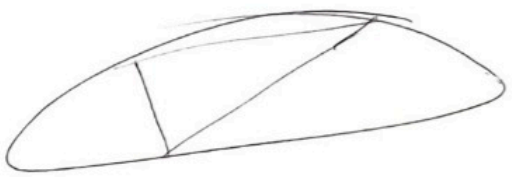
Черновик $r \to \min$





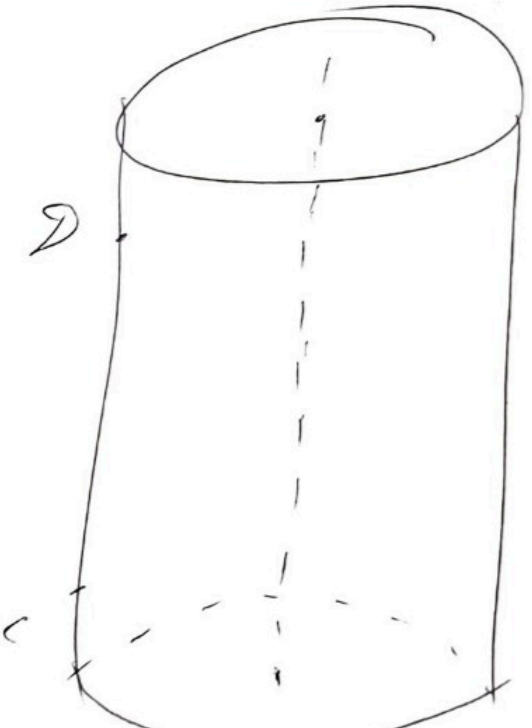
$\frac{2}{\sin\varphi} \to \min$

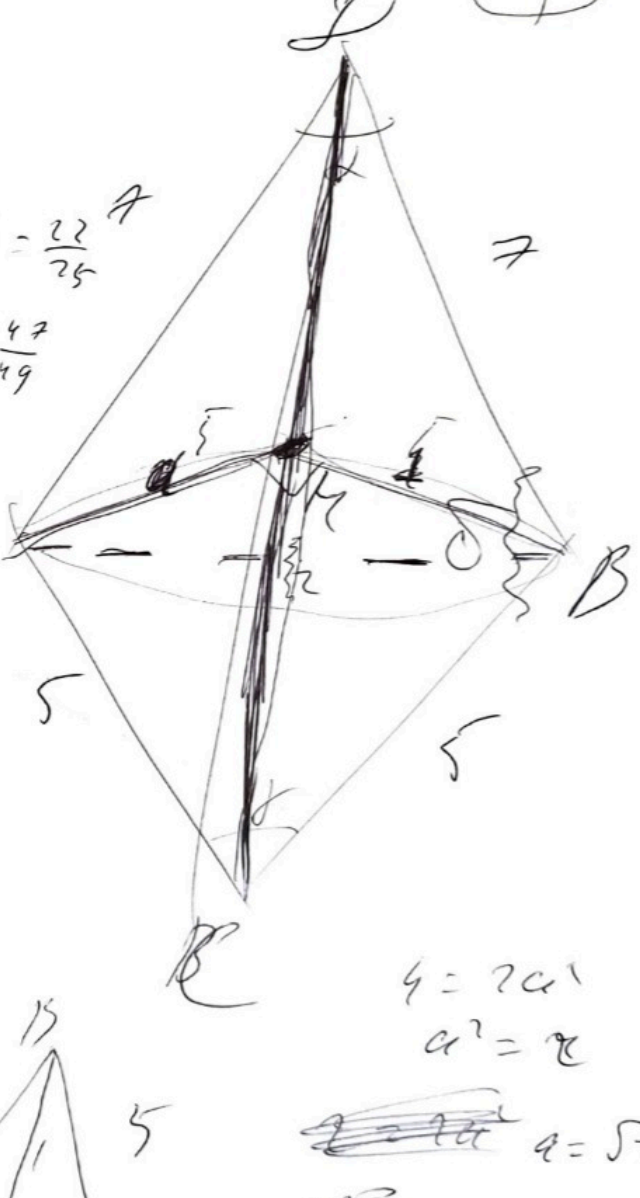




$y = 50 - 50\cos\beta \qquad \cos\beta = \frac{46}{50} = \frac{23}{25}$

$y = 98 - 98\cos\alpha, \qquad \cos\alpha = \frac{94}{98} = \frac{47}{49}$





$y = 2a^2$

$a^2 = 2$

$a = \sqrt{2}$

$25 - 2 = \sqrt{23}$

21101926 (U332724 M1304232)

Черновик

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \geq 5 \\ a^2+b^2 \leq \min(4a-2b, 5) \end{cases}$$

$8+2$

10

$4a-2b=5$

$b=2a-2,5$

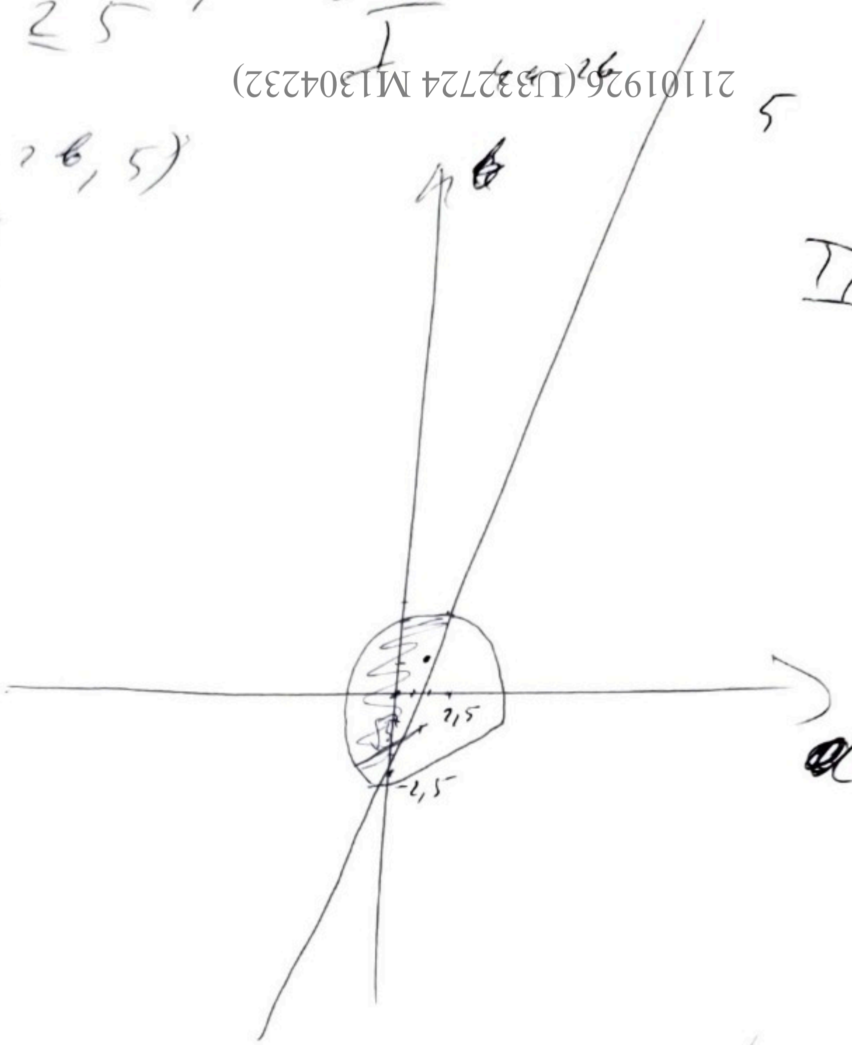
I:

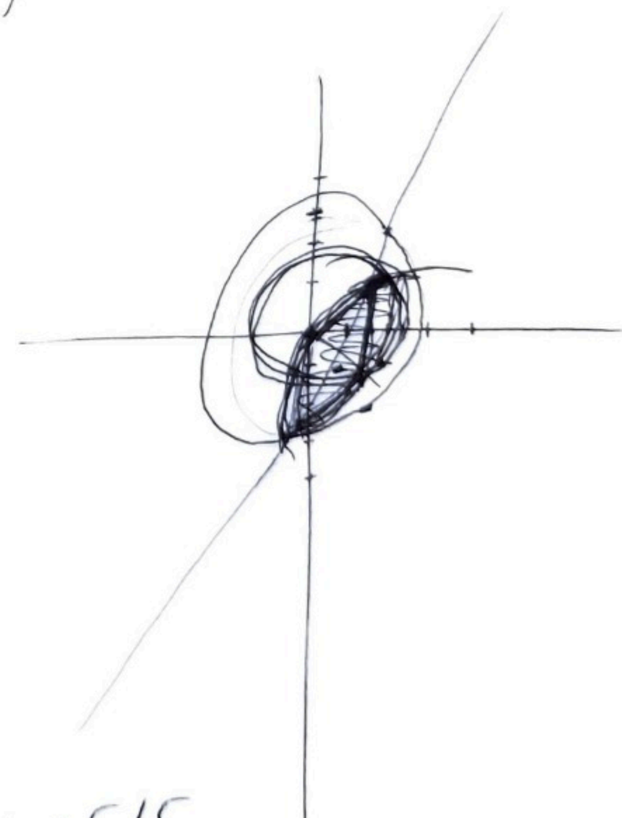
$a^2+b^2 \leq 4a-2b+4+1$

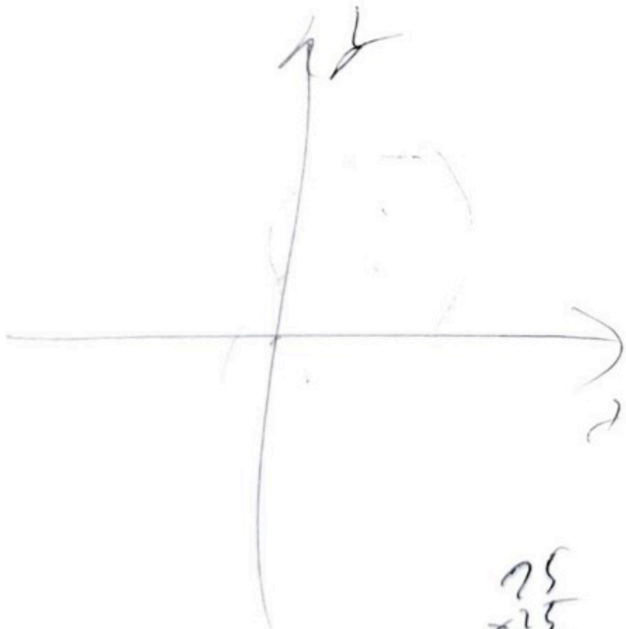
$(a^2-2)^2+(b+1)^2 \leq 5$

II $a^2+b^2 \leq 5$

21101926 (U332724 M1304232)







$\begin{array}{r} 25 \\ \times 25 \\ \hline 625 \end{array}$

$1,25 / 5 = 0,25$

$\frac{2-\sqrt{3}}{2}$

$2-\sqrt{3}-0,5$

$2+\sqrt{3}-2,5$

$\sqrt{3}-0,5$

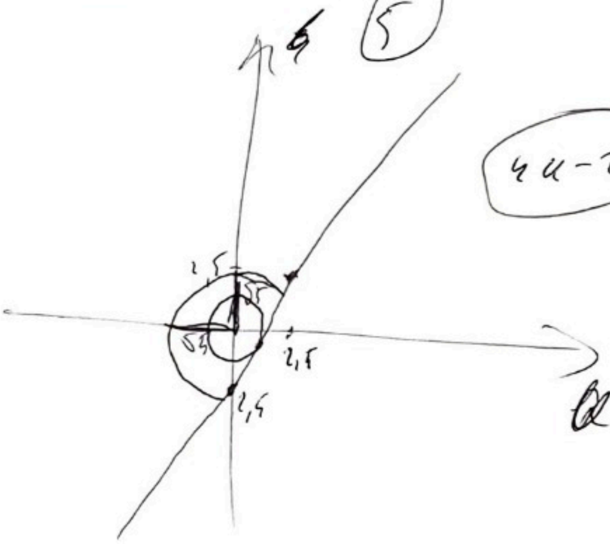
$AB = 2$
$AC = CB = 5$
$AD = DB = 7$

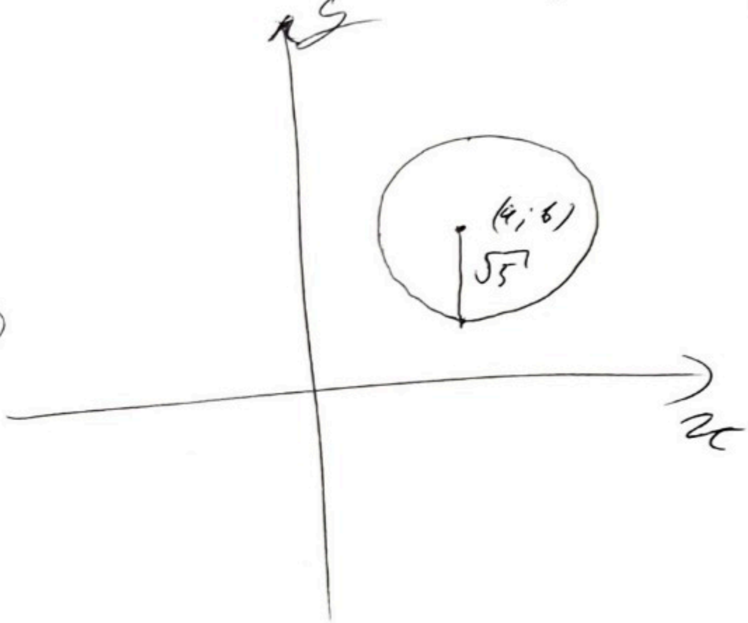
Черновик

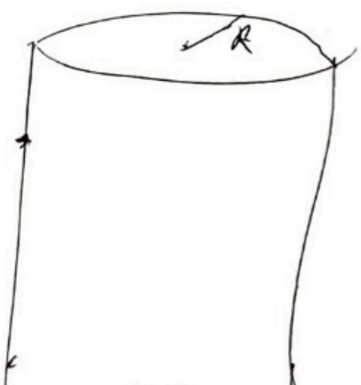
$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \le 5 \\ a^2 + b^2 \le \min(4a - 2b, 5) \end{cases}$$

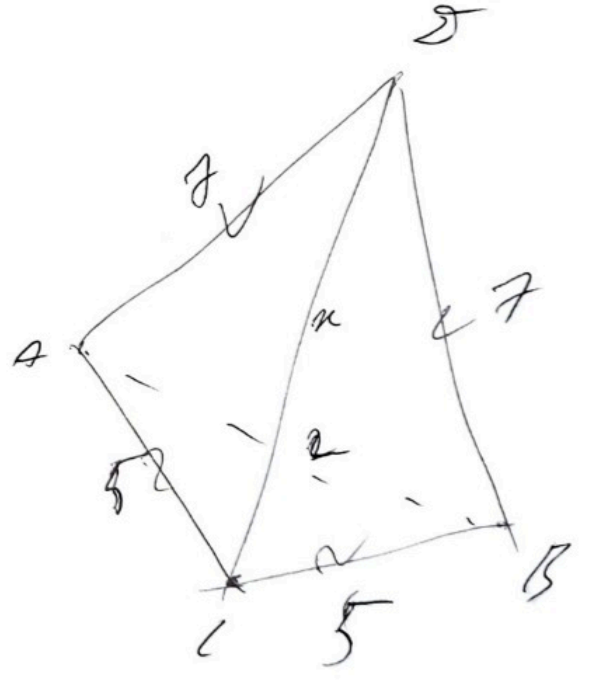
$4a - 2b = 5$

$b = 2a - 2,5$









$a_7 a_{12} > S + 20$

$a_4 a_{10} < S + 44$

$\ldots = 7(a_1 + 3d) = 7a_4$

$a_1 + 6d$

$a_7 = (2a_4 - a_1)$

$a_{12} = (a_1 + 11d)$

$$\begin{cases} a_1^2 + 25da_1 + 114d^2 > 7a_1 + 21d + 20 \quad T \\ a_1^2 + 17da_1 + 72d^2 < 7a_1 + 21d + 44 \end{cases}$$

14·6 ; 8·9

$\cancel{a_1(a_1 + 25d - 7) > d(21 - 114d) + 20}$

$a_1 = ?$

$$\begin{cases} a_1^2 + 25da_1 + 114d^2 > T \\ a_1^2 + 17da_1 + 72d^2 - 24 < T \end{cases}$$

$25 - 17 = 8$

$114 - 72 = 42$

$$\begin{cases} 8da_1 + 42d^2 > T' \\ -24 < T' \end{cases}$$

$8d(a_1 + 6d) > T'$

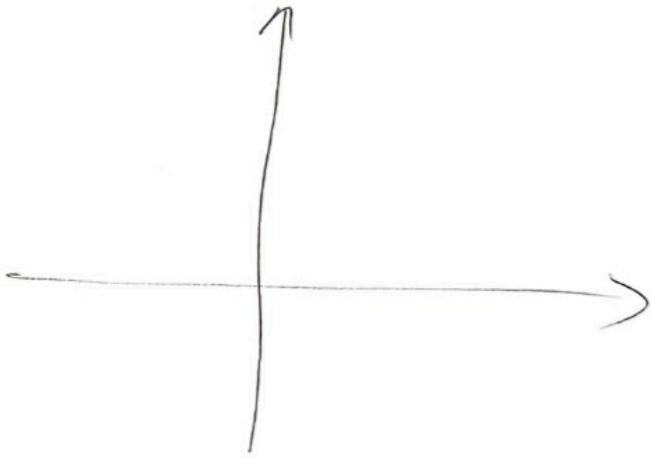
$-24 < T'$

$\cancel{8(a_1 + 2)} > T - 24$

$8d(a_1 + 6d) > T' > -24$

$\cancel{8}^{4} d(a_1 + 6d) > -\cancel{24}\ 3$

$d(a_1 + 6d) > -3$



$a_1 + 6 > -3$ | $d = 2$

$a_1 > -9$ | $2(a_1 + 12) > -3$

21101926 (U332724 M1304232)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101926**

ID профиля: **332724**

Вариант 18

№5 Чистовик Вариант 18.

$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)$; $\log_{6x-14}(x-1)^2$, $\log_{x-1}(\frac{x}{3}+3)$

Ограничения

$$\begin{cases} \frac{x}{3}+3>0 \\ \frac{x}{3}+3\neq 1 \\ 6x-14>0 \\ 6x-14\neq 1 \\ x-1>0 \\ x-1\neq 0 \end{cases}$$

$x>\frac{7}{3}$

$x\neq\frac{15}{3}$.

$\frac{x}{3}+3=a$

$6x-14=b$

$x-1=c$

Тогда:

$2\log_a b$; $2\log_b c$; $\log_c a$

Пусть они равны соответственно A, B, C.

Тогда заметим, что $A\cdot B\cdot C=4$

действительно. $\frac{2\ln b}{\ln a}\cdot\frac{2\ln c}{\ln b}\cdot\frac{\ln a}{\ln c}=4$.

Пусть какой-то из них равен α, тогда получило.

$\alpha^2(\alpha-1)=4$

$\alpha^3-\alpha^2-4=0$

Заметим что $\alpha=2$ - корень.

$(\alpha-2)(\underbrace{\alpha^2+\alpha+2}_{>0})=0$

>0, т.к. это $(x+\frac{1}{2})^2+1+\frac{3}{4}>0$.

$$\begin{array}{r|l} \alpha^3-\alpha^2-4 & \alpha-2 \\ \underline{\alpha^3-2\alpha^2} & \alpha^2+\alpha+2 \\ 0+\alpha^2-4 & \\ \underline{\alpha^2-2\alpha} & \\ 2\alpha-4 & \\ \underline{2\alpha-4} & \\ 0 & \end{array}$$

$\alpha=2$.

(1)

См след стр.

21101926 (U332724 M1304233)

1ч

Шабовик

$$\begin{cases} 2=4=B \\ 1=C \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\log_a b = x' \\ x\log_b c = x, \\ \log_c a = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_{\frac{t}{3}+3}(6t-14)=\log_{\frac{t}{3}+3}\frac{t}{3}+3 \\ \log_{6t-14}(t-1)=\log_{6t-14}(6t-14) \\ \log_{t-1}(\frac{t}{3}+3)=\log_{t-1}t-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6t-14=\frac{t}{3}+3 \\ t-1=6t-14 \\ \frac{t}{3}+3=t-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{17t}{3}=17, \\ 5t=13 \\ 4=\frac{2t}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} t=3 \\ t=13 \\ t=6 \end{cases}$$ нет таких t.

2ч

$$\begin{cases} 2=4=C \\ B=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\log_4 6 = x' \quad (1) \\ \log_c 4 = 2 \quad (2) \\ 2\log_6 c = 1 \quad (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_{\frac{t}{3}+3}(6t-14)=1 \\ \cancel{\log_{6t-14}(t-1)=\log_{6t-14}} \\ 2\log_{t-1}(\frac{t}{3}+3)=2 \\ 2\log_{6t-14}(t-1)=1 \end{cases}$$

, посчитано выше $t=3$

$\boxed{t=3}$

(1) - верно.

(2) $\log_2 4=2$ верно

(3) $2\log_4(2)=1$ ~~неверно~~ верно

2

21101926 (U332724 M1304233)

Чистовик

3 сл

$$\begin{cases} B = C = 2 \\ A = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\log_{6x-14}(x-1) = 2 \quad (4) \\ \log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right) = 2 \quad (5) \\ 2\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14) = 1 \quad (6). \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-1)^2 = 6x-14 \\ \frac{x}{3}+3 = (x-1)^2 \\ \frac{x}{3}+3 = 6x-14; \ x=3 \end{cases}$$

если $x=3$, подходит.

$x = 3 > \frac{7}{3}$ и $3 \neq \frac{15}{3}$ подходит.

Ответ: 3.

3

Чистовик

№4

$$\begin{cases} НОД(a, b, c) = 3\cdot 5 \\ НОК(a; b; c) = 3^{15}\cdot 5^{18} \end{cases}$$

Пусть $a = 3^{\alpha}5^{\bar\alpha}$
$b = 3^{\beta}5^{\bar\beta}$ $\alpha, \bar\alpha, \beta, \bar\beta, \gamma, \bar\gamma \geq 1$
$c = 3^{\gamma}\cdot 5^{\bar\gamma}$

Других общих множителей кроме 3 и 5 быть не может. т.к тогда НОК содержал бы их.

Считаем отдельно тройки „3" и отдельно „5" т.к это простые числа, то кол-во способов не завист. друг от друга.

1) $\alpha + \beta + \gamma = 15$

Воспользуемся методом шаров и перегородок. Пусть есть 15 шаров.

$$0\ 0\ \overset{\alpha}{0}\ 0\ 0 \,|\, 0\ 0\ \overset{\beta}{0}\ 0\ 0 \,|\, 0\ \overset{\gamma}{0}\ 0\ 0\ 0$$

и 2 перегородки. есть $\boxed{C_{14}^2}$ различных способов их поставить, т.к слева от левой сколько шаров столько и равна α посередине β и в конце γ.

2) Аналогично считаем пятёрок.

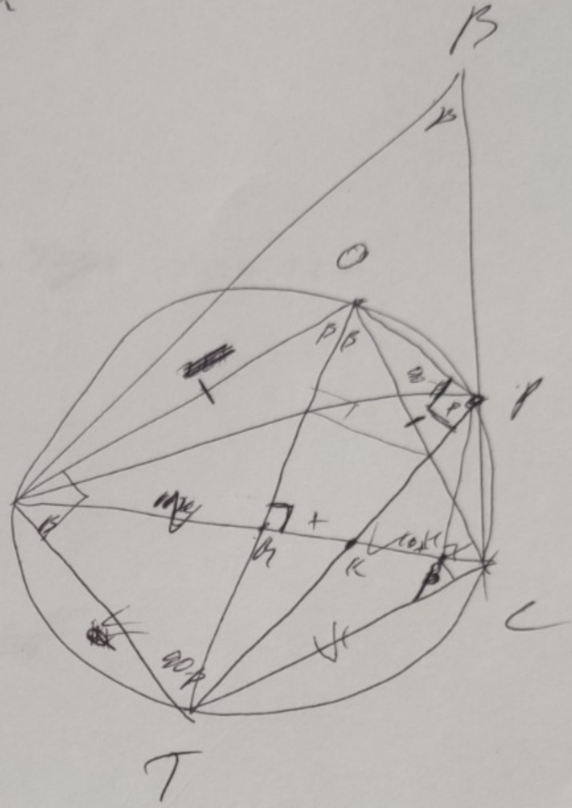
См след стр

21101926 (U332724 M1304233)

№6 Чистовик

$\triangle ABC$
$S_{APK} = 6$
$S_{CPK} = 5$

$S_{ABC} = 1$
$tg\angle ABC = \frac{1}{2}$
$AC - ?$



ТК AT и CT касательные к ω, то $\angle TAC = \angle ABC$
~~как~~
угол между хордой и касательной.
Те $\angle B = \beta$
$\angle CAT = \beta$, аналогично и $\angle ACT = \beta$.
Те $\angle ATC = 180° - 2\beta$.
$\angle AOC = 2\angle B$ тк это центральный угол.
Те $\angle ATC + \angle AOC = 180°$ тс $AOCT$ – вписанный четырёхугольник.

6

M – середина AC.
OM – биссектр-медиана-высота в р/б $\triangle AOC$ ($AO = OC$ – радиусы)
Так и $AT = TC$ как отрезки касательных к ω.
Те $\angle ATO = \angle OTC = 90° - \beta$
Тогда в $\triangle AOT$; $\angle A = 90°$.

21101926 (U332724 M1304233)

Чистовик

$S_{APH} = \frac{1}{2} PH \cdot AK = 6$

$S_{HPC} = \frac{1}{2} PH \cdot KC = 5$

$\frac{6}{5} = \frac{AK}{KC}$ тогда $KC = 10x$, тогда $AC = 22x$

б) $\beta = \frac{1}{2}$

$\frac{AT}{AO} = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ AOT

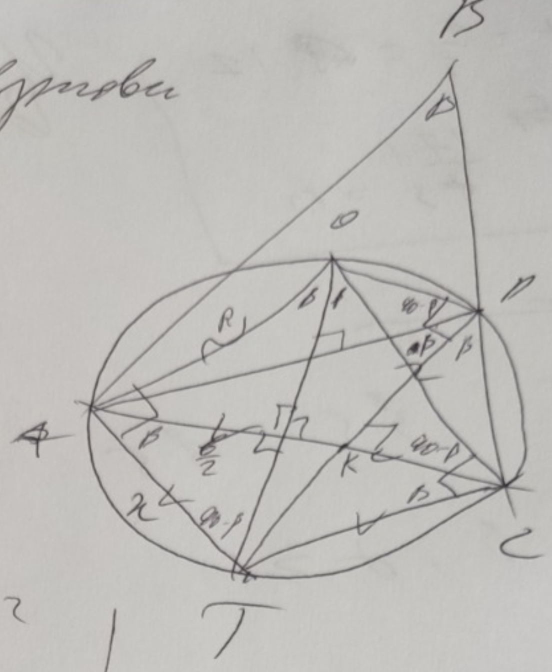
7

$S_{ABK} = 6$

$S_{CBK} = 5$

$S_{ABC} = ?$

Цурикова



$11 = \frac{1}{2} \cdot \sin 2\beta \cdot R^2$

$\cancel{11 = 2}$

$11 = \sin\beta \cos\beta \, R^2$, $\sin\beta = \frac{6}{2R}$

$11 = \frac{6}{2R} \cdot \frac{6}{2R} R^2$

$\frac{6}{\sin\beta} = 2R$

$S_{ABC} =$

$6t - \frac{t}{3} = \cancel{18}\ 17$

$\cancel{18}$ $\frac{17t}{\cancel{t}\,3} = 17$

Чернови

$\cancel{15}$ 15

35

$3^{8} \cdot 5$ $3^{t} \cdot 5$

$\alpha;\ \beta;\ \gamma \geq 1$

$\alpha + \beta + \gamma = 15$

0 0 0 0

0 00 0 00|0 0 0 0|0 0|0 0 0 0

$\frac{14 \cdot 13 \cdot \cancel{12}}{6.}$ C_{14}^{2}

C_{17}^{2}

$C_{14}^{2} \cdot C_{17}^{2}$

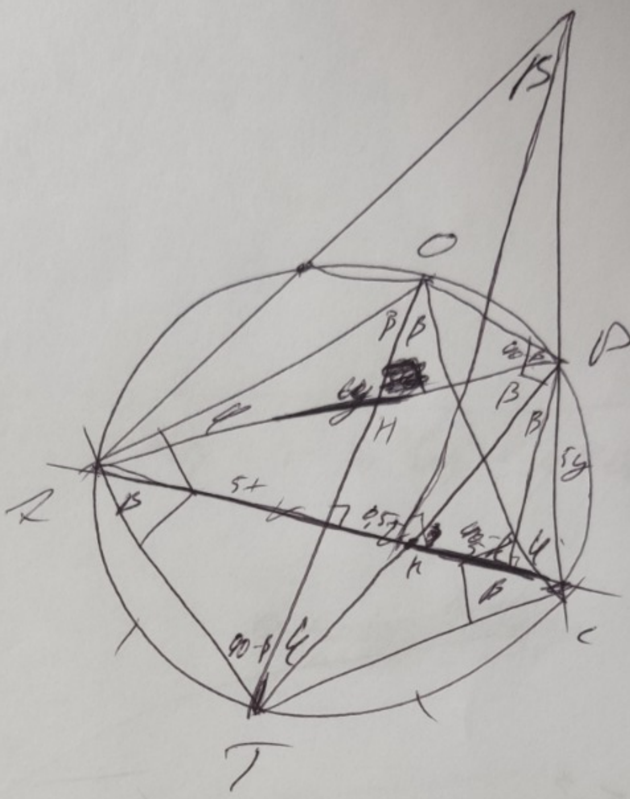
$\frac{14 \cdot 13}{2} \cdot \frac{17 \cdot \cancel{16} \cdot \cancel{15}}{2}$

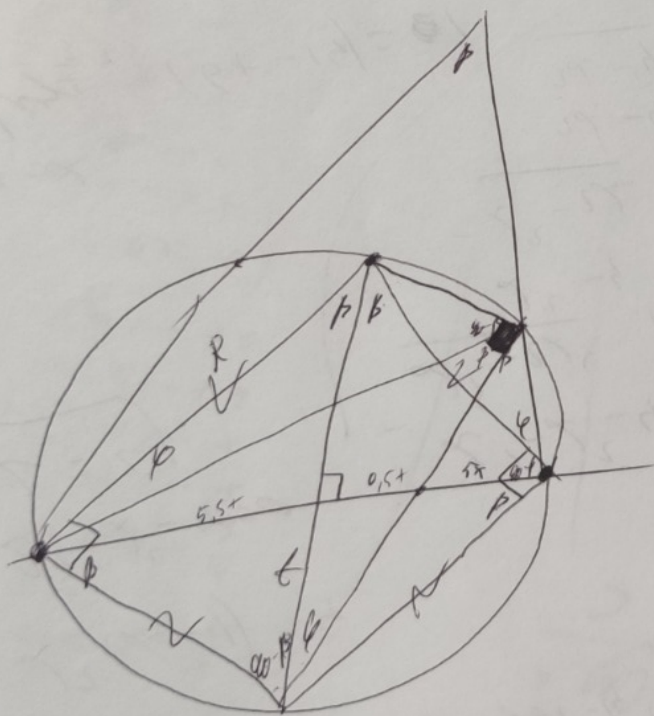
$S_{KBC} = 5 = \frac{1}{2} h \cdot KC$ Черновик

$S_{ABK} = 6 = \frac{1}{2} h \cdot AK$

$\frac{5}{6} = \frac{KC}{AK}$

$\frac{1}{2}H$





$\frac{11x}{\sin 2\beta} = 2R$

$\frac{11x}{\sin 4\beta} = 2R$

$tg\,\varphi = \frac{t}{2x}$

$tg\,\beta = \frac{t}{5,5x}$

21101926 (U332724 M1304233)

$\frac{2\log_{\frac{t}{3}+3}(6t-14)}{A}$; $\frac{2\log_{6t-14}(t-1)}{B}$; $\frac{\log_{2t-1}\left(\frac{t+3}{3}\right)}{C}$

$t > \frac{7}{3}$

$t \neq \frac{13}{3}$

$2\log_{\frac{t}{3}+3}(6t-14) = 2\log_{6t-14}(t-1)$

$\alpha^2(\alpha-1)=4$

$\alpha^3-\alpha^2-4=0$

$\boxed{\alpha=2}$

$\alpha^3-\alpha^2-4 \,|\, \alpha-2$

$\alpha^3-2\alpha^2 \quad \alpha^2+\alpha+2$

α^2-4

$-\alpha^2-2\alpha$

$2\alpha-4$

$2\alpha-4$

$\alpha^2+\alpha+2=0$

$(\alpha+\frac{1}{2})^2+1+\frac{3}{4}>0.$

$\alpha \cdot c=4$

$AB=$

$A=\alpha$

$\log_{\frac{t}{3}+3}(6t-14)=1$

21101926 (U332724 M1304233)

$\frac{x}{3}+3>0$ $\quad x-1>0$

$\frac{x}{3}+3\neq 1$ $\quad x-1\neq 0$

$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)$, $\log_{6x-14}(x-1)^2$, $\log_{x-1}(\frac{x}{3}+3)$

$a=\frac{x}{3}+3$; $b=6x-14$; $c=x-1$

$\frac{2\log_a b}{a}$; $\frac{2\log_b c}{b}$; $\frac{\log_c a}{c}$

$\log_a b=\log_b c$

$\frac{1}{\log_b a}-\log_b c=0$

$\cancel{\frac{1-\log_b c\log_b a}{\log_b a}}=0$

$\frac{\log_c b}{\log_c a}-\frac{1}{\log_c b}=0$

$\frac{x}{3}+3>0$

$\frac{x}{3}+3\neq 1$

$x-1>0$

$x-1\neq 1$

$6x-14>0$

$6x-14\neq 1$

$x>-9$

$x\neq -6$

$x>1$

$x\neq 2$

$x>\frac{14}{6}=\frac{7}{3}$

$x\neq\frac{15}{6}$

$\cancel{\log_{x-1}(\frac{x}{3}+9)}$ 2

$2\log_a b=\log_c a-1=\log_c\frac{a}{c}=\frac{\log_a\frac{a}{c}}{\log_a c}$

21101926 (U332724 M1304233)

$S_{APK} = 6$

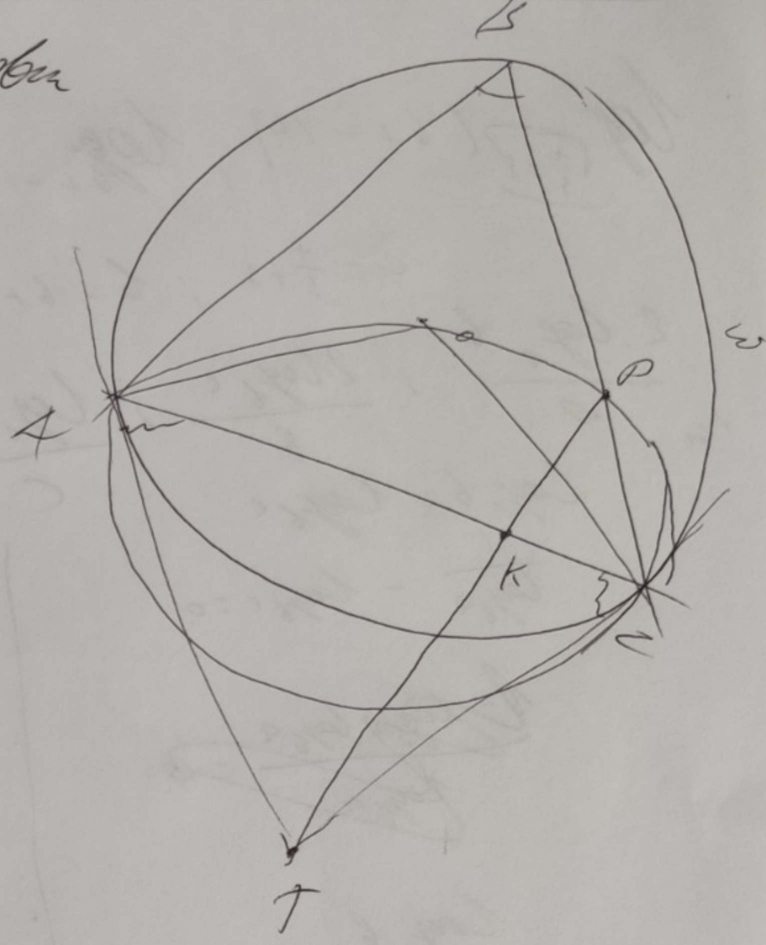
$S_{CPK} = 5$

$S_{ABC} = ?$

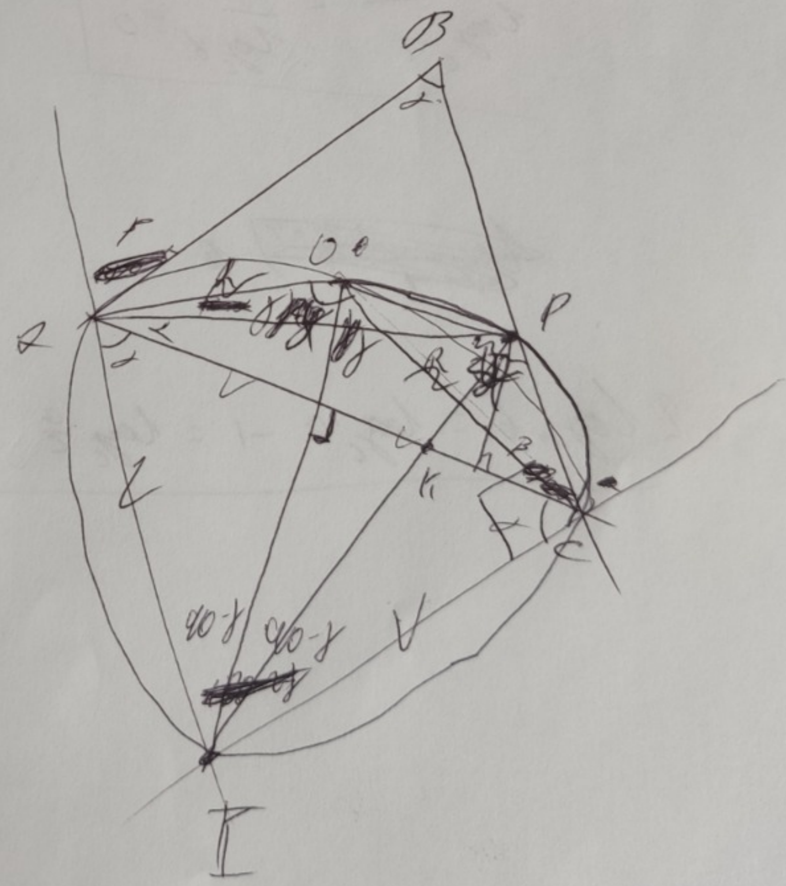
$\cos ABC = -\frac{1}{2}$

$AC = 7$

Черновик



$\frac{6}{\sin 4}$



$ABC = 4$

$\frac{\ln b}{\ln a} \quad \frac{\ln c}{\ln b} \quad \frac{\ln a}{\ln c}$

$AB = \frac{\ln c}{\ln a} = \frac{4}{c}$

A.

$AC = \frac{2 \ln b}{\ln a} \cdot \frac{\ln a}{\ln c} = 2 \log_c b = \frac{4}{\log}$

Чистовик

Т.е есть C_{14}^2 кол-во выбрать степени „3" и C_{17}^2 кол-во выбрать степени „5"

~~[illegible]~~ Т.к это один элемент в (при фиксированном α, β, γ
~~[illegible]~~ там подходят все посчитанные $\sqrt{\bar{\alpha}}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$)

всего способов $C_{14}^2 \cdot C_{17}^2 = \frac{14\cdot 13}{2} \cdot \frac{17\cdot \cancel{16}^{4}}{\cancel{2}} = 17\cdot 14\cdot 13\cdot 4$

Но т.к в ответе просят указать кол-во упорядоченных троек то кол-во способов которые нашли надо умножить на $3! = 6$.

$17\cdot 14\cdot 13\cdot 4\cdot 6 = 17\cdot 14\cdot 13\cdot 24 = 221\cdot 336 = 74256$.

5