Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101870**

ID профиля: **162036**

Вариант 18

$\boxed{\text{чистовик}}$ лист №1

№1.

$$S = \frac{a_1+a_7}{2}\cdot 7$$

$$a_7 = a_1+6d \Rightarrow S = \frac{2a_1+6d}{2}\cdot 7 = 7a_1+21d$$

$$\begin{cases} a_7\cdot a_{12} > S+20 \\ a_9\cdot a_{10} < S+44 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a_1+6d)(a_1+11d) > 7a_1+21d+20 \\ (a_1+8d)(a_1+9d) < 7a_1+21d+44 \end{cases} /\times(-1)$$

$$+\begin{cases} a_1^2+17a_1d+72d^2 < 7a_1+21d+44 \\ -a_1^2-17a_1d-66d^2 < -7a_1-21d-20 \end{cases}$$

$$6d^2<24$$

$$d^2-4<0$$

$$d\in(-2;2).$$

$d = 1$ или 2.

1) $d=1$:

$$a_1^2+17a_1+72 < 7a_1+21+44$$

$$a_1^2+10a_1+7<0$$

$$D = 100-28=72$$

$$a_1 = \cancel{-10\pm}\ \frac{-10\pm\sqrt{72}}{2} = -5\pm3\sqrt{2}$$

$a_1 \in (-5-3\sqrt{2}; -5+3\sqrt{2})$ в ~~целых~~ ~~натуральных~~ целых числах.

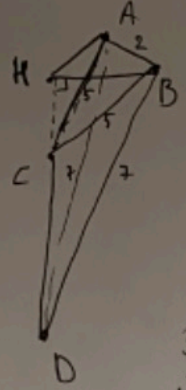
2) $d=2$: $a_1^2+34a_1+288 < 7a_1+42+44$

$$a_1^2+27a_1+202<0$$

$D = 729-4\cdot202<0 \Rightarrow$ решений нет, т.к. ветви вверх.

Ответ: $a_1 = -9; -8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1$.

№2. (Чистовик) лист №2.



1) $\triangle ABC$ и $\triangle ABD$ – равноб.; $CD \parallel$ ~~боковой стороне~~ оси $\Rightarrow AB \perp$ оси из ~~осн~~ симметрии.

То есть можно опустить перпендикуляр ~~из~~ CH на плоскость, в которой будет $\triangle ABH$, вписанный в окружность (т.к. $CD \in$ ~~из~~ образующей цилиндра, т.к. C и $D \in$ цилиндру).

2) Тогда минимальный радиус цилиндра будет при $d = AB = 2 \Rightarrow R = 1$.

3) То есть $\angle AHB = 90° \Rightarrow HB = AH = \sqrt{2}$ (из симметрии).

4) В $\triangle HBC$: $HC = \sqrt{CB^2 - HB^2} = \sqrt{25-2} = \sqrt{23}$

5) В $\triangle HBD$: $HD = \sqrt{BD^2 - HB^2} = \sqrt{49-2} = \sqrt{47}$

6) $CD =$ ~~5~~ $HD - HC = \sqrt{47} - \sqrt{23}$

7) $6{,}9 > \sqrt{47} > 6{,}8$; $4{,}7 > \sqrt{23} > 4$ $\Rightarrow$ ~~HD+HC (HB-HC)~~ $12 > CD > 2$

8) $2 < CD < 12 \Rightarrow$ нер-во треугольников в $\triangle CBD$ верно $\Rightarrow CD = \sqrt{47} - \sqrt{23}$.

Ответ: $\sqrt{47} - \sqrt{23}$.

№3.

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \le 5; & 1) \\ a^2+b^2 \le \min(4a-2b, 5) & 2) \end{cases}$$

1) $(x-a)^2 + (y-b)^2 \le 5$ – ~~гр~~ функция круга с радиусом $\sqrt{5}$ и с центром $O(a;b)$.

2) $a^2+b^2 \le \min(4a-2b, 5)$ – область значений a и b ~~в~~.

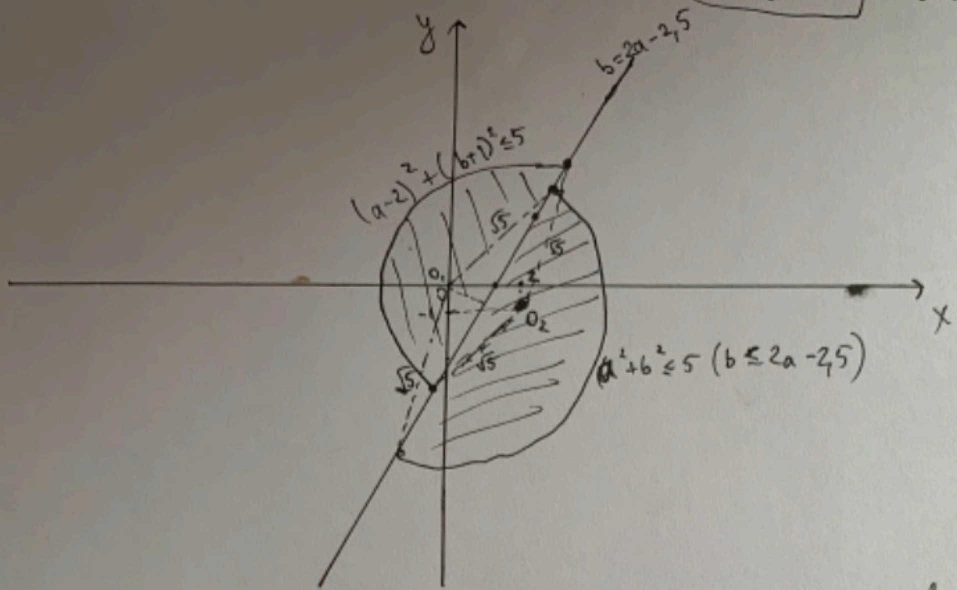
1) Если $4a-2b \ge 5$, то $a^2+b^2 \le 5$ – круг с радиусом $\sqrt{5}$. и $O_1(0;0)$.

$4a-2b \ge 5 \Rightarrow$ ~~...~~ $b \le 2a - 2{,}5$, то есть прямая отсечёт часть круга.

2) Если $4a-2b < 5$, то $a^2+b^2 \le 4a-2b \Rightarrow (a-2)^2 + (b+1)^2 \le 5$ – круг с $O_2(2;-1)$, отсечённый прямой $b > 2a - 2{,}5$

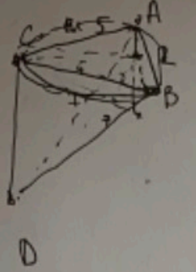
3) Т.к. в первом ~~нер~~ нер-ве $(x-a)^2 + (y-b)^2 \le 5$ a и b – координаты центра от 0, то можно построить графики зависимости $y(x)$ и $b(a)$ на одной координатной плоскости Oxy. График на листе №3.

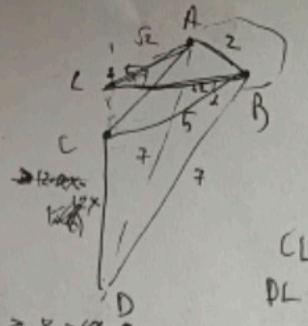
21101870 (U162036 M1303864)



В заштрихованных местах могут располагаться центры кругов с радиусами $\sqrt{5}$. Осталось посчитать их площадь.

№2.





$12 > x > 2$

$\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{5}$

$\sin(90-\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{5}$

$CL = \sqrt{25-2} = \sqrt{23}$

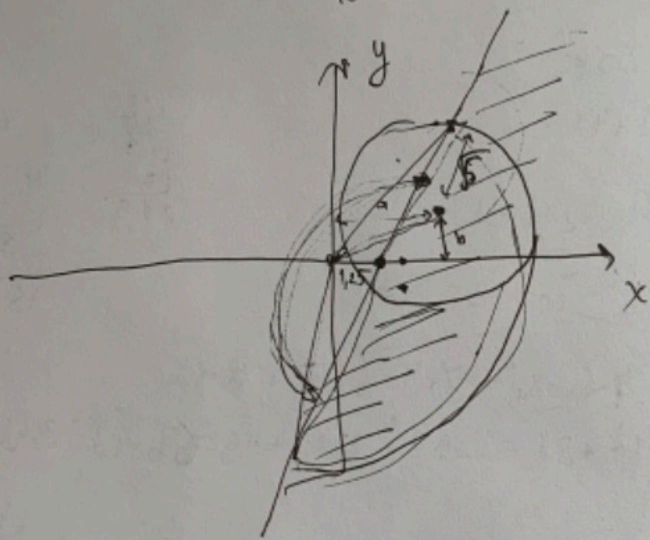
$DL = \sqrt{49-2} = \sqrt{47}$

$CD = DL - CL = \sqrt{47} - \sqrt{23}$

$6,8 \times 6,8 = 46,24$

$4,7 \times 4,7 = 22,09$

№3.



$4a - 2b \geq 5$

$4a \geq 2b + 5$

$a \geq \frac{b}{2} + 1,25$

$a^2 + b^2 \leq 4a - 2b$

$a^2 - 4a + b^2 + 2b \leq 0$

$(a-2)^2 + (b+1)^2 \leq 5$

Черновик

№2.

$S = \frac{a_1 + a_7}{2} \cdot 7 = \frac{2a_1 + 6d}{2} \cdot 7 = 7a_1 + 21d$

$a_7 \cdot a_{12} > S + 20$

$a_7 = a_1 + 6d$

$a_{12} = a_1 + 11d$

$(a_1 + 6d)(a_1 + 11d) > 7a_1 + 21d + 20$

$a_9 \cdot a_{10} < S + 44$

$(a_1 + 8d)(a_1 + 9d) < 7a_1 + 21d + 44$

1) $\begin{cases} (a_1 + 6d)(a_1 + 11d) > 7a_1 + 21d + 20 \\ (a_1 + 8d)(a_1 + 9d) < 7a_1 + 21d + 44 \end{cases}$ 2)

1) ~~$a_1^2 + 6da_1 + 11da_1 + 66d^2 - 7a_1 - 21d - 20 > 0$~~

~~$66d^2 + 17da_1 - 21d + a_1^2 - 7a_1 - 20 > 0$~~

~~$D = (17a_1 - 21)^2 - 4 \cdot 66 \cdot a_1^2 + 7 \cdot 4 \cdot 66 a_1 + 66 \cdot 80$~~

$D = (17d - 7)^2 - 66 \cdot 4d^2 + 84d + 80 = 289d^2 - 238d + 49 - 66 \cdot 4d^2 \; 264d^2 + 84d + 80 =$

$= 25d^2 - 154d + 129 =$

~~$a_1 = \frac{7 - 17d \pm \sqrt{25d^2 - 154d + 129}}{2}$~~

~~$a_1 + 8d$~~

$\begin{cases} a_1^2 + 17a_1d + 72d^2 < 7a_1 + 21d + 44 \\ a_1^2 + 17a_1d + 66d^2 > 7a_1 + 21d + 20 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1^2 + 17a_1d + 72d^2 < 7a_1 + 21d + 44 \\ -a_1^2 - 17a_1d - 66d^2 < -7a_1 - 21d - 20 \end{cases}$

$24 > 6d^2$

$d^2 < 4$

$(d-2)(d+2) < 0$

$+ \quad -2 \quad - \quad 2 \quad + \quad d$

$d \in (-2; 2).$

$27 \cdot 27 = 729$

$-5 - \ldots$

$-\sqrt{25} - \sqrt{18}$

~~$(a_1 + 8,5d)^2$~~

$3 \cdot \sqrt{2} =$

$14 \cdot 14 = 196$

$3 \cdot 14 = 42$

$17 \cdot 17 = 289$

$17 \cdot 9 = 153$

$7a_1 - 42 + 44 =$

$41 \cdot 41 =$

$276 \cdot 4 = 1104$

~~$f(x) = a \; 72d^2 + 17a_1d + a_1^2$~~

~~$f'(x) = 144d + 17a_1 = 0$~~

~~$d = -\frac{17a_1}{144}$~~

$d = -\frac{17a_1}{144}$

Если $a_1 = 6$, то ~~функ~~

$a_1^2 - 34a_1 + 72 \cdot 4 < 7a_1 + 2$

$a_1^2 - 41a_1 + 286 < 0$

$D = 1681 - 1144 = 537$

$x_1 = \frac{41 \pm \sqrt{577}}{2}$

21101870 (U162036 M1303864)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

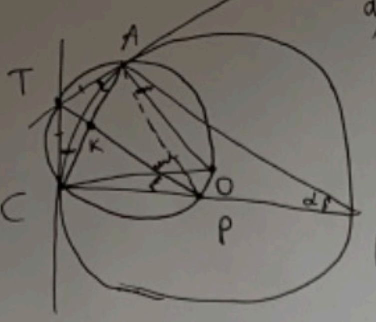
Шифр: **21101870**

ID профиля: **162036**

Вариант 18

(Чистовик) лист 2

№6.



а) 1) точка T лежит на окружности, описанной около $\triangle AOC$, т.к. $\angle TAO = \angle TCO = 90^\circ$ $\Rightarrow$ TO – диаметр.

2) $\angle ABC = \alpha$, тогда $\angle AOC = 2\alpha$ (центр.)

3) $\angle APC = \angle AOC = 2\alpha$ (впис.)

4) TA и TC – касательные $\Rightarrow$ $TA = TC$ $\Rightarrow$ $\triangle TAC$ – равноб.

5) из п. 4 $\angle TAC = \angle TCA$.

6) $\left.\begin{matrix}\angle APT = \angle TCA; \\ \angle TAC = \angle TPC\end{matrix}\right|$ (вписанные) $\Rightarrow \angle APT = \angle TCA = \angle TAC = \angle TPC$

7) $\angle APT = \angle TPC = \angle APC \cdot \frac{1}{2} = 2\alpha \cdot \frac{1}{2} = \alpha.$ $\Rightarrow \angle TPC = \angle ABC = \alpha$.

8) $\left.\begin{matrix}\angle KPC = \angle ABC; \\ \angle ACB \text{ – общ.}\end{matrix}\right| \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle KPC \Rightarrow S_{ABC} = S_{KPC} \cdot k^2.$

9) $\triangle APK$ и $\triangle CPK$ имеют общую высоту при разных основаниях CK и KA, тогда $\frac{CK}{KA} = \frac{S_{CPK}}{S_{APK}} = \frac{5}{6}$ (т.к. $S = \frac{1}{2} h \cdot a$, где a – основание, h – высота).

10) $k = \frac{AC}{CK} = \frac{11}{5}$ $\Rightarrow S_{ABC} = S_{KPC} \cdot k^2 = 5 \cdot \frac{11^2}{5^2} = \frac{121}{5} = 24{,}2$

б) 1) $tg\,\alpha = \frac{1}{2}$.

2) В треугольнике APB высота h из точки P. $h = PB \sin\alpha$

3) $KP \parallel AB$ из подобий $\triangle CKP$ и $\triangle CAB$ $\Rightarrow \angle APK = \angle PAB = \alpha \Rightarrow \triangle PAB$ – равноб. $\Rightarrow$ высота h делит отрезок AB на два равных l.

4) $l = PB \cos\alpha$

5) Из подобий $\triangle CKP$ и $\triangle CAB$: $\frac{PB}{PC} = \frac{6}{5}$, пусть $PB = 6y$, $PC = 5y$, $PA = 6y$.

6) $S_{APB} = \frac{1}{2} \cdot h \cdot 2l = hl = PB^2 \sin\alpha \cdot \cos\alpha = 36\,y^2 \sin\alpha \cdot \cos\alpha = S_{ABC} - S_{CKP} - S_{AKP} = 13{,}2$

$y = \sqrt{\frac{13{,}2}{36 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}} = \sqrt{\frac{13{,}2}{18 \sin 2\alpha}}$

7) В $\triangle APC$: $AP = 6y$; $CP = 5y$.

По т. косинусов:

$AC^2 = AP^2 + CP^2 - 2AP \cdot CP \cdot \cos 2\alpha = 36y^2 + 25y^2 - 30y^2 \cos 2\alpha = \frac{36 \cdot 13{,}2}{18 \sin 2\alpha} + \frac{25 \cdot 13{,}2}{18 \sin 2\alpha} -$

$- \frac{30 \cdot 13{,}2}{18 \sin 2\alpha} \cdot \cos 2\alpha = \frac{26{,}4}{\sin 2\alpha} + \frac{110}{6 \sin 2\alpha} - \frac{10 \cdot 13{,}2}{6\, tg\, 2\alpha}$

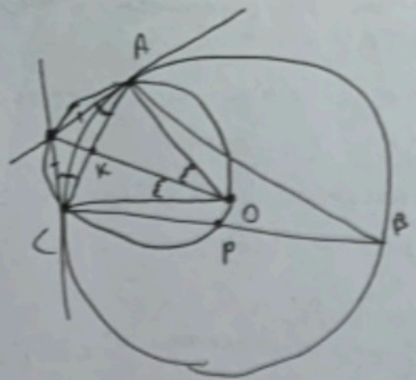
8) $tg\, 2\alpha = \frac{2 tg\alpha}{1 - tg^2\alpha} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$; $\cos^2 2\alpha = \sqrt{\frac{1}{1 + tg^2 2\alpha}} = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{16}{9}}} =$

$= \frac{9}{25} \Rightarrow \sin^2 2\alpha = \frac{16}{25} \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{4}{5}$

9) $AC =$

21101870 (U162036 M1303865)

№6.



№4.

Черновик

$$\begin{cases} \text{НОД}(a;b;c) = 15 = 3\cdot 5 & 1) \\ \text{НОК}(a;b;c) = 3^{15}\cdot 5^{18} & 2) \end{cases}$$

1) $a = 3\cdot 5\cdot l$

$b = 3\cdot 5\cdot m$

$c = 3\cdot 5\cdot n$

l, m и n – ~~взаимопростые~~. не имеют общего множителя.

2) $3^{15}\cdot 5^{18} \vdots l\cdot 3\cdot 5$

$3^{15}\cdot 5^{18} \vdots m\cdot 3\cdot 5$

$3^{15}\cdot 5^{18} \vdots n\cdot 3\cdot 5$

$\Rightarrow$

$3^{14}\cdot 5^{17} \vdots l$

$3^{14}\cdot 5^{17} \vdots m$

$3^{14}\cdot 5^{17} \vdots n$

$3\cdot 105 \cdot 87$: $1735 + 840 = 9135$

$36\cdot 3 = 108$

$333 - 5\cdot 5\cdot 5$

$3\cdot 3\cdot 3$

m^{14} l^{0}

m^{14} n^{0}

Т.к. 3 и 5 простые, то l, m и n – произведения троек и пятерок, но из первого пункта они ~~взаимопростые~~ не имеют общего множ., тогда ~~каждое число l, m и n могут быть 5^x, 3^y и 1. При этом $x = 17$, т.к. если $x < 18$, то можно сократить $3^{15}5^{18}$ на число t на 5^{17-x} и оно все еще будет делиться~~, а если ~~$x > 18$, то t просто не делится на 5^x. Аналогично $y = 14$.~~

не только m, l и n тосоль это был не нок.

~~Тогда l можно выбрать 3 способами $(5^{17}; 3^{14}; 1)$, m – двумя, n – одним.~~

~~Всего: $3\cdot 2\cdot 1 = 6$ способов.~~

Тройки и ~~пятерки~~ могут быть только в двух числах из трёх и пятерки аналогично, ~~т.к. иначе НОД был бы больше.~~

$3^7 \vdots 5^7$

$3^7\cdot 5^7$

~~Рассмотрим случай, когда $l =$~~

Найдем количество способов ~~разд~~ распределить степени тройки между числами l и m при условии, что ни одна из них не равна 14: Таких способов 13 ~~(13 в m, 1 в l)~~ (13,1; 12,2; 11,3...)

Аналогично для пар l и n и m и n $\Rightarrow$ умножаем 13 на 3 $= 13\cdot 3 = 39$ и добавляем три способа, когда ~~одна из степеней~~ в одном из чисел степень 14. $= 42$.

Теперь аналогичная операция ~~с пят~~ со степенями пятерками даёт $16\cdot 3 + 3 =$ ~~способ~~ $= 51$ способ.

Нужно перемножить количество способов поставить тройки и пятерки, т.к. для каждого из одной группы подходит каждый из другой: $51\cdot 42 =$

21101870 (U162036 M1303865)

№5. (черновик)

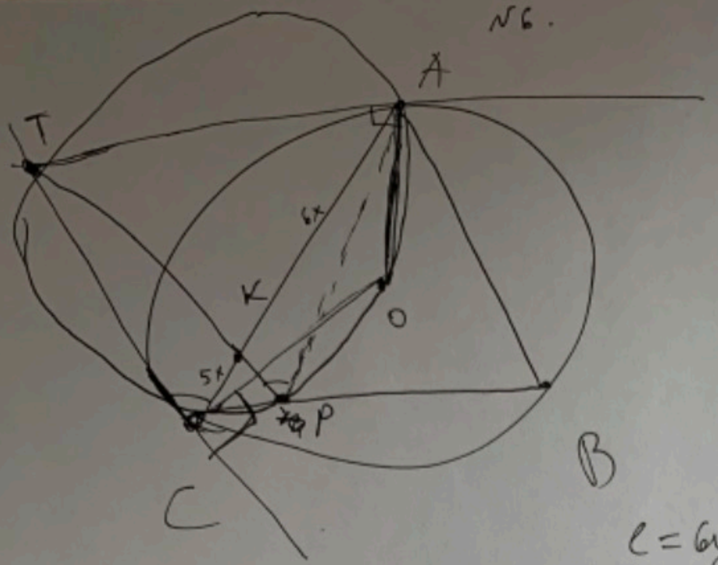
$$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14) = 2\log_{(\frac{x}{3}+3)}(6x-14)$$

$\log$:

21101870 (U162036 M1303865)

N6.

(Черновик)



$S_{APK} = 6$

$S_{CPK} = 5$

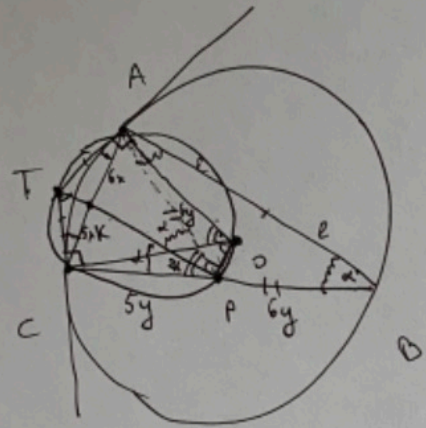
$$\begin{array}{r} 2 \\ 24 \\ \times\ 5 \\ \hline 12\ 6 \end{array}$$

$S = \frac{1}{2} l \cdot h = 36y^2 \sin\alpha\cos\alpha =$

$= 18y^2 \sin 2\alpha$

$l = 6y\cos\alpha$

$h = 6y\sin\alpha$



$S_{APK} = \frac{1}{2}\cos\alpha \cdot PK \cdot AP$

$S_{CPK} = \frac{1}{2}\cos\alpha \cdot PK \cdot PC$

$\frac{AP}{PC} = \frac{6}{5}$

$13{,}2 \cdot 5$

66

$tg\alpha \cdot 5y$

~~$\sin\alpha \cdot 5y \cdot \cos\alpha\, 5y$~~

$AP \cdot tg\alpha \cdot PT \cdot \frac{1}{2} = 6$

$CP \cdot tg\alpha \cdot PT \cdot \frac{1}{2} = 5$

$36x^2 = TP^2 + 36y^2 - 2TP \cdot 6y \cdot \cos\alpha$

$25x^2 = TP^2 + 25y^2 - 2TP \cdot 5y \cdot \cos\alpha$

$36 + 25 = 61$

$\frac{AC}{\sin\alpha} = 2R \Rightarrow R = \frac{AC}{2\sin\alpha}$

$$\begin{array}{r} 26{,}4 \\ \times\ 6 \\ \hline \end{array}$$

~~$\frac{AC}{\sin\alpha}\ AC^2 = 2R^2 - 2R^2\cos 2\alpha$~~

~~$AC^2 = \frac{2AC^2}{4\sin^2\alpha} - \frac{2AC^2}{4\sin^2\alpha} \cdot (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = \frac{2AC^2}{4\sin^2\alpha}(1 - \cos^2\alpha + \sin^2\alpha) =$~~

$$\begin{array}{r} 3\ 2 \\ 26{,}4 \\ 5 \\ \hline 13\ 2\ 0 \end{array}$$

№4. (Чистовик) лист 1

1) $\begin{cases} \text{НОК}(a;b;c) = 15 = 3\cdot5 \\ \text{НОК}(a;b;c) = 3^{15}\cdot5^{18} = t \end{cases}$ 2)

1) $a = 3\cdot5\cdot l$
$b = 3\cdot5\cdot m$, где l, m и n не имеют общего ~~на~~ делителя.
$c = 3\cdot5\cdot n$

2) $3^{15}\cdot5^{18} \vdots l\cdot3\cdot5$
$3^{15}\cdot5^{18} \vdots m\cdot3\cdot5$
$3^{15}\cdot5^{18} \vdots n\cdot3\cdot5$
$\Rightarrow$ $3^{14}\cdot5^{17} \vdots l$; $3^{14}\cdot5^{17} \vdots m$; $3^{14}\cdot5^{17} \vdots n$.

3) Т.к. 3 и 5 - простые, то l, m и n - произведения троек и пятёрок (т.к. НОК - произведение троек и пятёрок), но из первого пункта они не имеют общего множителя, ~~тогда~~ тогда тройки могут быть только в двух числах из трёх, и пятёрки - аналогично*. При этом ~~т.к. сумма степеней троек в этих двух числах ра~~ в одном из этих двух чисел степень тройки должна быть 14 (т.к. иначе ~~НОК~~ число t можно сократить на 3 и оно ещё будет делиться, если степень будет меньше 14, а если больше, то t не будет делиться), аналогично степень одной из пятёрок = 17.

* - два числа троек и два числа пятёрок не обязательно совпадают.

4) Найдём кол-во способов расставить степени тройки в числа m и l. Если степень в $m = 14$, то степень в l выбирается 15 способами (от 0 до 14); если степень в $l = 14$, то степень в m тоже 15 способами. Складываем $15+15=30$.
Аналогично делаем для пар ~~чисел~~ чисел m и n; l и n. Получаем $30\cdot3=90$ и вычитаем 3, т.к. ~~три~~ по два раза посчитали способы когда ~~одна~~ две из степеней 0.
Получаем $90-3=87$ способов для степеней троек.

5) Аналогично находим для ~~5~~ пятёрок. Количество способов $= (18+18)\cdot3-3 = 105$

6) Для каждого способа 4п. подходит каждый способ 5п. $\Rightarrow$ перемножаем
$87\cdot105 = 9135$ способов выбрать тройку $(a;b;c)$.
Ответ: 9135.