Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101772**

ID профиля: **344862**

Вариант 18

Чистовик. Лист №1

№1

Пусть разность прогрессии равна d.

Тогда $a_n = a_1 + (n-1)d$, т.к. $a_n - a_{n-1} = d$ a_{n-1} и a_n — целые, то d — тоже целое, а, следовательно, d — целое число

Т.к. прогрессия возрастающая, то $d>0$

$\left.\begin{array}{l} d\in\mathbb{Z} \\ d>0 \end{array}\right\} \Rightarrow d \geq 1.$

$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{a_1 + a_1 + 6d}{2}\cdot 7 = 7(a_1+3d)$

$a_7 = a_1 + 6d$; $a_{12} = a_1 + 11d$; $a_9 = a_1 + 8d$; $a_{10} = a_1 + 9d$

$\begin{cases} a_7 a_{12} > S+20 \\ a_9 a_{10} < S+44 \end{cases}$ $\begin{cases} (a_1+6d)(a_1+11d) > 7a_1+21d+20 \\ (a_1+8d)(a_1+9d) < 7a_1+21d+44 \end{cases}$

$\begin{cases} 7a_1+21d+20 < a_1^2+17da_1+66d^2 \\ a_1^2+17da_1+72d^2 < 7a_1+21d+44 \end{cases}$ — сложим неравенства (т.к. знак в одну сторону, то можем складывать)

$a_1^2+17da_1+7a_1+21d+72d^2+20 < a_1^2+17da_1+7a_1+21d+66d^2+44$

$6d^2-24<0$;

$d^2-4<0$; $(d-2)(d+2)<0 \Rightarrow d\in(-2;2)$. Пересечём это с условием, что $d\geq 1$; $\Rightarrow d\in[1;2)$ — в этом промежутке есть

Чистовик. Лист 1/2

только одно целое $d=1$

Подставим $d=1$ в систему неравенств:

Тогда $7a_1+21d+20<a_1^2+17da_1+66d^2$

$7a_1+21+20<a_1^2+17a_1+66$

$a_1^2+10a_1+25>0$; $(a_1+5)^2>0 \Rightarrow a_1 \neq -5$

$a_1^2+17a_1+72<7a_1+21+44$

$a_1^2+10a_1+7<0$

$a_1^2+10a_1+7=0$

$D_1=25-7=18$

$a_1=-5\pm 3\sqrt{2} \Rightarrow a_1 \in (-5-3\sqrt{2}; -5+3\sqrt{2})$

$4<3\sqrt{2}<5$ (т.к. $16<18<25$)

Тогда с условием на то, что $a_1 \in \mathbb{Z}$,

$a_1 \in (-10; 0)$

Получаем, $a_1 \in [-9; -1]$; $a_1 \neq -5$

и $a_1 \in \mathbb{Z}$

Т.е. $a_1 = \{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1\}$

Т.к. мы совершали равносильные переходы, то все полученные a_1 подходят.

Ответ: $-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1$

21101772 (U344862 M1299459)

№3 Чистовик

Лист №3

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 5 \\ a^2+b^2 \le \min(4a-2b, 5) \end{cases}$$

Найдем множество $(a;b)$ удовлетворяющее второму неравенству

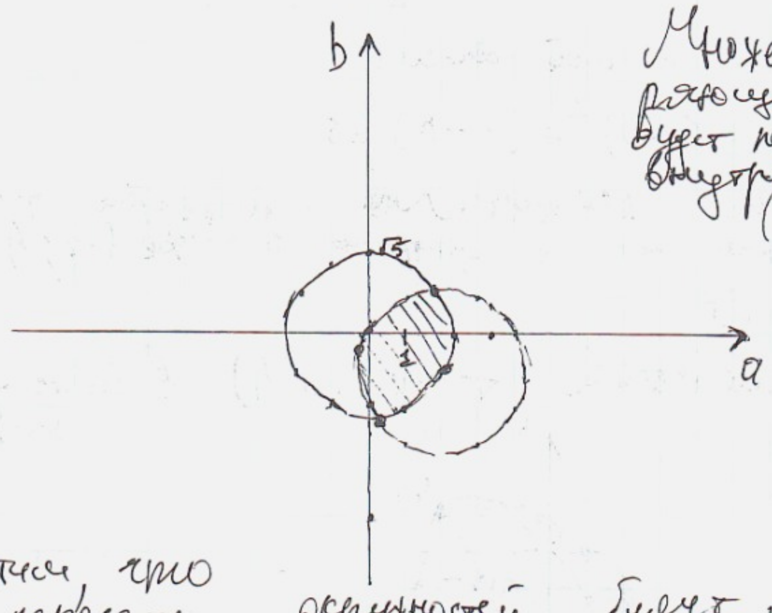
$$a^2+b^2 \le \min(4a-2b, 5)$$

Оно равносильно $\left[\begin{array}{l} a^2+b^2 \le 5 \\ a^2+b^2 \le 4a-2b \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} a^2+b^2 \le 5 \\ (a-2)^2+(b+1)^2 \le 5 \end{array}\right.$

Построим множество этих точек в системе координат aOb.

$a^2+b^2 \le 5$ – множество точек внутри и на границе окружности с центром в точке $(0;0)$, радиуса $\sqrt5$

$(a-2)^2+(b+1)^2 \le 5$ – множество точек внутри и на границе окружности с центром в точке $(2;-1)$ и радиуса $\sqrt5$.



Множество точек, удовлетворяющих $a^2+b^2 \le \min(4a-2b;5)$ будет пересечением множеств внутри окружностей. (показано штриховкой)

Заметим, что точки пересечения окружностей будут лежать на прямой $4a-2b=5$,

т.е. $b=2a-\frac{5}{2}$. Действительно, если $4a-2b=5$, то для 1 и 2 окружностей получаются одинаковые уравнения, т.е. каждая и первая точка пересечения каждой окружности с прямой $b=2a-\frac{5}{2}$ совпадает, и вторая точка пересечения тоже будет совпадать. ~~1 и 2 окружностей~~

Чистовик
Лист №4

ур-ние на точки пересечения прямой с первой окр.

$$\begin{cases} a^2+b^2 = 5 \\ 4a-2b=5 \end{cases}$$

ур-ние на точки пересечения прямой со второй окружн.

$$\begin{cases} a^2+b^2 = 4a-2b \\ 4a-2b=5 \end{cases}$$

Как видно, они совпадают.
Т.е. точки пересечения окружностей лежат на прямой $4a-2b=5$

$$\begin{cases} a^2+b^2=4a-2b \\ b=2a-\frac{5}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} a^2+4a^2+\frac{25}{4}-10a=5 \\ b=2a-\frac{5}{2} \end{cases}$$

$5a^2-10a+\frac{5}{4}=0 \quad \Big| \cdot \frac{4}{5}$; $\quad 4a^2-8a+1=0$

$D_1=16-4=12$

$a_1=\frac{4+2\sqrt{3}}{4}=1+\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\quad b_1=2+\sqrt{3}-\frac{5}{2}$

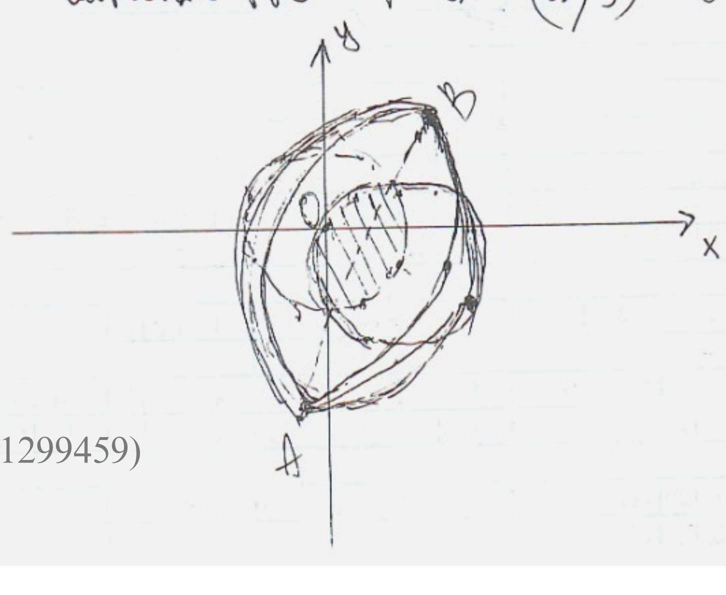
$a_2=\frac{4-2\sqrt{3}}{4}=1-\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad b_2=2-\sqrt{3}-\frac{5}{2}$

Вернёмся к изначальной системе:

$$(x-a)^2+(y-b)^2\le 5$$

Это все ~~окружности~~ множества точек внутри окружностей с центром в точке $(a;b)$ и радиуса $\sqrt{5}$.

Нарисуем ~~множество~~ точек $(a;b)$ в системе коорд. xOy



21101772 (U344862 M1299459)

чистовик

Лист №5

В каждой точке закрашенной поверхности строится окружность радиуса $\sqrt{5}$. Они будут накладываться, но конечное множество ~~таких~~ точек будет состоять из самых удалённых от закрашенной фигуры на расстояние $\sqrt{5}$ и внутри её.

Т.к. мы увеличим на расстояние $\sqrt{5}$ каждую точку множества, то можно считать что теперь окружности пересекаются по вдвое большему радиусу.

$$(2\cdot\sqrt{5})^2=20.$$

Причём точка пересечения окружностей лежит на прямой $4x-2y=5$ (По сути произошла гомотетия с неким коэффициентом параллельно исходной фигуре.)

$$\begin{cases} x^2+y^2=20 \\ 4x-2y=5 \end{cases}$$

$$y=2x-\frac{5}{2}$$

$$x^2+4x^2-10x+\frac{25}{4}=20$$

$$5x^2-10x-\frac{55}{4}=0 \quad \Big/ \cdot\frac{4}{5}$$

$$4x^2-8x-11=0$$

$$D_1=16+44=60$$

$$x_{1,2}=\frac{4\pm2\sqrt{15}}{4}=1\pm\frac{\sqrt{15}}{2}$$

$$y_1=2+\sqrt{15}-\frac{5}{2}; \quad x_1=1+\frac{\sqrt{15}}{2}$$

$$y_2=2-\sqrt{15}-\frac{5}{2}; \quad x_2=1-\frac{\sqrt{15}}{2}$$

$$AB^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=15+60=75$$

$$BO^2=\left(\sqrt{15}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(1+\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2=15-\sqrt{15}+\frac{1}{4}+1+\frac{15}{4}+\sqrt{15}=20$$

$$AO^2=\left(\sqrt{15}+\frac{1}{2}\right)^2+\left(1-\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2=15+\sqrt{15}+\frac{1}{4}+1+\frac{15}{4}-\sqrt{15}=20$$

По теореме косинусов:

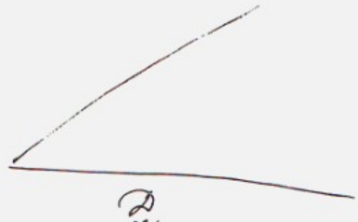
$$75=20+20-2\cdot20\cos\angle AOB$$

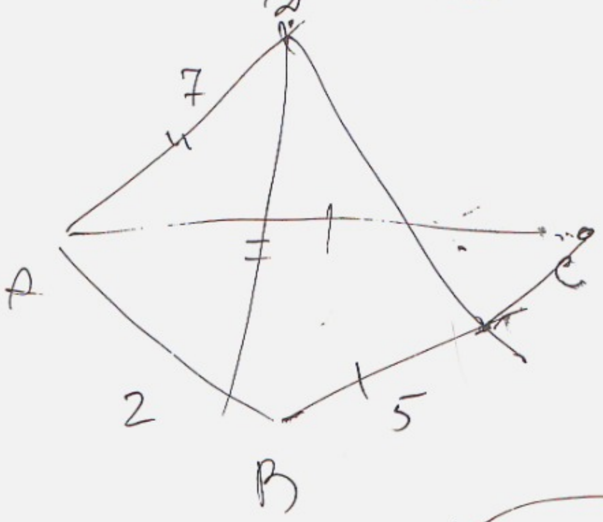
$$\cos\angle AOB=-\frac{35}{40}=-\frac{7}{8}$$

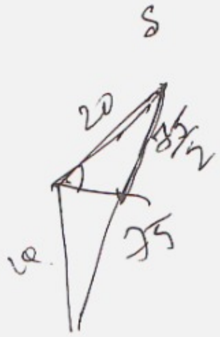
Тогда площадь одного сектора $S=\frac{r^2}{2}\arccos\frac{7}{8}=10\arccos\frac{-7}{8}$

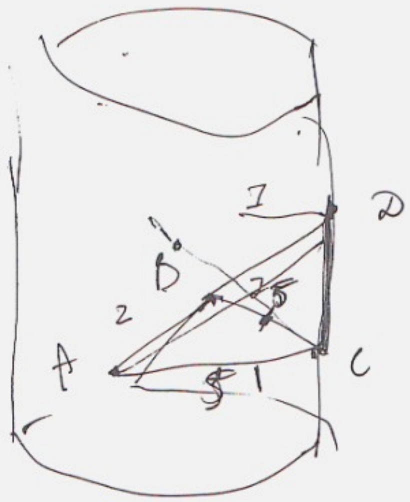
Все множество S состоит из двух дуг, т.е. $S_M=2S=20\arccos\frac{-7}{8}$

Ответ: $20\arccos\frac{-7}{8}$




D
7
A
C
2
5
B


S


D
B
A
C

№1

S $a_1, a_2, \dots a_7$

$a_7 \cdot a_{12} > S + 20$

$a_9 \cdot a_{10} < S + 44$

$d > 0$

$a_1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow d \in \mathbb{Z}$

$d \geq 1$

a_1 и d

$a_7 = a_1 + 6d$

$a_{12} = a_1 + 11d$

$a_9 = a_1 + 8d$

$a_{10} = a_1 + 9d$

$S_7 = \frac{a_1 + a_1 + 6d}{2} \cdot 7 = (a_1 + 3d)7$

$a_7 \cdot a_{12} > S_7 + 20$

$$\begin{cases} a_1^2 + a_1 \cdot 17d + 66d^2 > 7a_1 + 21d + 20 \\ a_1^2 + 17a_1 d + 72d^2 < 7a_1 + 21d + 44 \end{cases}$$

< 58

$a_1^2 + 17a_1 + 72 < 7a_1 + 21 + 44$

$a^2 + 10a +$

$a_{12} = 2$

$a_{11} = 1$

$a_8 = -2$

$a_9 = -1$ $a_7 = -3$

$a_{10} = -9 + 9 = 0$

$a_2 = -8$

$5 - 3\sqrt{2}$

$3\sqrt{2} + 5$

$3\sqrt{2} - 5$

$3\sqrt{2}$

$72 - 65 = 7$

$a_1 = -9$

$-6 \cdot 7 = -42$

$\frac{-9 - 9 + 6}{2} \cdot 7$

$\frac{0 + 6}{2}$

$a_1 = 0$

$a_2 = 1$

$a_3 = 7$

2)

56

$\frac{-1 + 5}{2} \cdot 7$

$\boxed{14}$

> -22

65

< 2

$a_9 = 7$

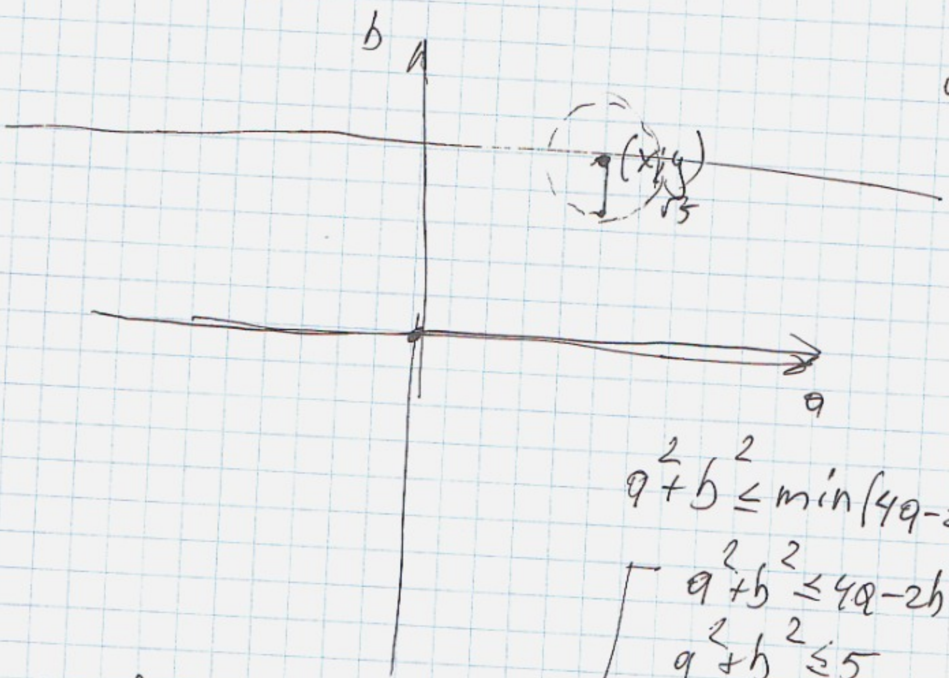
$a_8 = 8$

a_{10}

21101772 (U344862 M1299459)

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 5\\ a^2+b^2\le \min(4a-2b,5)\end{cases}$$

при каких x и y существуют a и b



a^2+b^2

$4a-2b=0$

$b=2a$

$a^2+b^2\le\min(4a-2b;5)$

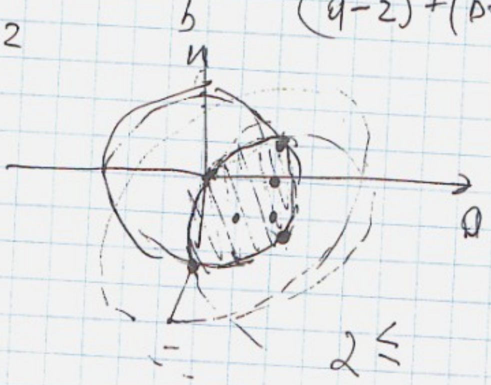
$$\left[\begin{array}{l}a^2+b^2\le 4a-2b\\ a^2+b^2\le 5\end{array}\right.$$

$(a-2)^2+(b+1)^2\le 5$

$a^2+b^2\le\min(4a-2b;5)$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a^2+b^2\le 5\\ 5\le 4a-2b\end{cases}\\ \begin{cases}a^2+b^2\le 4a-2b\\ 4a-2b\le 5\end{cases}\end{array}\right.$$

a^2

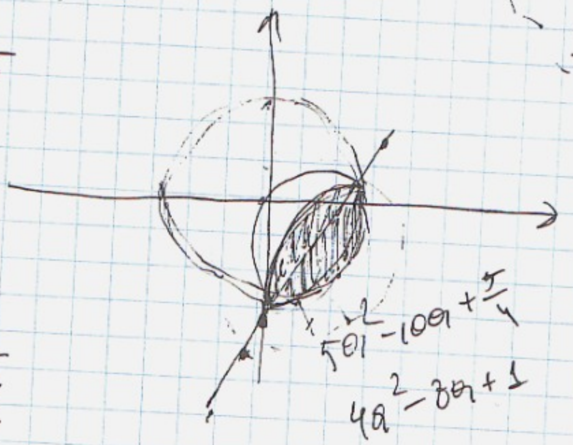


$2\le$

2 $-4+2$

-2

$b\le 2a-\frac{5}{2}$



$b = 2a-\frac{5}{2}$

$5a^2-10a+\frac{5}{4}$

$4a^2-8a+1$

$5a^2$

$20=2^2+4^2$

$5=4a-2b$

2 -6

$a^2+\left(2a-\frac{5}{2}\right)^2\le 5$

$a^2+4a^2-10a+\frac{25}{4}\le 5$

$(a-2)^2+\left(2a-\frac{3}{2}\right)^2\le 5$

$a^2-4a+4+4a^2-6a+\frac{9}{4}\le 5$

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101772**

ID профиля: **344862**

Вариант 18

№5 Лист №1 Чистовик

$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)$, $\log_{6x-14}(x-1)^2$; $\log_{x-1}(\frac{x}{3}+3)$

$6x-14>0 \Big| \Rightarrow x>\frac{7}{3}$

$6x-14\neq 1$; $x\neq\frac{5}{2}$

Заметим, что если $\begin{cases} x>\frac{7}{3} \\ x\neq\frac{5}{2}\end{cases}$, то все логарифмы определены

Действительно $\sqrt{\frac{x}{3}+3}>\sqrt{\frac{1}{3}+3}>1$

$x-1>0$; $x-1\neq 1$ $\Rightarrow \begin{cases} x>\frac{7}{3} \\ x\neq\frac{5}{2}\end{cases}$

$6x-14>0$

$x\neq\frac{5}{2}$

Пусть $\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)=a$; $\log_{6x-14}(x-1)^2=b$; $\log_{x-1}(\frac{x}{3}+3)=c$

$ab=\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(x-1)^2$; т.к. $x>\frac{7}{3}$, то это равносильно $ab=\frac{2}{\frac{1}{2}}\cdot\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}{x-1}$

т.е. $ab=4\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}{x-1}$

$ab=\frac{4}{c}$ Причём, по условию какие-то два равны

$abc=4$, $c\neq 0$ т.к. $\frac{x}{3}+3>1$ при $x>\frac{7}{3}$

Пусть исходные логарифмы равны $t; y; z$ (неважно в каком порядке) без ограничения общности: $t=y$. Тогда $\begin{cases} tyz=4 \\ t=y \\ z=t-1\end{cases}$ $t^2(t-1)=4$

$t^3-t^2-4=0$

21101772 (U344862 M1299460)

$t^3 - t^2 - 4 = 0$

Лист №2
Мелетович

Заметим, что $t = 2$

$$(t-2)(t^2+t+2)=0$$

$t^2+t+2=0$; $t=2$

$D = 1 - 8 < 0$

Значит ; $t = y = 2$, $z = 1$. Заметим, что верно и обратное, если $t = y = 2$, и $tyz = 4$, то $\underline{z=1}$

1) Предположим, $\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)=1$, т.е. $\frac{x}{3}+3 = x-1$

$x = 6$

$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)=2$, т.е. $6x-14 = \frac{x}{3}+3$

что уд. $\begin{cases} x > \frac{7}{3} \\ x \neq \frac{5}{2} \end{cases}$

$\begin{cases} x=3 \\ x=6 \end{cases} \Rightarrow \varnothing$ значит этот случай невозможен.

2) $\log_{6x-14}(x-1)^2=1$; $\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)=2$; $\underline{x=3}$

$\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)=2$; Подставим $x=3$

~~$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}\left(\frac{x}{3}+4\right)$~~

в $\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)=2$; в $\log_{6x-14}(x-1)^2=1$

$\log_2 4 = 2$ – верно

$\log_4 4 = 1$ – верно

$\Rightarrow \boxed{x=3}$ (уд. О.Д.З. $\begin{cases} x \neq \frac{5}{2} \\ x > \frac{7}{3} \end{cases}$)

3) $\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)=1$

$\log_{6x-14}(x-1)^2=2$, $(x-1)^2=(6x-14)^2$

$(7x-15)(5x-13)=0$

$x=\frac{15}{7}$; $x=\frac{13}{5}$; $x=\frac{15}{7}<\frac{7}{3}$ $\Rightarrow$ не уд. О.Д.З.

$x=\frac{13}{5}$

Лист 13
Чистовик

Подставим $x = \frac{13}{5}$ в $\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)=1$

$\log_{\sqrt{\frac{58}{15}}}\left(\frac{8}{5}\right)=1$ - неверно

т.к. $\sqrt{\frac{58}{15}} \neq \frac{8}{5}$

Значит подходит единственный x:

$x=3$

Ответ: $x=3$

Чистовик
Лист №4

№4

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=15 \\ НОК(a;b;c)=3^{15}\cdot 5^{18} \end{cases}$$

Пусть $a=3^{\alpha_1}5^{\beta_1}$
$b=3^{\alpha_2}5^{\beta_2}$
$c=3^{\alpha_3}5^{\beta_3}$ — других делителей числа a, b, c иметь не могут, иначе $НОК(a;b;c)=3^{15}\cdot5^{18}$ не будет делится на a, b, c.

Заметим, что одновременно $\alpha_i, \beta_i \geq 2$ ($i=1,2,3$) во всех трех парах быть не могут, иначе $НОД(a;b;c)$ хотя бы 15^2. При этом $\alpha_i, \beta_i \neq 0$, т.к. каждое число делится на 15. ($i=1,2,3$)

Тогда какое-то $\alpha_i=1$. Пусть без ограничения общности $\alpha_1=1$, т.е. $a=3\cdot5^{\beta_1}$

При этом из $НОК(a,b,c)=3^{15}\cdot5^{18}$ следует, что какое-то $\alpha_i=15$, Пусть $b=3^{15}\cdot5^{\beta_2}$

Так же понятно, что какое-то $\beta_i=1$ (Аналогично)
$\beta_j=18$

~~Пусть $\beta_1=1$; $\beta_2=18$~~
~~$a=15$~~
~~$b=3^{15}\cdot5^{18}$~~ ~~Вариантов c: $\max(\alpha_3)\cdot\max(\beta_3)$~~
~~$c=3^{\alpha_3}\cdot5^{\beta_3}$~~ ~~т.е. $15\cdot18$~~

~~Пусть $\beta_2=1$; $\beta_1=18$~~
~~$a=3\cdot5^{18}$~~ ~~$c=3^{\alpha_3}\cdot5^{\beta_3}$ — здесь тоже вариантов будет $15\cdot18$~~
~~$b=3^{15}\cdot5$~~

Чистовик лист №5

Пусть $AC = 11x$

O лежит на серединном перпендикуляре к AC.

Дано:

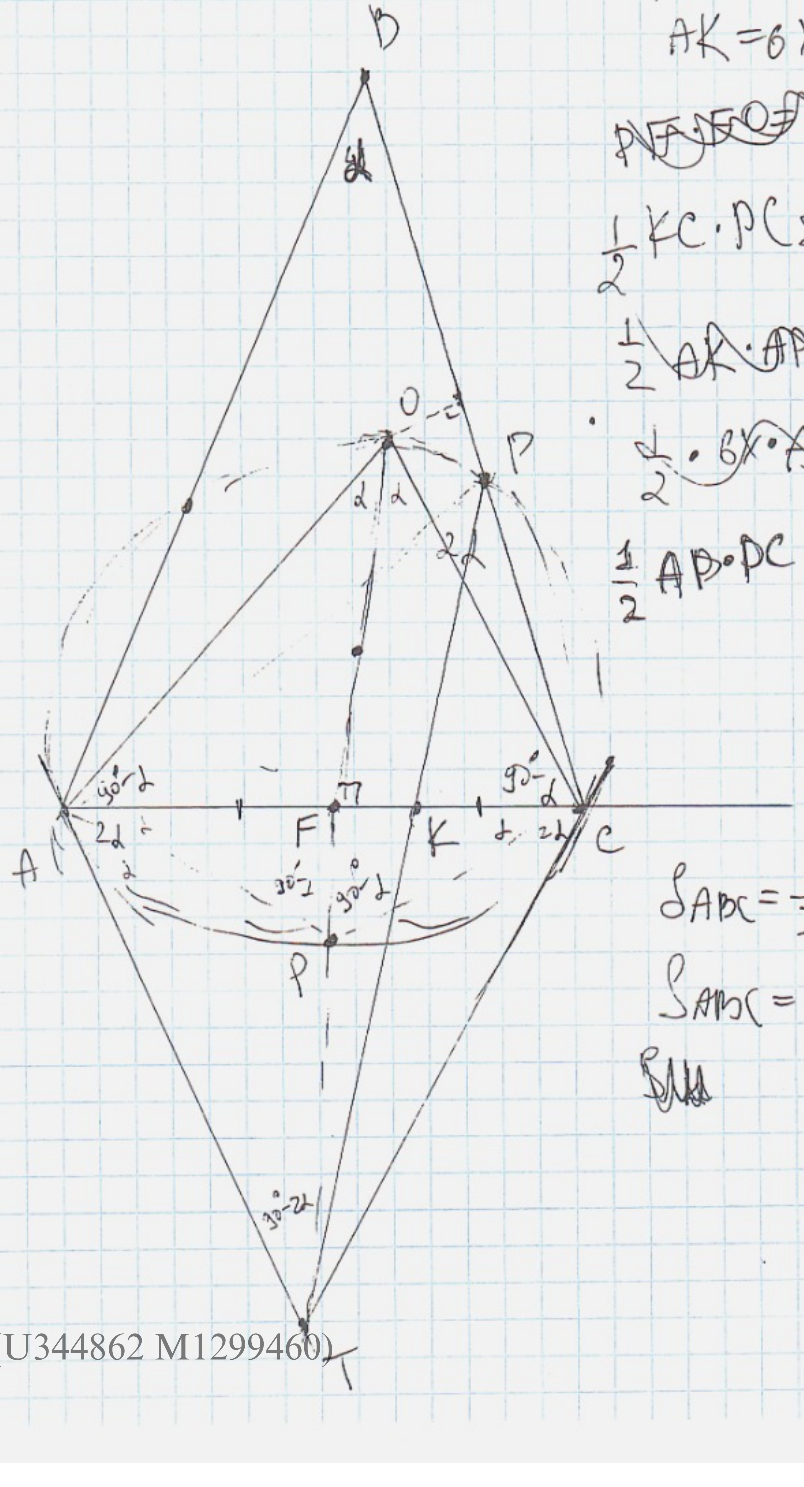
$S_{APK} = 6$

$S_{CPK} = 5$

$\frac{S_{APK}}{S_{PKC}} = \frac{6}{5} = \frac{AK}{KC}$, т.к. высоты у треугольников APK и CPK на ~~сторону~~ прямую AC равны.

$KC = 5x$

$AK = 6x$



~~PNA...~~

$\frac{1}{2} KC \cdot PC \sin\angle BCA = 5$

~~$\frac{1}{2} AK \cdot AP \sin\angle BAC = 6$~~

~~$\frac{1}{2} \cdot 6x \cdot AP \sin\angle BAC = 6$~~

$\frac{1}{2} AB \cdot PC \sin 2\alpha = 11$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot \sin\angle ACP \cdot BC$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} 11x \sin\angle ACP \cdot BC$

~~S~~

$$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)\ ,\ \log_{6x-14}(x-1)^2\ ;\ \log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)$$

$\underset{a}{\shortparallel}$ $\underset{b}{\shortparallel}$ $\underset{c}{\shortparallel}$

$$\left|\begin{array}{l} a=b \\ c=a-1 \end{array}\right.$$

$$a\cdot b = \log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(x-1)^2$$

$$\boxed{ab=\frac{4}{c}}$$

$$x>\frac{14}{6}=\frac{7}{3}$$

$$\left\{\begin{array}{l} x>\frac{7}{3} \\ x>-9 \end{array}\right.$$

$$c=\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)$$

$$\frac{4}{c}=\frac{4}{2}\log_{\frac{x}{3}+3}(x-1)$$

$$\frac{4}{c}=\frac{1}{2}\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(x-1)^2$$

2 | 1 −2 0 −4

1 0 0

1 −1 0 −4

2 1 1 2 0

$290=$

$\sqrt{\frac{58}{15}}=\frac{64}{25}$

$\left(\frac{8}{5}\right)^2$

$6\cdot\frac{13}{5}-14=\frac{78-70}{5}$

$\frac{13\cdot 6-70}{5}$

$x+9=3x-3$

$2x=12$

$x=6$

$18x-42=x+9$

$17x=51$

$x=3$

$\sqrt{\frac{58}{15}}$ $\frac{45+13}{}$

$\frac{13}{15}+3$

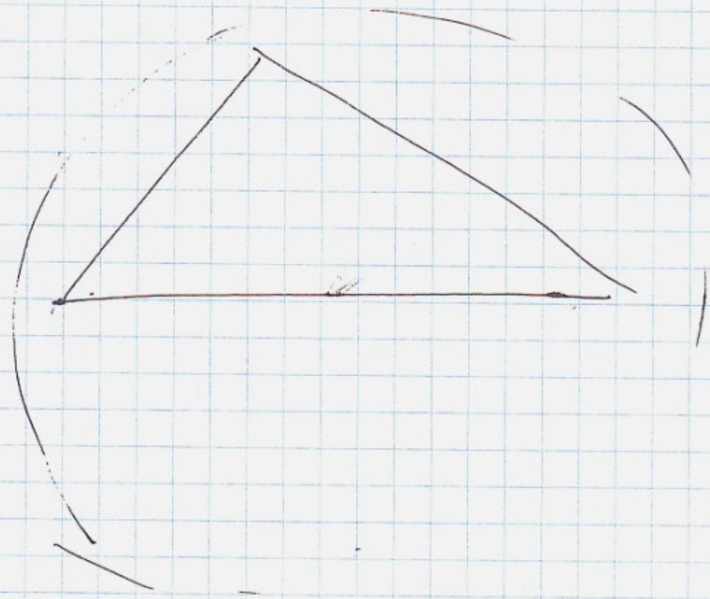
$\frac{78-70}{5}$

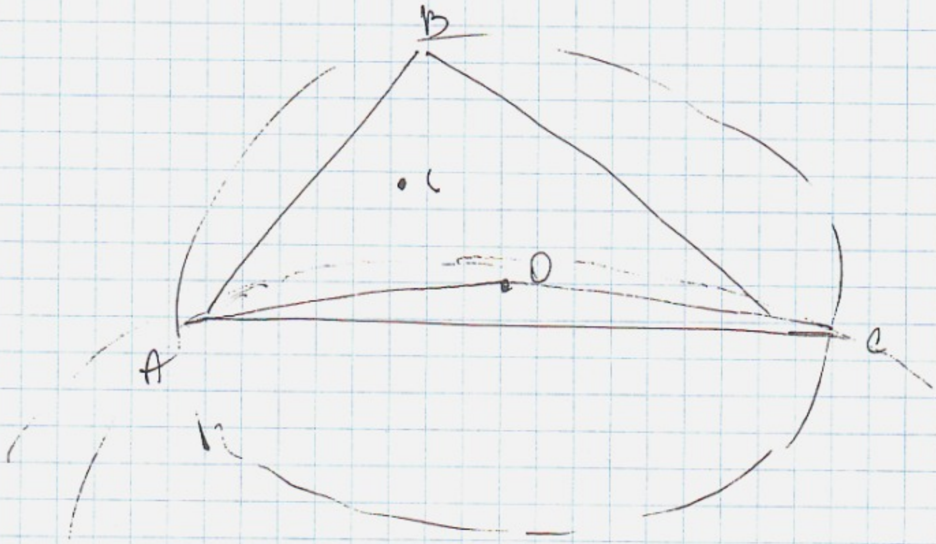
$6\cdot\frac{13}{5}-14$

$\frac{15}{7}<\frac{7}{3}$

$45<49$

21101772 (U344862 M1299460)





21101772 (U344862 M1299460)

Пусть $\beta_3 = 1$

$(a;b;c)$

$$\begin{cases} \text{НОД}(a;b;c) = 15 = 3\cdot 5 \\ \text{НОК}(a;b;c) = 3^{15}\cdot 5^{18} \end{cases}$$

НОК $\quad a = 3^{\alpha_1}\cdot 5^{\beta_1}$

НОД $\quad b = 3^{\alpha_2}\, 5^{\beta_2}$

$c = 3^{\alpha_3}\, 5^{\beta_3}$

$\alpha_i; \beta_i \geq 1$

НОД - наиб общий делитель

НОК - наим общее кратное

$5^2\cdot 3$

$3^{15}\cdot 5^{18}$

max(15)

max(18)

$3^2\cdot 5^3$

$a \leq b \leq c$

$a = 5\cdot 3^{\alpha}$

$b = 5^{\beta}\cdot 3$

$c = 5^{\alpha}\, 3^{\beta}$

$\cdot 6$

$a = 5\cdot 3^{\alpha}$

$b = 5^{\beta}\cdot 3$

$c = 5^{\gamma} 3^{\sigma}$

$\gamma, \sigma \in [1;$

$\gamma \in$

$c = 3^{15}\cdot 5^{\beta_3}$

$b = 3^{\alpha_2}.$

$a = 3^{1}\cdot 5^{\beta_1}$

$b = 3^{15}\cdot 5^{\beta_2}$

$c = 3^{\alpha_3}\, 5^{\beta_3}$

1 1 1

$a \neq b$

21101772 (U344862 M1299460)

$a = 3 \cdot 5^{\beta_1}$

$b = 5 \cdot 3^{\alpha_2}$

$c = 5^{\beta_3} \cdot 3^{\alpha_3}$

Причём какие-то 2 когда заданы однозначно

Тогда вариантов:

$5 \cdot 18 + 5 \cdot 18 +$