Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

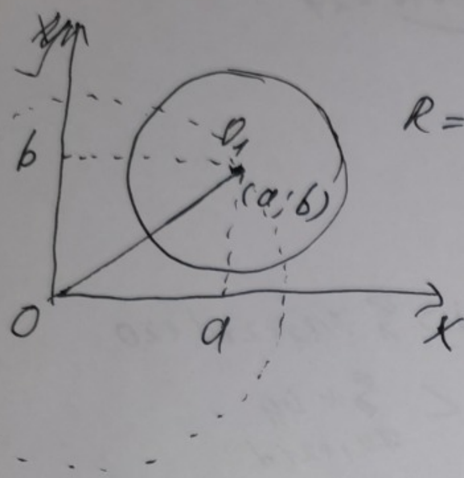
Шифр: **21101770**

ID профиля: **95523**

Вариант 18

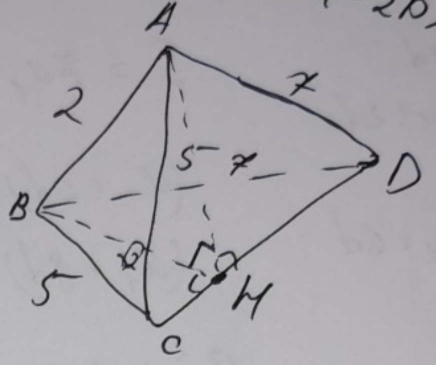
Черн

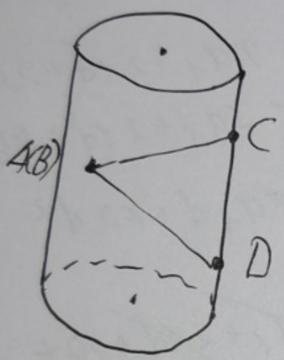
$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\le 5\\ \end{cases}$$

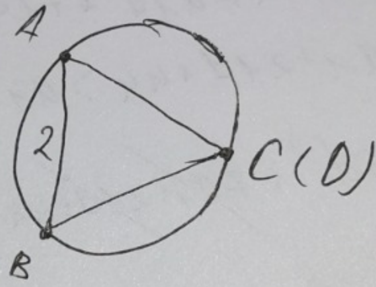


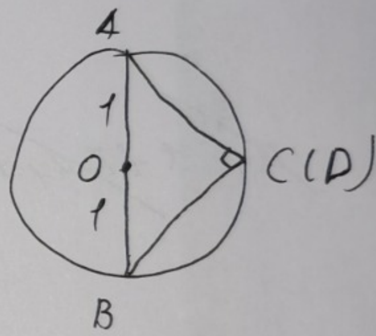
$R=\sqrt{5}$

$OO_1 \le \min(4a-2b;5)$







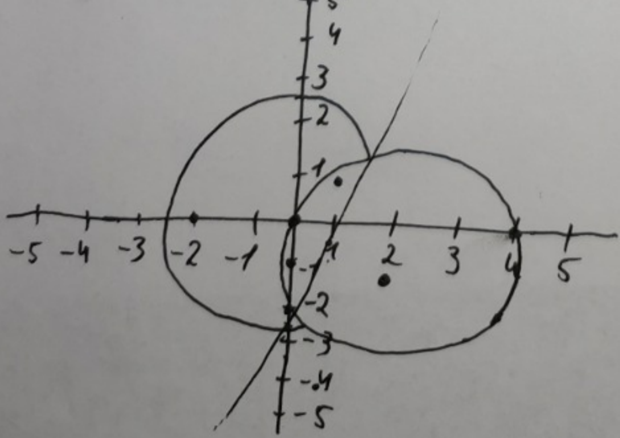


$BH=\sqrt{2}$

$CH=\sqrt{25-2}=\sqrt{23}$

$DH=\sqrt{49-2}=\sqrt{47}$

$CD=\sqrt{23}+\sqrt{47}$



$a=1=b$

$4x-2y-5=0$

$-2y=5-4x$

$y=-2{,}5+2x$

$4x-5=2y$

$y=2x-2{,}5$

$\cancel{3-2y-5=0}$

$\cancel{y=-1}$

$\cancel{x=3}$

$\cancel{x=-1}$

Черновик

$S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7$

$1+2+3+4+5+6 = 21$

$a_7 \cdot a_{12} \geqslant S + 20$

$a_9 \cdot a_{10} < S + 44$

$a_2 = a_1 + d$

$a_3 = \cancel{2}a_1 + 2d$

$\vdots$

$a_7 = a_1 + 6d$

$S = 7a_1 + 21d$

$(a_1 + 6d)(a_1 + 11d) > \cancel{S}\ 7a_1 + 21d + 20$

$(a_1 + 8d)(a_1 + 9d) < \underbrace{\cancel{S}}_{7a_1+21d} + 44$

$a_1^2 + \cancel{\ } 17a_1d + 66d^2 > 7a_1 + 21d + 20$

$a_1^2 + 17a_1d + 72d^2 < 7a_1 + 21d + 44$

$7a_1 + 21d + 44 > a_1^2 + 17a_1d + 72d^2$

$\cancel{a_1^2} + \cancel{17a_1d} + 66d^2 + \cancel{7a_1} + \cancel{21d} + 44 > \cancel{7a_1} + \cancel{21d} + 20 +$
$+ \cancel{a_1^2} + \cancel{17a_1d} + 72d^2$

$66d^2 + 24 > 72d^2$

$24 > 6d^2$

$d^2 < 4$

$-2 < d < 2$

$-1 \quad 1$

$\frac{D}{4} = \cancel{\ } \quad 25 - 7 = 18$

$$\begin{array}{r} 66 \\ -\,41 \\ \hline 25 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 72 \\ -\,65 \\ \hline 7 \end{array}$$

Чистовик Вариант 18

№1.

$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_7 = 7a_1 + 21d$

$a_2 = a_1 + d$

$a_3 = a_1 + 2d$

$\vdots$

$a_7 = a_1 + 6d$

d - разность арифметической прогрессии

$a_7 \cdot a_{12} > S + 20$ $\quad a_7 = a_1 + 6d \quad a_{12} = a_1 + 11d$

$a_9 \cdot a_{10} < S + 44$ $\quad a_9 = a_1 + 8d \quad a_{10} = a_1 + 9d$

$$\begin{cases} (a_1 + 6d)(a_1 + 11d) > S + 20 \\ (a_1 + 8d)(a_1 + 9d) < S + 44 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 17a_1d + 66d^2 > S + 20 \quad (1) \\ a_1^2 + 17a_1d + 72d^2 < S + 44 \Leftrightarrow S + 44 > a_1^2 + 17a_1d + 72d^2 \ (2) \end{cases}$$

$(1) + (2)$

$\cancel{a_1^2} + \cancel{17a_1d} + 66d^2 + \cancel{S} + 44 > \cancel{S} + 20 + \cancel{a_1^2} + \cancel{17a_1d} + 72d^2$

$66d^2 + 24 > 72d^2$

$24 > 6d^2$

$d^2 < 4$

$-2 < d < 2$

т.к. $a_1, a_2 \ldots a_n$ - целые числа, то d - целое $\Rightarrow d = \{-1; 0; 1\}$

т.к. последовательность возрастающая $d > 0$

1

Значит $d = 1$

Чистовик

№1 (продолжение)

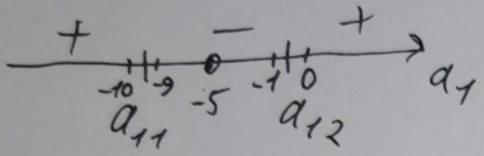
$S = 7a_1 + 21d = 7a_1 + 21$

$$\begin{cases} a_1^2 + 17a_1 + 66 > 7a_1 + 21 + 20 \\ a_1^2 + 17a_1 + 72 < 7a_1 + 21 + 44 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0 \\ a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0 \end{cases}$$

$(a_1+5)^2 > 0$ – ~~т.к.~~ на $(a_1+5)^2 \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1 \neq -5$



$a_{11,12} = -5 \pm \sqrt{25-7} = -5 \pm \sqrt{18}$

$a_{11} = -5 + \sqrt{18}$ $\qquad$ $a_{12} = -5 - \sqrt{18}$

$4 < \sqrt{18} < 5$ $\qquad$ $-5 < -\sqrt{18} < -4$

$-1 < -5 + \sqrt{18} < 0$ $\qquad$ $-10 < -5 - \sqrt{18} < -9$

т.к. прогрессия состоит из целых чисел то a_1 – целое

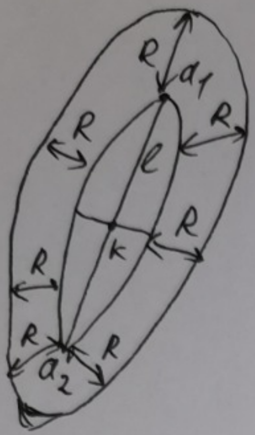
$$\left.\begin{array}{l} a_1 = \{-9; -8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1\} \\ a_1 \neq -5 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow a_1 = \{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1\}$

Ответ: $a_1 = \{-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1\}$

Чистовик

№3.



$$\cancel{\alpha = \frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}}$$

$$a_1 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$a_2 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

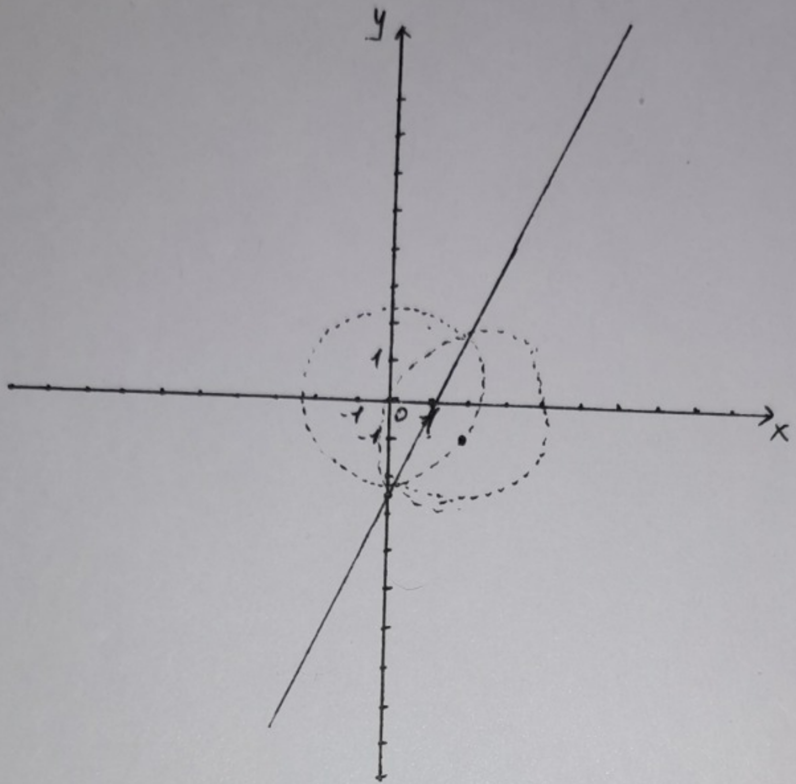
$$b_1 = \frac{4+2\sqrt{3}-5}{2} = \sqrt{3} - \frac{1}{2}$$

$$b_2 = \frac{4-2\sqrt{3}-5}{2} = -\sqrt{3} - \frac{1}{2}$$

Пусть S - площадь заштрихованной фигуры, тогда в силу подобия k фигур $S_м = S \cdot \cancel{\frac{l+R}{l}}\, k$

$$k = \frac{R+l}{l}, \quad l = \frac{|1' - 2'|}{2}$$

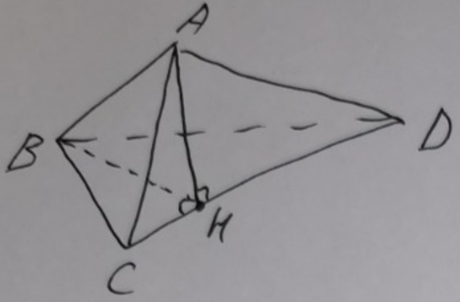
$$1' = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \qquad 2' = \sqrt{a_2^2 + b_2^2}$$



21101770 (U95523 M1295583)

Чистовик

№2.



~~BC = BD =~~

$BC = AC = 5$ | $\triangle BCD = \triangle ACD$ по 3 сторонам

$BD = AD = 7$ | $\Rightarrow$ если AH и BH – высоты, то

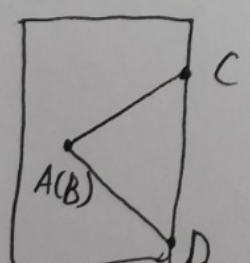
DC – общая | $AH = BH$ и ~~$\exists$~~ $AH \cap BH = H$

(то есть высоты ~~точкой пересечения со сто~~ основанием перпендикуляра делят $[CD]$ в одинаковых пропорциях

$CD \perp BH$
$CD \perp AH$ | $CD \perp (ABH) \Rightarrow CD \perp AB$
$BH \cap AH = H$

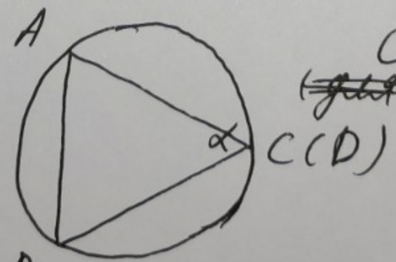
в проекции на (2)

1)



вид сбоку

2)



вид сверху

в произвольном случае AB – хорда ~~(для вида сверху)~~

по т. синусов (обобщенной)

$$R = \frac{AB}{2\sin\alpha}$$

$$\left.\begin{aligned} &R \to \min \\ &AB - const \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \sin\alpha \to MAX$

3

21101770 (U95523 M1295583)

Чистовик

№2 (продолжение)

~~$\sin\alpha = 1$ т.к. $-1 \le \sin\alpha \le 1$)~~
~~α, как угол $0° \le \alpha \le 180°$~~
~~$\sin\alpha \le$~~

$\sin\alpha \to MAX \Rightarrow \sin\alpha = 1 \quad \alpha = 90°$

AB - диаметр

$R = \frac{AB}{2} = 1$

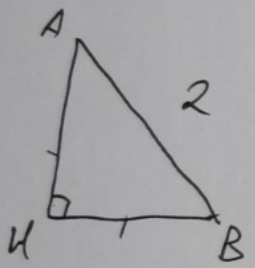
α – угол (ACD) и (BCD)

$BH \perp CD$
$AH \perp CD$
$AH \cap BH = H$

$\angle AHB = \alpha = 90°$

ранее доказывалось, что $AH = BH \Rightarrow \triangle ABH$ – р/б и п/уг.

$\Rightarrow AH = BH = \frac{AB}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

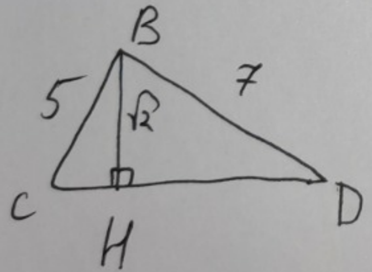


в $\triangle BCD$ (и $\triangle BCH$, и $\triangle BHD$) (можно и $\triangle ACD$ разницы нет) по т. Пифагора:

$CH = \sqrt{BC^2 - BH^2} = \sqrt{25-2} = \sqrt{23}$

$DH = \sqrt{BD^2 - BH^2} = \sqrt{49-2} = \sqrt{47}$

$CD = CH + DH = \sqrt{23} + \sqrt{47}$



Ответ: $CD = \sqrt{23} + \sqrt{47}$

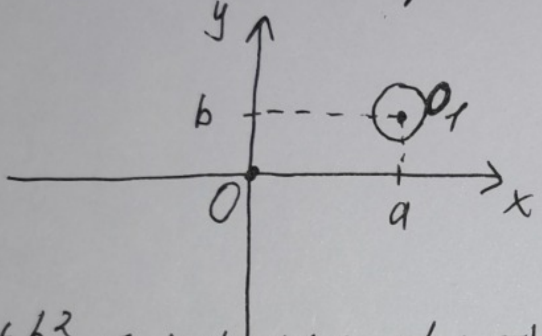
4

Чистовик

№3

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 5 \ (1)\\ a^2+b^2 \le \min(4a-2b;5)\ (2)\end{cases}$$

1) фигурой ~~+ б~~ уравнения (1) будет круг ограниченный окружностью радиуса $R=\sqrt{5}$ с центром в точке $O_1(a;b)$



(масштаб не соблюден)

2) $a^2+b^2 \le \min(4a-2b;5)$

$a^2+b^2 = OO_1^2$

1) ~~min~~ $4a-2b<5$

$a^2+b^2 \le 4a-2b$

$a^2-4a+b^2+2b \le 0 \quad |+5$

$(a-2)^2+(b+1)^2 \le 5 \ (I) \quad r_1 \le \sqrt{5} \quad O_1(2;1)$

$a^2+b^2 \ge 0 \Rightarrow 0 \le 4a-2b<5$

2) $4a-2b \ge 5$

$a^2+b^2 \le 5 \ (II)$

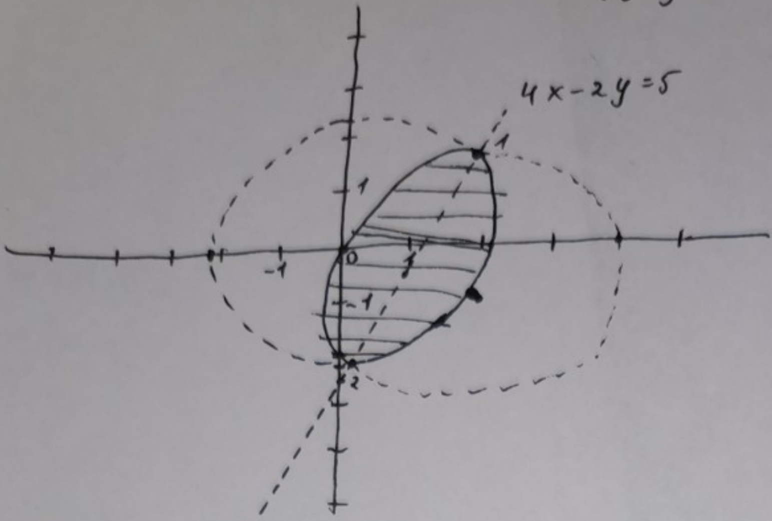
$r_2 \le \sqrt{5} \quad O_2(0;0)$

поскольку a и b это x и y координаты то функции I и II в xy координатах будут задавать область определения a и b

5

Чистовик

№3



$$\begin{cases}(a-2)^2+(b+1)^2=5\\ 4a-2b=5\end{cases}\quad \begin{cases}a^2-4a+b^2+2b=0\\ 4a-2b=5\end{cases}$$

$$\begin{cases}a^2+b^2=5\\ 4a-2b=5\end{cases}$$

$$b=\frac{4a-5}{2}$$

$$a^2+\left(\frac{4a-5}{2}\right)^2=5$$

$$a^2+\left(2a-\frac{5}{2}\right)^2=5$$

$$5=\frac{20}{4}$$

$$a^2+4a^2+\frac{25}{4}-\cancel{2}\cdot 2a\cdot\frac{5}{\cancel{2}}=5$$

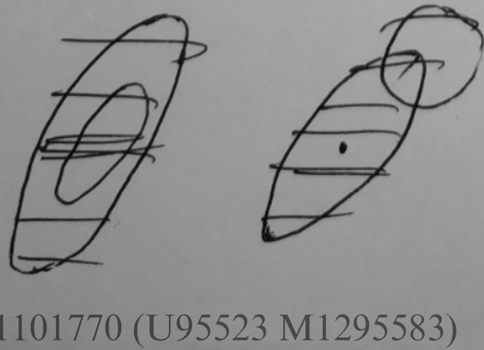
$$5a^2-10a+\cancel{\left(\frac{5}{2}\right)^2}+\frac{5}{4}=0$$

$$a^2-2a+\frac{1}{4}=0$$

$$4a^2-8a+1=0$$

$$a_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16-4}}{4}=\frac{4\pm2\sqrt{3}}{4}=1\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Закрашенная область – область центров окружностей графика (1)



фигура M – совокупность всех окружностей

6

21101770 (U95523 M1295583)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101770**

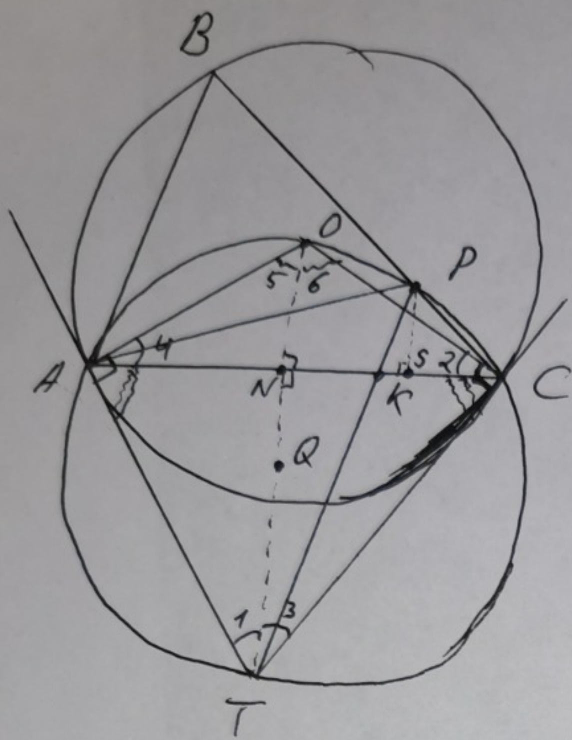
ID профиля: **95523**

Вариант 18

1
10
11

Чистовик

№6



$$\frac{S_{\triangle APK}}{S_{\triangle PKC}} = \frac{AK}{KC} = \frac{6}{5} = \frac{6x}{5x}$$

(общая высота)

по св-ву касательных $\angle OAT = \angle OCT = 90^\circ$

$\Rightarrow OATC$ – впис. по признаку

$AO = OC = R$

$AT = TC$ по т. об отр. кас.

OT – общая

$\triangle AOT = \triangle COT$ по трем сторонам

$\Rightarrow \angle 1 = \angle 3$ и $\angle 5 = \angle 6 \Rightarrow OT$ – бис.

$\angle 1 = \angle 3$

$\left.\begin{array}{l}\angle 1 = \angle 2\\ \angle 3 = \angle 4\end{array}\right)$ как впис. опир. на общую дугу

$\angle 2 = \angle 4 \Rightarrow \triangle AOC$ – р/б OT – бис $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ медиана и высота.

т.к. $\angle OAT = 90^\circ$ OT – диаметр $Q \in [OT]$

Q – центр окр.

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle PKC}} = \frac{BC \cdot CA}{CK \cdot CP} = \frac{BC}{CP} \cdot \frac{11}{5}$$

$\triangle TNK \sim \triangle PSK$ по двум углам

$$\frac{TN}{PS} = \frac{TK}{PK} \qquad \frac{PS}{ON} = CN$$

по т. о пересек. хордах: $ON \cdot NT = AN \cdot NC = NC^2 = \left(\frac{11}{2}x\right)^2 = \frac{121}{4}x^2$

$PK \cdot KT = AK \cdot KC = 30x^2$

6

Черновик

$$НОД\,(a;b;c)=15$$
$$НОК\,(a;b;c)=3^{15}\cdot5^{18}$$

$$НОК_{(a;b;c)}=\frac{abc}{НОД(a;b;c)}$$

$$abc=15\cdot3^{15}\cdot5^{18}=3^{16}\cdot5^{19}$$

$a\geq15$ $\quad a=3^n5^m$

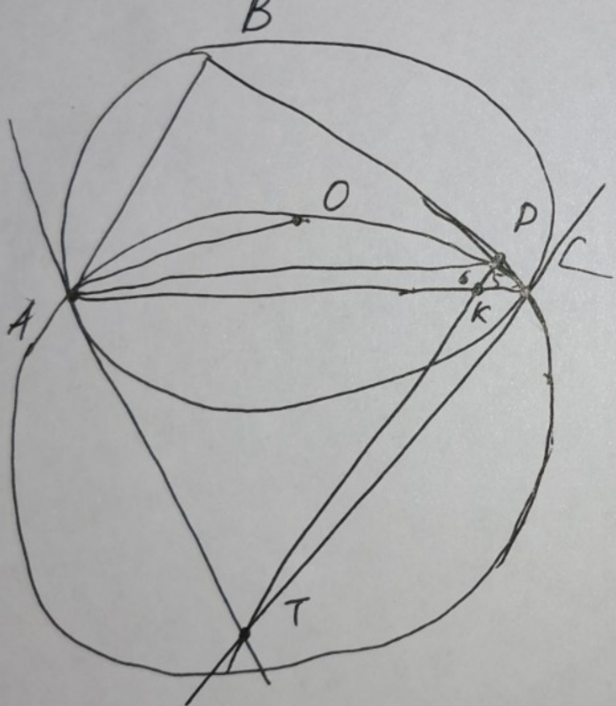
$b\geq15$ $\quad b=3^k5^e$

$c\geq15$ $\quad c=3^t5^s$

$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)$ I

$\log_{6x-14}(x-1)^2$ II, III

$\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)$



$\cancel{\frac{1}{2}\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)\cdot2\log_{6x-14}}$

$$\begin{array}{r|l} t^3-t^2-4 & t-2 \\ -\;t^3-2t^2 & t^2+t+2 \\ t^2-4 & \end{array}$$

$(t-2)(t+2)$

$t^3+t^2-2t^2-4=$

$$2\frac{\log_{x-1}6x-14}{\log_{x-1}\frac{x}{3}+3}\cdot2\frac{1}{\log_{x-1}(6x-14)}\cdot\log_{x-1}\frac{x}{3}+3=4$$

$=t^2(t-2)+(t-2)(t+2)=$

$=(t^2+t+2)(t-2)$

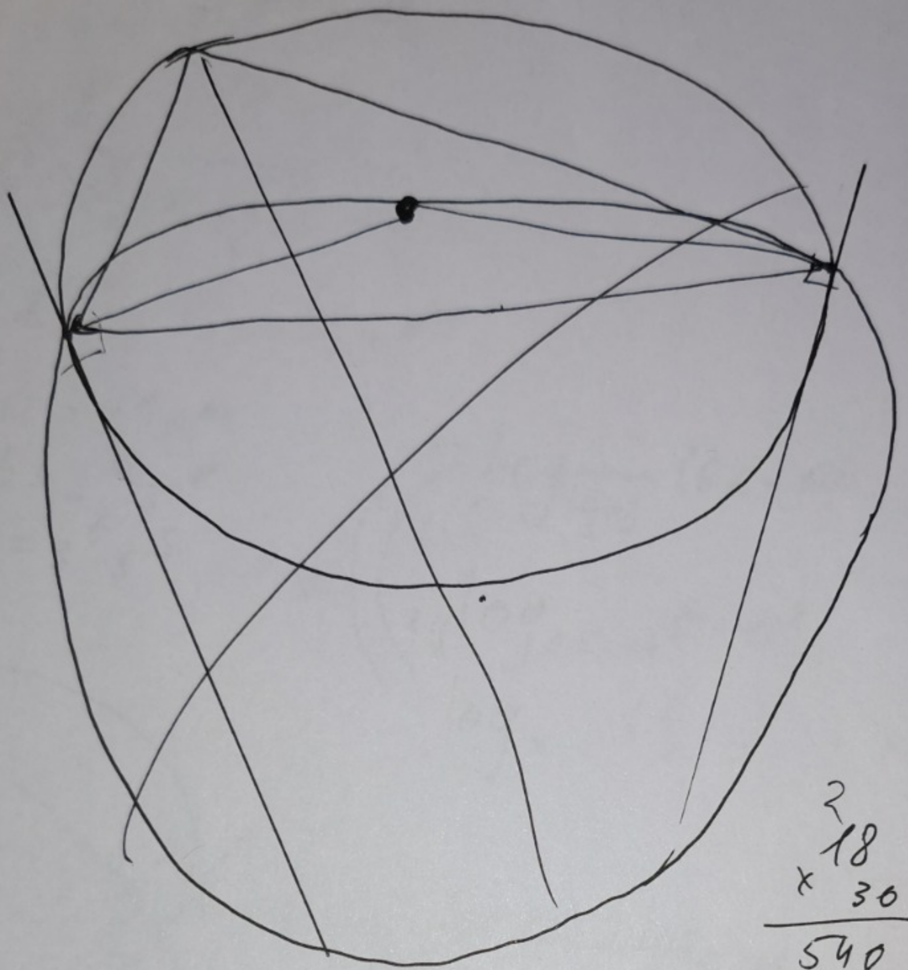
$t\cdot t(t+1)=4$

$t^3-t^2-4=0$

$t=2;$

$D=1-\quad 27-\quad 21-6$

Черновик



a b c

a c b

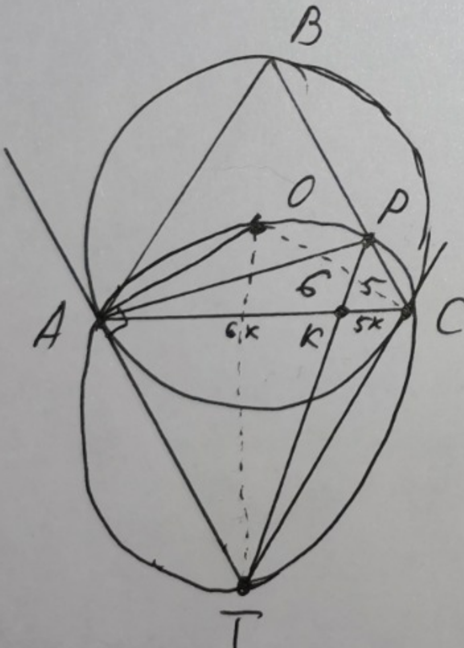
b

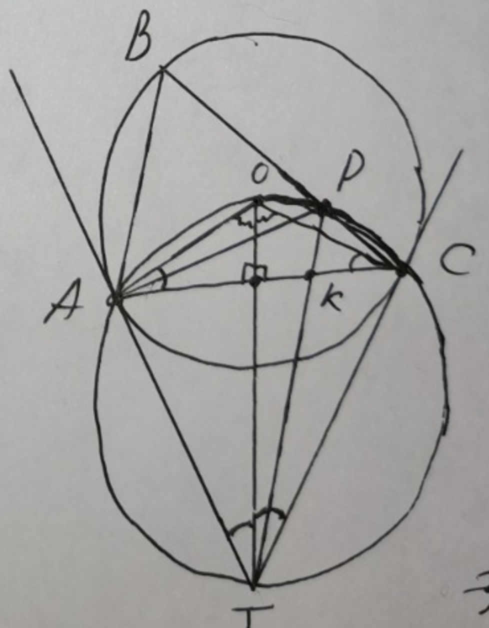
b

c

c

$$18 \times 30 = 540$$





$\times\ 18$
$\quad\ 9$

$6x+5x=11x$

$$540 \times 6 = 3240$$

$$15 \times 18 = 120 + 15 = 270$$

$2 \cdot 3$

$4 \cdot 3$

$8 \cdot 9$

~~3 · 6 ·~~

$3 \cdot 6 \cdot 9$

НОД $=9$

Чистовик

№5.

$a=\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)$

$b=\log_{6x-14}(x-1)^2$

$c=\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)$

$$a\cdot b\cdot c=\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)\cdot\log_{6x-14}(x-1)^2\cdot\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)=$$

$$=\frac{\cancel{\log_{x-1}(6x-14)}}{\frac{1}{2}\cancel{\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)}}\cdot 2\cdot\frac{1}{\cancel{\log_{x-1}(6x-14)}}\cdot\cancel{\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)}=2\cdot 2=4$$

поскольку 2 из них равны (и равны t)
то третье $=(t-1)$

$t\cdot t(t-1)=4$

$t^3-t^2-4=0$

$t=2;\ 8-4-4=0$

$(t-2)(t^2+t+2)=0$

$t-2=0 \qquad t=2$

$t^2+t+2=0$

$D<0 \Rightarrow t\in\varnothing$

$a=t$

$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)=2$

$\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)=1$

$6x-14=\frac{x}{3}+3$

$\cancel{\frac{19}{3}x=17}$ $\quad \frac{17}{3}x=17$

$\cancel{x=\frac{17\cdot 3}{19}}$ $\quad x=3$

$b=t$

$\log_{6x-14}(x-1)^2=2$

$6x-14=x-1$

$5x=13$

$x=\frac{13}{5}$

$c=t$

$\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)=2$

$\frac{x}{3}+3=(x-1)^2$

$\frac{x}{3}+3=x^2-2x+1$

$x^2-\frac{7}{3}x-2=0$

$3x^2-7x-6=0$

$\cancel{x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16+48}}{3}}$

$(x-3)(3x+2)=0$

$x=3 \qquad x=-\frac{2}{3}$

Чистовик

№4. (продолжение) $1 \div 15$ – от 1 до 15
$1 \div 18$ – от 1 до 18.

1) a — $3 \cdot 5$; b — $3^{15} \cdot 5^{18}$; c — $3^{1 \div 15}\, 5^{1 \div 18}$

таких комбинаций $15 \cdot 18 = 270$

2) a — $3 \cdot 5^{18}$; b — $3^{15} \cdot 5$; c — $3^{1 \div 15} \cdot 5^{1 \div 18}$

таких комбинаций $15 \cdot 18 = 270$

3) $\cancel{a}$ — $\cancel{3^{15} \cdot 5}$ все остальные случаи будут зависеть от взаимного расположения a; b и c, то есть $(270+270) \cdot 3!$

$3!$ – ~~число~~ кол-во способов расстановки a, b и c

$540 \cdot 6 = 3240$

Ответ: 3240 троек a, b и c

Чистовик

№4 (продолжение)

Заметим, что если

~~$k>1$ $m>1$ $t>1$ $s>1$ $l>1$ и $p>1$, то~~

~~$НОД(a;b;c)>15$~~

$k>1$, $t>1$, $l>1$ или $m>1$, $s>1$, $p>1$, то

$НОД(a;b;c) \geq 15$ =>

=> ~~∄~~ что одно из чисел содержит только одну тройку, а другое только одну пятерку. (возможно, также что одно из чисел равно 15)

если

$k<15$, $t<15$, $l<15$ или $m<19$, $s<19$, $p<19$, то

$НОК(a;b;c)<3^{15}5^{18}$

одно из чисел содержит 3^{15} а другое 5^{18}

(возможен случай, что одно из чисел равно $3^{15}\cdot5^{18}$)

4

Чистовик

№5 (продолжение)

Т.к. $t=2$, должны принимать 2 числа из $a; b; c$, при одном x, то нужно найти общий корень для двух чисел: $x=3$ ($a=c=2$)

$b=\log_{6\cdot3-14}(3-1)^2=\log_4 2^2=1$

Ответ: $x=3$.

Чистовик

№4.

$$\begin{cases} НОД(a;b;c)=15 \\ НОК(a;b;c)=3^{15}\cdot 5^{18} \end{cases}$$

$$a\cdot b\cdot c = НОД(a;b;c)\cdot НОК(a;b;c) =$$
$$= 3\cdot 5\cdot 3^{15}\cdot 5^{18} = 3^{16}\cdot 5^{19}$$

$a \geq 15$; $a \vdots 15$ $\Rightarrow a = 3^k 5^m$

$b \geq 15$; $b \vdots 15$ $\Rightarrow b = 3^t 5^s$

$c \geq 15$; $c \vdots 15$ $\Rightarrow c = 3^l 5^p$

$k, m, t, s, l, p > 0$

~~k, m, t, s, l,~~

~~1) $k+t+l=16$~~

~~2) $m+s+p=19$~~

~~Для простоты объяснения будем считать, что тройки и пятерки выписаны на доске.~~

~~1) для выбора k троек можно использовать от 1 до 17 от 1 до 14 троек~~

k	t	l
1		
2		
3		
4		
5		
6		
...		
11		
12		
13		
14	1	1

3