Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101746**

ID профиля: **123691**

Вариант 18

чистовик (1) Вариант 18

~~a.~~ a_1 – первый элемент прогрессии

d – разность прогрессии

$S = a_1 + a_2 + ... + a_7 \Rightarrow S = 7a_1 + \frac{7\cdot 6}{2}d = 7a_1 + 21d$

$a_7 = a_1 + 6d$; $a_{12} = a_1 + 11d$; $a_9 = a_1 + 8d$; $a_{10} = a_1 + 9d$

$\left.\begin{array}{l} a_7 a_{12} > S+20 \\ a_9 a_{10} < S+44 \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{ll} a_1^2 + 17a_1 d + 66d^2 > S+20 & (1) \\ a_1^2 + 17a_1 d + 72d^2 < S+44 & (2) \end{array} \Rightarrow$

вычитаем из верхней строчки (1) нижнюю (2) получим

$66d^2 - 72d^2 > 20 - 44$; $-6d^2 > -24$; $d^2 < 4$; $-2 < d < 2$

Поскольку 1) по условию $d > 0$ (прогрессия ↑) то $0 < d < 2$

2) элементы прогрессии целые то и d – целое

(разность двух целых чисел целая) т.е. $d = 1$

(1) $a_1^2 + 17a_1 d + 66d^2 > S + 20$ $(S = 7a_1 + 21d = 7a_1 + 21)$

$a_1^2 + 17a_1 + 66 > 7a_1 + 41$; $a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0$ $(a_1+5)^2 > 0$

выполняется при $a_1 \neq -5$

(2) $a_1^2 + 17a_1 d + 72d^2 < S + 44$

$a_1^2 + 17a_1 + 72 < 7a_1 + 21 + 44$; $a_1^2 + 10a_1 + 72 - 65 < 0$

$a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0$

$D_1 = 25 - 7 = 18 = (3\sqrt{2})^2$

$-5 - 3\sqrt{2} < a < -5 + 3\sqrt{2}$

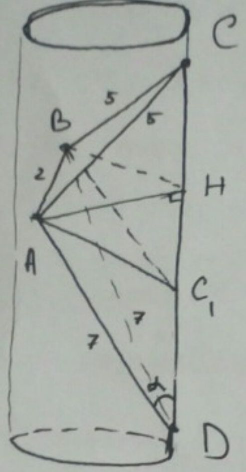
Выберем общие области решений (1) и (2)

$\left.\begin{array}{l} a \in (-\infty; -5) \cup (-5; +\infty) \\ a \in (-5 - 3\sqrt{2}; -5 + 3\sqrt{2}) \end{array}\right| \Rightarrow a \in (-5 - 3\sqrt{2}; -5) \cup (-5; -5 + 3\sqrt{2})$

Ответ: $a \in (-5 - 3\sqrt{2}; -5) \cup (-5; -5 + 3\sqrt{2})$

21101746 (U123691 M1301123)

чистовик (2) Вариант 18



Полученная фигура - система из двух р/б треугольников имеющих общее основание $AB=2$

Если $CD \parallel$ оси цилиндра и C и D лежат на его боковой поверхности то C и D лежат на одной образующей

$\Delta ACD = \Delta BCD$ по трём сторонам

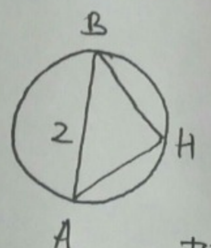
Высоты из точек A и B на сторону CD упадут в одну точку H (из-за равенства Δов)

(причём $AH = BH$ также из-за рав-ва Δов)

Плоскость (ABH) $\perp$ образующим цилиндра

т.к. $AH \perp$ оси цилиндра, $BH \perp$ оси цилиндра $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ В сечении цилиндра плоскостью (ABH) будет круг, радиус которого и есть радиус цилиндра (ΔABH вписан в эту окр.)



Если AB - диаметр, то $r=1$

Если AB не диаметр, то $2r > AB$; $r > 1$ $\Big| \Rightarrow r \geq 1$

Поскольку мы ищем наименьший радиус, то он равен 1 $\Rightarrow$ AB - диаметр $\Big| \Rightarrow \Delta ABH$ - р/б и прямоугольный

$AH = BH$

т.е. $AH = BH = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot AB = \sqrt{2}$

Пусть $\angle ADC = \alpha$ тогда $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{7}$ (т.к. ΔADH - п/у) $\Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{\frac{49-2}{49}} = \frac{\sqrt{47}}{7}$

По т. косин. в ΔACD $\quad 5^2 = 49^2 + x^2 - 14x \cdot \cos\alpha$ (где $x = CD$)

$x^2 - 2\sqrt{47}x + 24 = 0$

$D_1 = 47 - 24 = 23$

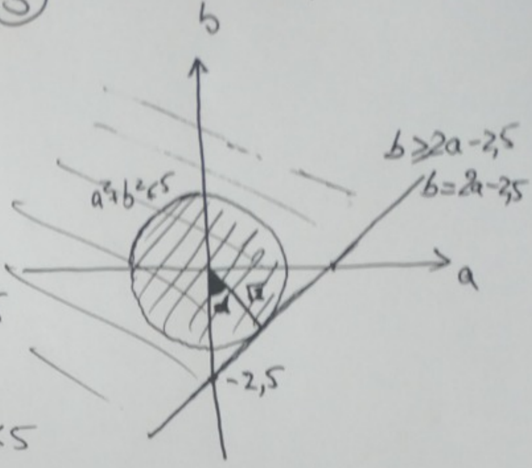
$x = \sqrt{47} \pm \sqrt{23}$

Заметим, что оба ответа возможны, один из них соответствует $\angle DAC > 90°$, а второй при $\angle DAC < 90°$

Мы в нашем решении никак не ограничивали этот угол, так что решение подойдёт для обоих случаев. На рисунке примером расположения второго тетраэдра при этом же радиусе будет тетраэдр ABC_1D; угол α, высоты и все рассуждения совпадают

Ответ: $CD = \sqrt{47} \pm \sqrt{23}$

чистовик ③ Вариант 10



$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2\leq 5\\ a^2+b^2\leq \min(4a-2b;5)\end{cases}$$

рассмотрим второе выражение

может ли $4a-2b$ быть меньше 5

$4a-2b<5 \Rightarrow b>2a-2,5$

узнаем какая часть графика $a^2+b^2\leq 5$ находится в данной области

Проведём перпендикуляр из $(0;0)$ на ~~$b\geq 2a-2,5$~~ $b=2a-2,5$

$\angle\alpha = \angle$ наклона; $tg\,\alpha=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{4} \Rightarrow \cos^2\alpha=\frac{4}{5}$

в точке пересеч. с осью ординат $b=-2,5$

Найдём длину перпендик. $h=2,5\cdot\cos\alpha=\frac{5}{2}\cdot\sqrt{\frac{4}{5}}=\sqrt{5}$

т.е. основ. перпендикуляра лежит на окр.

т.е. $b=2a-2,5$ - касательная

т.е. весь круг находится в данной области

т.е. второе нер-во выглядит так

$a^2+b^2\leq 4a-2b$

$a^2-4a+4+b^2-2b+1\leq 5$

$(a-2)^2+(b-1)^2\leq 5$

Найдём когда у графиков $(x-a)^2+(y-b)^2\leq 5$

$(a-2)^2+(b-1)^2\leq 5$

есть общ. точки. Это две окр. с радиусом $\sqrt{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ общ. точка будет тогда когда расст между центрами меньше или равно $2\sqrt{5}$

$(a-2)^2+(b-1)^2\leq 5$ центр в точке $(2;1)$ $(a-x)^2+(b-y)^2\leq 5$ центр в точке $(x;y)$

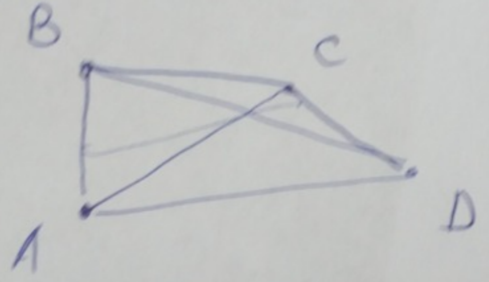
$(x-2)^2+(y-1)^2\leq (2\sqrt{5})^2 \rightarrow$ ~~окр~~ круг радиуса 20

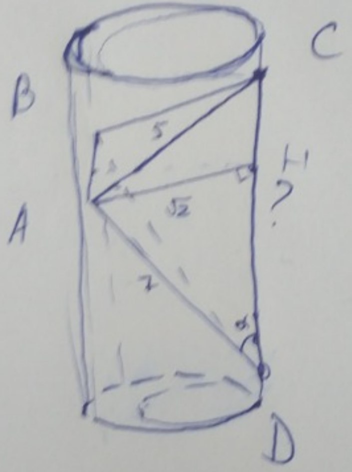
$S_{круга}=\pi r^2=400\cdot\pi=400\cdot 3,14=1256$

Ответ: 400π или ≈ 1256

21101746 (U125691 M1361125)

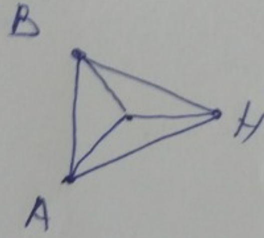
черновик 1





$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{7} \quad \cos\alpha = \sqrt{\frac{49-4}{49}} = \sqrt{\frac{45}{49}} = \frac{3}{7}\sqrt{5}$$

$$\cancel{\frac{\sin\alpha}{5} = \frac{\sin\beta}{x}}$$



$$25 = 49 + x^2 - 2\cdot 7\cdot x\cdot\cos\alpha$$

$$x^2 - \cancel{14}x\cdot\frac{6}{\cancel{7}}\sqrt{5} + 24 = 0$$

$$x^2 - 6x\sqrt{5} + 24 = 0$$

$$D_1 = 45 - 24 = 5^2$$

$$x = 3\sqrt{5} \pm 5$$

Черновик 2

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 5 \\ a^2+b^2 \le \min(4a-2b, 5) \end{cases}$$

$(a^2-x)^2+(b-y)^2 \le 5$

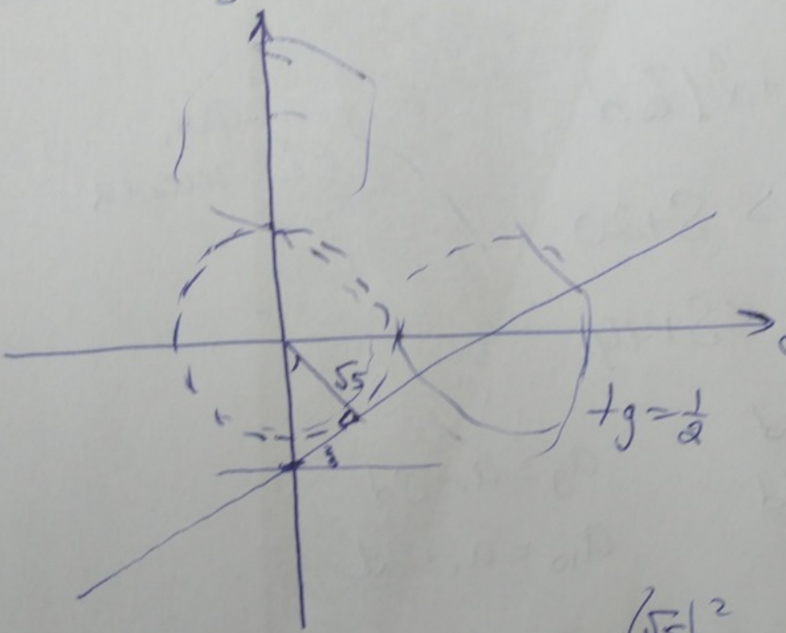
$a^2+b^2 \le 5$

$4a-2b=5$

$b=2a-2,5$

$\cancel{a^2+b^2=5}$

a^2+



$tg=\frac{1}{2}$

$tg\ \frac{1}{4}=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}$

$\cos^2\alpha=4-4\cos^2\alpha$

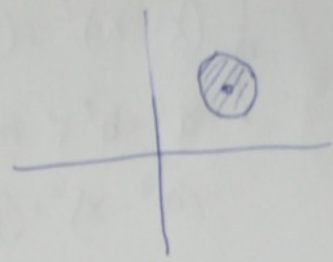
$\cos^2\alpha=\frac{4}{5}$

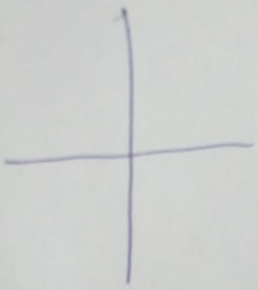
$\cos^2\beta=\left(\frac{\sqrt{5}}{\frac{5}{2}}\right)^2=\frac{5}{25/4}=\frac{4}{}$

21101746 (U123691 M1301123)

черновик 3

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y-b)^2 \le 5 \\ a^2+b^2 \le \min(4a-2b, 5) \end{cases}$$





$S = 7a_1 + 21d$ возр. арифм. цел. числа

$a_7 a_{12} > S+20$

$a_9 a_{10} < S+44$

$\times\begin{array}{r}66\\3\\ \hline 198\end{array}$

$a_7 = a_1 + 6d$

$a_{12} = a_1 + 11d$

$a_9 = a_1 + 8d$

$a_{10} = a_1 + 9d$

$a_1^2 + 17a_1 d + 66d^2 > 7a_1 + 21d + 20$

$a_1^2 + 17a_1 d + 72d^2 < 7a_1 + 21d + 44$

$-6d^2 > -24$

$d^2 < 4$

$-2 < d < 2 \Rightarrow 0 < d < 2$ $\boxed{d = 1 \text{ или } 2}$

$a_1^2 + 34a_1 + 66\cdot 4 > 7a_1 + 42 + 20$

$\cancel{a_1^2 + 27a_1 + \ldots > 0}$

$\cancel{a_1^2 \ldots < 7a_1 + 44}$

$a_1^2 + 34a_1 + 72\cdot 4 < 7a_1 + 42 + 44$

$a_1^2 + 27a_1 + \underset{202}{288 - 86} < 0$

$a^2+b^2 \le m \ldots$

черновик 4

$$\begin{array}{r} \times 14 \\ 17 \\ \hline 98 \\ 14 \\ \hline 238 \end{array}$$

$a_1^2 + a_1(17d-7) + 66d^2 - 21d - 20 > 0$

$D = (17d-7)^2 - 66 \cdot 4d^2 + 84d + 80 = 0$

$$\begin{array}{r} 238 \\ 84 \\ \hline 154 \end{array}$$

$289d^2 - 14 \cdot 17d + 49 - 264d^2 + 84d + 80 = 0$

$25d^2 - 154d + 129 = 0$

Часть 2

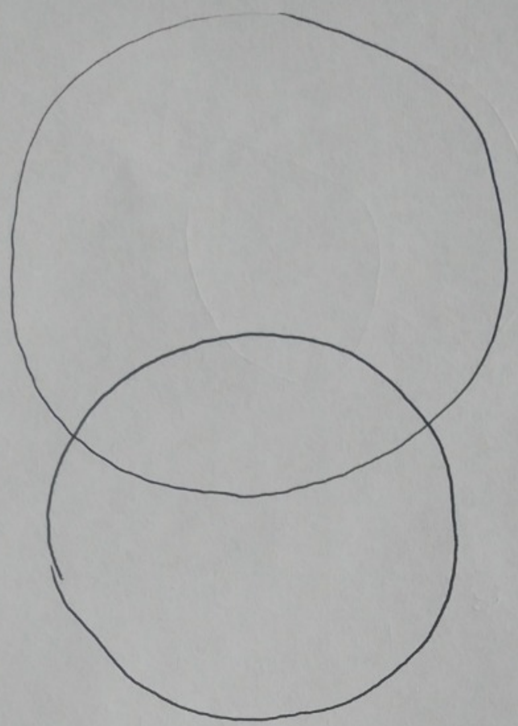
Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101746**

ID профиля: **123691**

Вариант 18

Черновик 4



черновик 3

$\frac{x}{3}+3=a$; $6x-14=b$; $x-1=c$

$2\log_a b$; $2\log_b c$; $\log_c a$

1) $2\log_a b=2\log_b c$

$a^{\log_a b}=a^{\log_b c}$

$b=\cancel{b^{\log_a c}}\,c^{\log_b a}$ $\cancel{1=2\log_a b\log_b c}$ $1=\log_b a\log_b c$

$\log_a c=1$

$a=c$

$\frac{x}{3}+3=x-1$

$\frac{2x}{3}=4$; $x=6$

$6x-14=22$

$\frac{x}{3}+3=5$; $x-1=5$

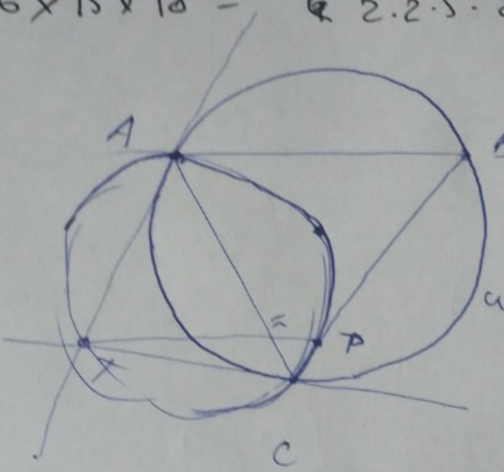
$2\log_a b=2\log_b c$

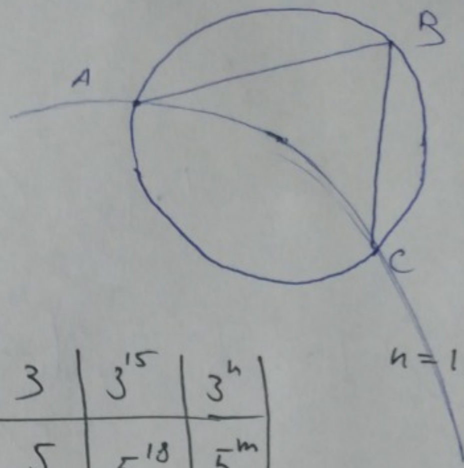
21101746 (U123691 M1301124)

черновик 2

$3^n\cdot 5^m$ $\quad 3^k\cdot 5$ $\quad 3\cdot 5^l$

$6\times 6\times 15\times 18 = 2\cdot 2\cdot 5\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3 = 40\cdot 3^5$





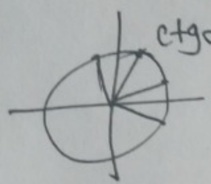
3	3^{15}	3^n
5	5^{18}	5^m

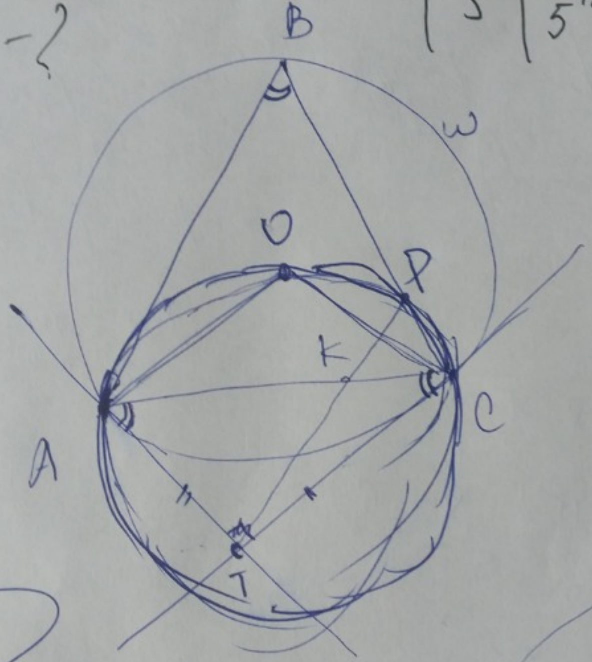
$\underbrace{n = 1, 2, 3, \ldots 15}_{15 \text{ знач}}$

8 знач

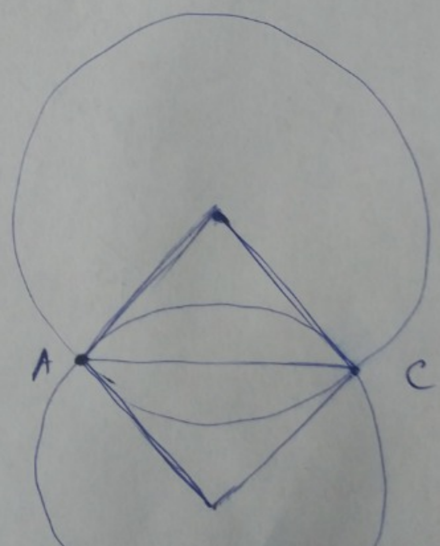
$AK:KC = 6:5$

$tg(90-\alpha)$ -?





$$\frac{\sin 2\alpha}{AC} = \frac{\cos\alpha}{R}$$



черновик 1

$2\log_{\frac{x}{3}+3}(6x-14)$

$2\log_{6x-14}(x-1)$

$\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)$

$\frac{1}{\log_{6x-14}\left(\frac{x}{3}+3\right)} = \log_{6x-14}(x+1)$

$\log_{6x-14}$

$2\log_a b$; $2\log_b c$; $\log_c a$

$a^{\log_a b} = a^{\log_b c}$

$b = a^{\log_b c}$

$b = b^{\log_a c}$

for $a = c$

~~6x-14=~~

$\frac{x}{3}+3 = x-1$

$\frac{2x}{3} = 4$ $x=6$

$\frac{1}{2}\sin\alpha\, PC \cdot PK = 5$

$\frac{1}{2}\sin\alpha\, AP \cdot PK = 6$

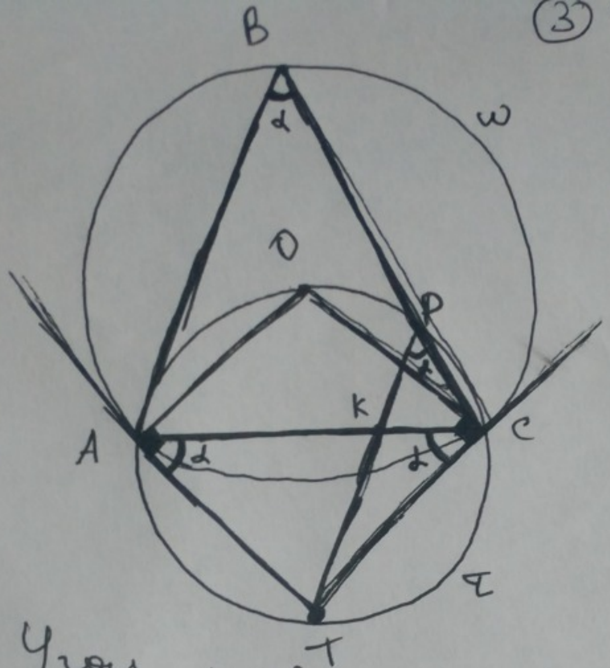
$\frac{PC}{AP} = \frac{5}{6}$

$AK \cdot CK = PK \cdot KT$

$\frac{PK}{KC} = \frac{AK}{KT}$

21101746 (U123691 M1301124)

③ чистовик №6



Рассмотрим четырёхуг. AOCT
$\angle OAT = \angle OCT = 90°$ т.к. AO и OC – радиусы, а CT и AT – касательные
$\angle OAT + \angle OCT = 180° \Rightarrow$ вокруг фигуры можно описать единственную окружность, поскольку через A, O и C уже проходит окружность (назовём её τ) то она же и проходит через точку T т.е. T лежит на этой окружности

Угол между касат. и секущей равен углу опирающемуся на дугу образованную секущей. $\angle ACT = \angle ABC = \angle TAC = \alpha$
$\angle CPT$ и $\angle CAT$ опираются на одну дугу $\Rightarrow \angle CPT = \angle TAC = \alpha$
~~Рассм~~ $\triangle ABC \sim \triangle KPC$ по двум углам (α и общий $\angle BCA$)
Коэффициент подобия равен $k = \frac{AC}{KC} = \cancel{\frac{AC}{AK+KC}} \frac{AK+KC}{KC}$

$\frac{AK}{KC} = \frac{6}{5}$, т.к. в $\triangle APK$ и $\triangle CPK$ одинаковая высота.

$k = \frac{\frac{6}{5}KC + KC}{KC} = \frac{11}{5}$; Площади подобных фигур относятся как $k^2 \Rightarrow S_{ABC} = \left(\frac{11}{5}\right)^2 \cdot 5 = \frac{121}{5} = 24,2$

Ответ: 24,2

б) $tg\,\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \cancel{4}\ \frac{1}{4} = \frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha} \Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{1}{5}$; $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$

По т. синусов $\frac{AC}{\sin\alpha} = 2R$; $AC \cdot \sqrt{5} = 2R$

~~В $\triangle AOC$ = OAC = 90° − α~~; ~~AC = 2 R·cos α~~

21101746 (U123691 M1301124)

② чистовик продолжение №4

при $m=15$ $\begin{cases} n\neq 1 \\ n\neq 18 \end{cases} \rightarrow 3\cdot 6\cdot 1\cdot 16$ случаев $\quad 3\ \ 3^{15}\ \ 3^{15}$

$m=1$ $\begin{cases} n\neq 18 \\ n\neq 1 \end{cases} \rightarrow 3\cdot 6\cdot 16$ случаев $\quad 5\ \ 5^{1}\ \ 5^{18}$

при $\left.\begin{array}{ll} m=15 & n=1 \\ m=15 & n=18 \\ m=1 & n=18 \\ m=1 & n=1 \end{array}\right\}$ по 9 случаев

при $\begin{cases} m\neq 15 \\ n\neq 1 \end{cases}$ $n=1 \rightarrow 3\cdot 6\cdot 13$ случаев

$n=18 \rightarrow 3\cdot 6\cdot 13$ случаев

Итого: $13\cdot 16\cdot 6\cdot 6+2\cdot 3\cdot 6\cdot 16+2\cdot 3\cdot 6\cdot 13+36=$

$=6\cdot 6\,(13\cdot 16+16+13)+36=$

$=36\,(13\cdot 16+16+13+1)=36\,(16+1)(13+1)=$

$=36\cdot 17\cdot 14$

Ответ: $14\cdot 17\cdot 36$ троек

21101746 (U123691 M1301124)

№4 Чистовик ①

Докажем что числа a, b и c представимы в виде $3^m \cdot 5^n$ где $m, n \in$ ~~N~~ $\mathbb{N}$

> Если бы в разложении были бы другие прост. множители то они были бы и в НОК

> Если бы в разложении хотя бы одного из чисел не было бы 3^m или 5^n то степеней тройки не было бы и в НОД

Более того $m \leq 15$, иначе в НОК степень тройки была бы больше

$n \leq 18$, иначе в НОК степень пятёрки была бы больше

$\left.\begin{matrix} m=15 \\ n=18 \end{matrix}\right\}$ точно встретится хотя бы в одном разложении

т.к. иначе степени соотв. цифр в НОК были бы меньше.

$\left.\begin{matrix} m=1 \\ n=1 \end{matrix}\right\}$ точно встретится хотя бы раз

иначе степени соответств. цифр в НОД были бы больше

Таким образом разложив a, b и c мы получим $3, 3^{15}, 3^m, 5, 5^{18}, 5^n$ где $m \in \{1, 2, \ldots 15\}$, $n \in \{1, 2, \ldots 18\}$

Возможно выбрать 15 значений m, 18 значений n

Есть 3! способов выбрать парочку из одной степени тройки и одной степени пятерки

Также есть 3! способов расставить парочки на 3 позиции (a, b, c)

~~15×18×6×6~~ = $13 \cdot 16 \cdot 6 \cdot 6$ – случаев $\left[\begin{matrix} m=15 \\ m=1 \\ n=1 \\ n=18 \end{matrix}\right.$ учтутся отдельно

Нужно ~~вычесть~~ прибавить случаи когда 3^m или 5^n совпадут с 3 или 3^{15} или 5 или 5^{18}

~~их мы посчитали несколько раз~~

21101746 (U123691 M1301124)