Часть 1

Олимпиада: **Математика, 11 класс (1 часть)**

Шифр: **21101706**

ID профиля: **857011**

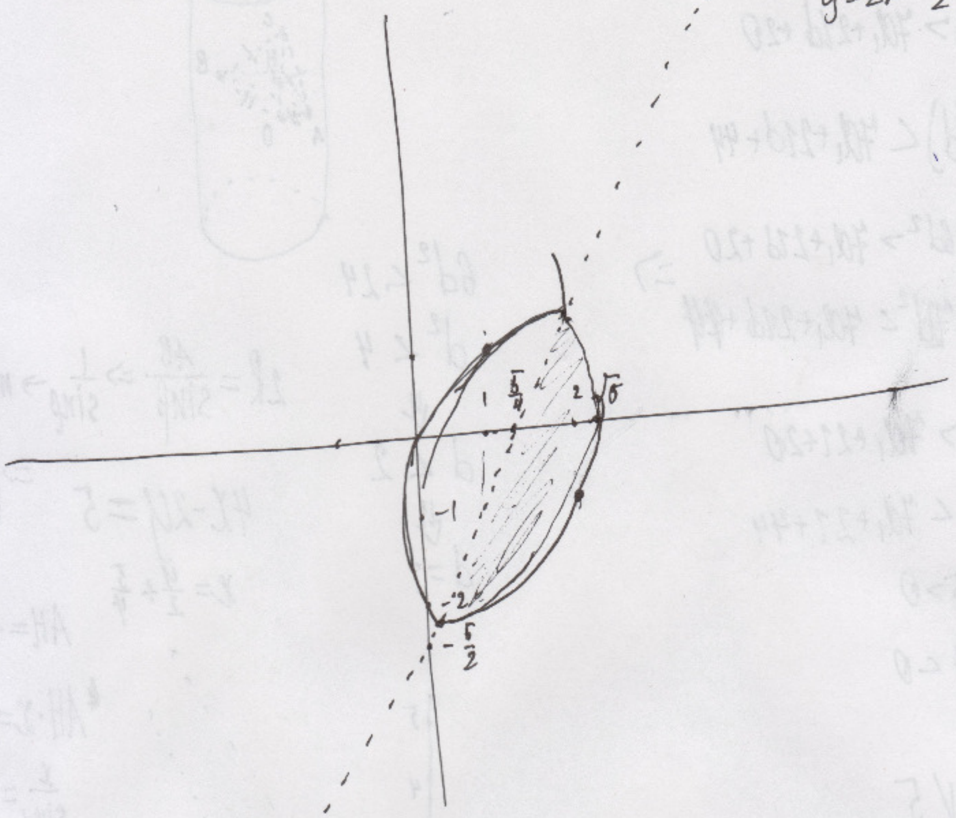
Вариант 18

Черновик 1

$4x-2y=5$

$2y=4x-5$

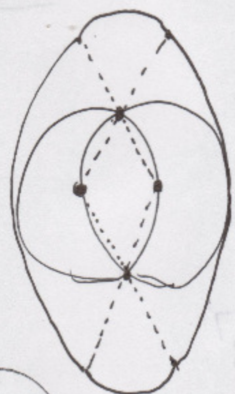
$y=2x-\frac{5}{2}$

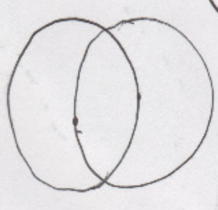


$a^2 \cdot x^2+y^2 \le 4x-2y$

$x^2-4x+4+y^2+2y+1\le 5$

$(x-2)^2+(y+1)^2\le 5$





Черновик 2

$S = 7a_1 + d\frac{7\cdot 6}{2} = 7a_1 + 21d$

$$\begin{cases}(a_1+6d)(a_1+11d) > 7a_1+21d+20 \\ (a_1+8d)(a_1+9d) < 7a_1+21d+44\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_1^2+17da_1+66d^2 > 7a_1+21d+20 \\ a_1^2+17da_1+72d^2 < 7a_1+21d+44\end{cases} \Rightarrow$$

$6d^2 < 24$

$d^2 < 4$

$\Downarrow$

$d < 2$

$\Downarrow$

$d = 1$

$$\begin{cases}a_1^2+17a_1+66 > 7a_1+21+20 \\ a_1^2+17a_1+72 < 7a_1+21+44\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_1^2+10a_1+25 > 0 \\ a_1^2+10a_1+7 < 0\end{cases}$$

$2R = \frac{AB}{\sin\beta} \Rightarrow \frac{1}{\sin\beta} \to \min \Rightarrow \sin\beta \to \max \Rightarrow$

$\Rightarrow \beta = 90^0$

$4x - 2y = 5$

$y = 2x$

$y = 2x - \frac{5}{2}$

$x = \frac{y}{2} + \frac{5}{4}$

$AH = \sqrt{2}$

$AH \cdot x = AC \cdot AD \cdot \sin\alpha$

$\frac{x}{\sin\alpha} = \frac{AC\cdot AD}{AH}$

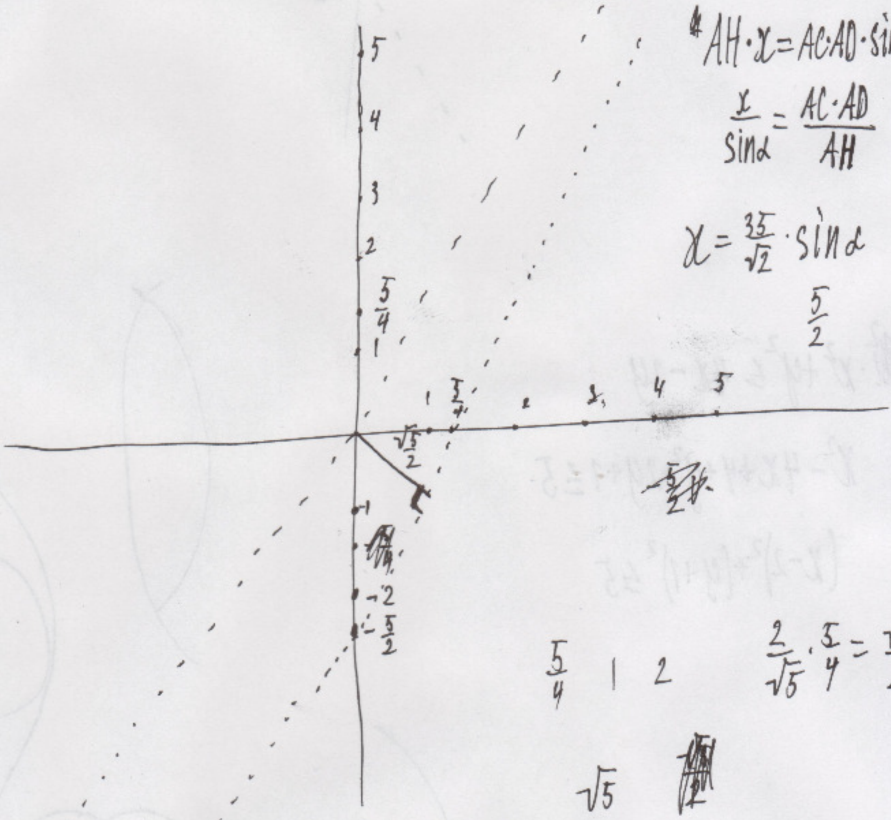
$x = \frac{35}{\sqrt{2}} \cdot \sin\alpha$

$\frac{5}{2}$

$3\sqrt{2} \vee 5$

$\sqrt{18} \vee$

$4 < \sqrt{18} < 5$



$5 + \sqrt{47} - \sqrt{23} \overset{>}{\vee} 7$

$\sqrt{47} - \sqrt{23} \overset{>}{\vee} 2$

$47 \overset{>}{\vee} 4 + 23 + 4\sqrt{23}$

$20 \overset{>}{\vee} 4\sqrt{23}$

$5 \overset{>}{\vee} \sqrt{23}$

$\frac{5}{4} \quad 1 \quad 2$

$\frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{5}{4} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$\sqrt{5}$

$\sqrt{5} \vee \frac{5}{2} \qquad 1 \overset{<}{\vee} \frac{\sqrt{5}}{2}$

$\sqrt{20} \vee \sqrt{25}$

21101706 (U857011 M1296151)

Задача 1 Чистовик 1

пусть d - разность прогрессии, тогда т.к. прогрессия возрастающая $d>0$ и т.к. прогрессия целочисленная $d \in \mathbb{Z} \Rightarrow d \in \mathbb{N}$ (пусть $d \notin \mathbb{Z}$, тогда $a_1 \in \mathbb{Z}$, $a_2 = a_1 + d \notin \mathbb{Z}$ - противоречие $\Rightarrow$ $\Rightarrow d \in \mathbb{Z}$)

$S = 7a_1 + d\frac{7 \cdot 6}{2} = 7a_1 + 21d$

$\begin{cases} a_7 a_{12} > S+20 \\ S+44 > a_9 a_{10} \end{cases} \Rightarrow a_7 a_{12} + S + 44 > S + 20 + a_9 a_{10}$

$(a_1+6d)(a_1+11d)+24 > (a_1+8d)(a_1+9d)$

$a_1^2 + 17a_1 d + 66d^2 + 24 > a_1^2 + 17da_1 + 72d^2$

$\begin{cases} a_1^2 + 17a_1 d + 66d^2 > S+20 \\ a_1^2 + 17a_1 d + 72d^2 < 7a_1 + 21d + 44 \end{cases}$

$6d^2 < 24$

$d^2 < 4$

$-2 < d < 2$

$0 < d < 2$ (т.к. $d \in \mathbb{N}$)

$1 \le d \le 1$ (т.к. $d \in \mathbb{N}$) $\Rightarrow d = 1$

$\begin{cases} a_1^2 + 17a_1 + 66 > 7a_1 + 21 + 20 \\ a_1^2 + 17a_1 + 72 < 7a_1 + 21 + 44 \end{cases}$

$\begin{cases} a_1^2 + 10a_1 + 25 > 0 \\ a_1^2 + 10a_1 + 7 < 0 \end{cases}$

$\begin{cases} (a_1+5)^2 > 0 \\ (a_1 - (-5 - 3\sqrt{2}))(a_1 - (-5+3\sqrt{2})) < 0 \end{cases}$

$4 < \sqrt{18} < 5$

$-1 < -5+3\sqrt{2} < 0$

$-5 < -\sqrt{18} < -4$

$-10 < -5 - \sqrt{18} < -9$

$-10 \quad -9 \quad -8 \quad -7 \quad -6 \quad -5 \quad -4 \quad -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0$

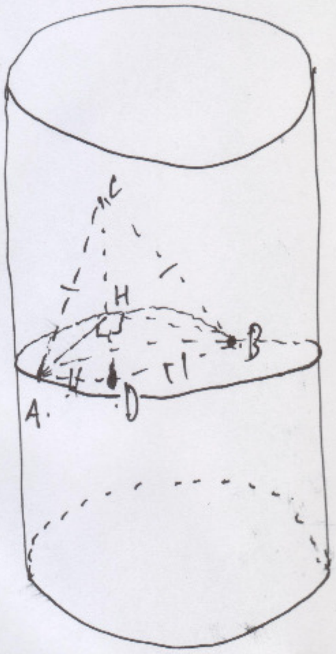
$-5-3\sqrt{2} \qquad -5+3\sqrt{2}$

Ответ: $-9; -8; -7; -6; -4; -3; -2; -1$.

Задача 2 Чистовик 2

Дано: цилиндр, ABCD – тетраэдр, $AC=CB=5$, $AD=DB=7$, $AB=2$, A, B, C и D лежат на боковой пов-ти цилиндра; CD параллельна оси цилиндра, ABCD такой, что R – радиус цилиндра – наименьший

$CD=?$



Решение

1) ~~Д.п.: AH и P~~ $\Delta ADC=\Delta BDC$ по 3м сторонам $\Rightarrow$ высоты из A и B упадут в одну точку и будут равны.

2) Д.п.: AH и BH – высоты ΔCAD и ΔCBD

3) $AH\perp CD$, $BH\perp CD \Rightarrow CD\perp(AHB)$, $CD\parallel$ оси $\Rightarrow (AHB)\perp$ оси $\Rightarrow$ описанная около ΔAHB окр-ть равна окр-ти основания

4) по об. т. синусов ΔAHB: $R=\frac{AB}{2\sin\angle AHB}$; R – наименьший, значит $\sin\angle AHB=1 \Rightarrow \angle AHB=90^\circ$; $AH=HB \Rightarrow$
$\Rightarrow AH=AB\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

5) из ΔACH: $\angle H=90^\circ$, по т. Пифагора $CH=\sqrt{AC^2-AH^2}=\sqrt{25-2}=\sqrt{23}$
из ΔADH: $\angle H=90^\circ$, по т. Пифагора $DH=\sqrt{AD^2-AH^2}=\sqrt{49-2}=\sqrt{47}$

6) есть 2 случая:
1) $H\in[CD]$, тогда $CD=\sqrt{23}+\sqrt{47}$ $(5+\sqrt{23}+\sqrt{47}>5+2=7)$
$(5+7=\sqrt{25}+\sqrt{49}>\sqrt{23}+\sqrt{47})$

2) $H\notin[CD]$, тогда $CD=\sqrt{47}-\sqrt{23}$ $\Big(5+\sqrt{47}-\sqrt{23}\overset{?}{\vee}7$
$\sqrt{47}\overset{?}{\vee}2+\sqrt{23}$
$47\overset{?}{\vee}4+23+4\sqrt{23}$
$20\overset{?}{\vee}4\sqrt{23}$
$5>\sqrt{23}\Big)$

Ответ: $\sqrt{47}\pm\sqrt{23}$

21101706 (U857011 M1296151)

Задача 3 Чистовик 3

$$\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2 \le 5 \\ a^2+b^2 \le \min(4a-2b,\, 5)\end{cases}$$

верхнее ур-е — это круг с центром в $(a;b)$ с радиусом $\sqrt{5}$

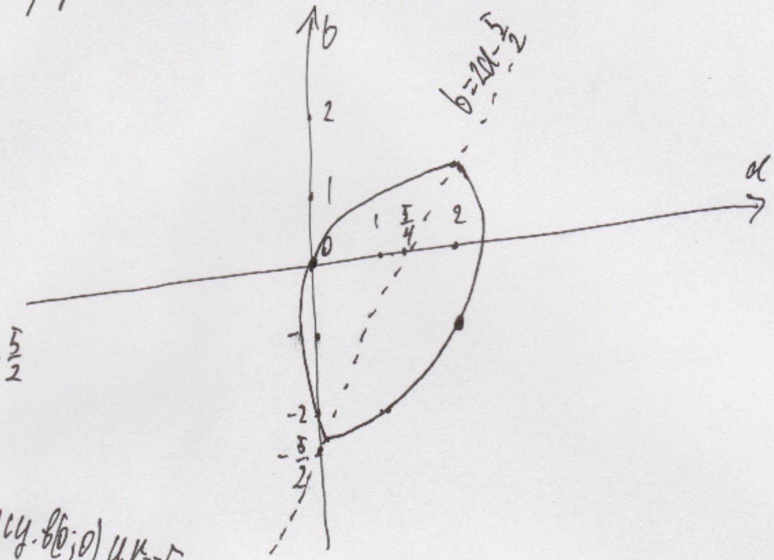
нижнее ур-ие — это область на пл-ти, где могут располагаться точки $(a;b)$

рассмотрим нижнее в a b координатах.

$4a-2b=5$

$2b=4a-5$

$b=2a-\frac{5}{2}$



в $(0;0)$ $4a-2b<5 \Rightarrow$ сверху от $b=2a-\frac{5}{2}$

~~уравн~~ $a^2+b^2 \le 4a-2b$

снизу $a^2+b^2\le 5$ — круг с ц. в $(0;0)$ и $r_1=\sqrt{5}$

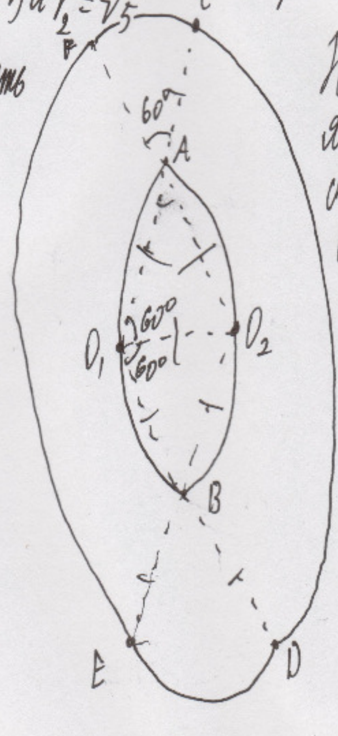
$a^2+b^2 \le 4a-2b$

$a^2-4a+4+b^2+2b+1 \le 5$

$(a-2)^2+(b+1)^2 \le 5$ — круг с ц. в $(2;-1)$ и $r_2=\sqrt{5}$

заметим, что $r_1=r_2=\sqrt{5}=\rho\big((0;0);(2;-1)\big)$, то есть центры окр-тей кругов лежат друг на друге

вернёмся к x и y. Нужно посчитать площадь данной фигуры



$O_1A=AC=O_1B=BD=O_2B=BE=O_2A=O_2F=O_1O_2=\sqrt{5}$

$\cup CD$ и $\cup FE$ — дуги окр-тей с ц. в O_1 и O_2 соотв. и радиусом $2\sqrt{5}$

$\cup FC$ и $\cup ED$ — дуги окр-тей с ц. в A и B и радиусом $\sqrt{5}$

Никакая точка снаружи не будет иметь расстояние до $\cup AB$ или $\cup AB$ $\le \sqrt{5}$, т.к. если бы имела, то тогда бы лежала либо на окр-ти с ц. в A или B и $r=\sqrt{5}$ или в ~~окр-ти~~ секторе с ц. в O_1 или O_2 и $r=2\sqrt{5}$ (из расстояния между $\cup CD$ ($\cup FE$) и $\cup AB$

$$S=S(FEO_2)+S(CDO_1)-S(\triangle AO_1O_2)-S(\triangle BO_1O_2)+S(FCA)+S(EBD)=\frac{1}{3}\pi(2\sqrt{5})^2\cdot 2-\frac{(\sqrt{5})^2\sqrt{3}}{4}\cdot 2+\frac{1}{6}\pi(\sqrt{5})^2\cdot 2=$$

$$=\frac{40\pi}{3}-\frac{5\sqrt{3}}{2}+\frac{5\pi}{3}=15\pi-\frac{5\sqrt{3}}{2}$$

Ответ: $15\pi-\frac{5\sqrt{3}}{2}$

211017063 (U857011 M1296151)

Часть 2

Олимпиада: **Математика, 11 класс (2 часть)**

Шифр: **21101706**

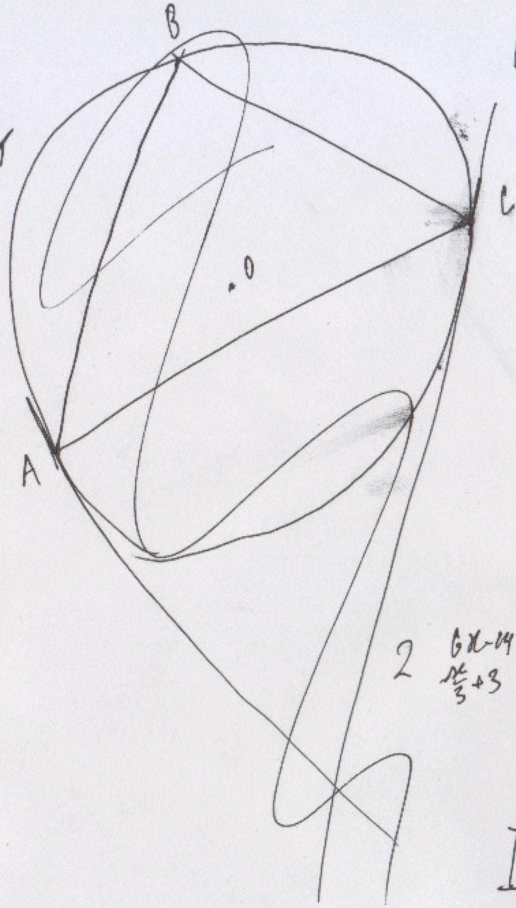
ID профиля: **857011**

Вариант 18

I есть 15

1. В.Н. есть 15, есть дел 5, есть дел 3, есть с 5^{17}, есть с 3^{14}

Черновик



a, b, c $abc=4$

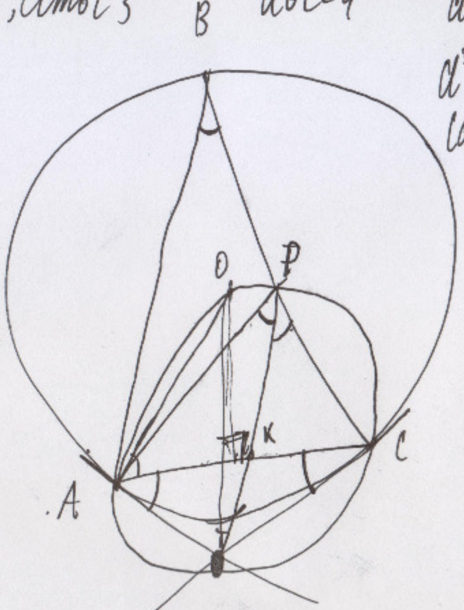
$ab = \frac{4}{c}$

$bc = \frac{4}{a}$

$ac = \frac{4}{b}$

$$
\begin{array}{r}
486 \\
\times\ 18 \\
\hline
3888 \\
+\ 486 \\
\hline
8848
\end{array}
$$

2 $6x-14$ $\frac{x}{3}+3$



B $abc=4$

$a^2(a-1)=4$

$a^3-a^2-4=0$

$(a-2)$

$\frac{AP}{AK} = \frac{PC}{KC}$ $\frac{AP}{PC}$

$\frac{PC \cdot PK}{PK \cdot AP} = \frac{5}{6} = \frac{PC}{AP}$

$PCT \sim CKT$

$\frac{CT}{PC} = \frac{KT}{CK} = \frac{AK}{PK}$

abc

$\frac{c}{\sin\gamma} = 2R \Rightarrow \sin\gamma = \frac{c}{2R}$

$S = \frac{1}{2} ab \cdot \sin\gamma = = \frac{abc}{4R}$

I есть 15

15·

15·

15:

1) 15, 15, $3^{15} \cdot 5^{18}$ – 3 сл. 2) 15, $3^{15} \cdot 5^{18}$, $3^{15} \cdot 5^{18}$ – 3 сл.

3) 15, $15 \cdot 3^{14} \cdot 5^{\alpha}$, $15 \cdot 3^{\beta} \cdot 5^{17}$ $\alpha \in \{0, 16\}$, $\beta \in \{0; 13\}$

$6 \cdot 17 \cdot 14$

II нет 15

$15 \cdot 3$

$15 \cdot 5$

$15 \cdot 3 \cdot 5$

1) $15 \cdot 3^{\alpha}$

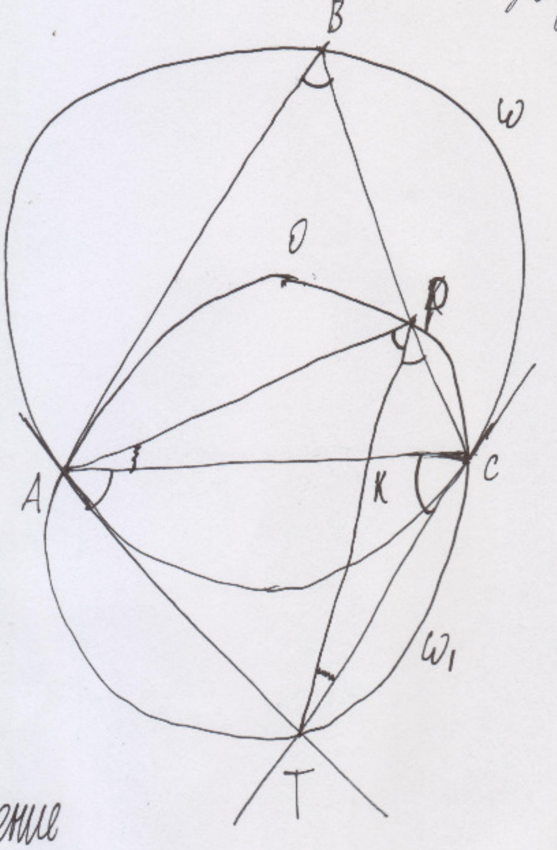
$15 \cdot 5^{\beta}$

$15 \cdot 3^{14} \cdot 5^{17}$

$3 \cdot 5$

$2 \cdot 2 \cdot 13 \cdot 16$

Задача 6 Чистовик 1



Дано: $\triangle ABC$ - остроугольный. ω - описанная около него окр-ть; ω_1 - окр-ть, проходящая через A, O и C; $\omega_1 \cap [BC] = \{P, C\}$; AT и CT - касательные к ω; $[TP] \cap [AC] = K$; $S(\triangle APK) = 6$; $S(\triangle CPK) = 5$.

б) $\angle ABC = \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$

а) $S(\triangle ABC) = ?$ б) $AC = ?$

Решение

1) $\angle AOC = \smile AC = 2\angle ABC$; $\angle CAT = \angle ACT = \frac{1}{2}\smile AC = \angle ABC$. Пусть $\angle ABC = \alpha$ (всё из ω; $\angle AOC$ - центральный, $\angle ABC$ впис., $\angle ACT$ и $\angle CAT$ - меж касат. и хордой)

2) из ω_1 ($AOPC$ впис. в ω_1) $\angle APC = \angle AOC = 2\alpha$

3) из $\triangle ACT$: $\angle ATC = 180° - \angle TAC - \angle TCA = 180° - 2\alpha$

4) $\angle ATC + \angle APC = 180° - 2\alpha + 2\alpha = 180° \Rightarrow APCT$ впис.; $\triangle APC$ впис. в $\omega_1 \Rightarrow T \in \omega_1$

5) $APCT$ - впис. $\Rightarrow \angle APT = \angle ACT = \alpha$, $\angle TPC = \angle TAC = \alpha$

6) $\frac{5}{6} = \frac{S(\triangle CPK)}{S(\triangle APK)} = \frac{\frac{1}{2} CK \cdot \rho(P; AC)}{\frac{1}{2} AK \cdot \rho(P; AC)} = \frac{CK}{AK} \Rightarrow \frac{CK}{AC} = \frac{5}{11}$

7) $\angle CPK = \alpha = \angle CBA$; $\angle BCA$ - общ. $\Rightarrow \triangle CPK \sim \triangle CBA \Rightarrow S(\triangle CBA) = S(\triangle CPK) \cdot \left(\frac{CA}{CK}\right)^2 = \cancel{\frac{5 \cdot 25}{121}} = \frac{5 \cdot 121}{25} = \frac{121}{5}$

а) Ответ: $\frac{121}{5}$

21101706 (U857011 M1296152)

Задача 4 Чистовик 2.

Среди этих чисел все делятся на 15, есть такие, что не делятся на 5^2, не делятся на 3^2, делятся на 3^{15}, делятся на 5^{18}. Никакие не делятся на 3^{16} и 5^{19}.

I среди них есть $3^{15}\cdot 5^{18}$

это числа $15\cdot 3^{\alpha}, 15\cdot 5^{\beta}, 3^{15}\cdot 5^{18}$, $\alpha\in\{0,1,\dots,14\}$, $\beta\in\{0,1,\dots 17\}$ – таких $6\cdot 15\cdot 18-3$ (-3 – это случаи, когда $\alpha=\beta=0$)

или $15, 15\cdot 3^{\alpha}\cdot 5^{\beta}, 3^{15}\cdot 5^{18}$, $\alpha\in\{1,2,\dots,14\}$, $\beta\in\{1,2,\dots 17\}$ – таких $6\cdot 14\cdot 17-3$ (-3 – это случаи, когда $\alpha=14, \beta=17$)

II среди них нет $3^{15}\cdot 5^{18}$ и есть 15

Это числа $15, 15\cdot 3^{14}\cdot 5^{\beta}, 15\cdot 5^{17}\cdot 3^{\alpha}$, $\alpha\in\{0,\dots,13\}$, $\beta\in\{0,\dots,16\}$ – таких $6\cdot 14\cdot 17$

III среди них нет ни $3^{15}\cdot 5^{18}$, ни 15

~~$15\cdot 3^{14}\cdot 5^{\alpha}$~~ $15\cdot 3^{\alpha_1}, 15\cdot 5^{\beta_1}, 15\cdot 3^{\alpha_2}\cdot 5^{\beta_2}$

1) $\alpha_1=14, \beta_1=17$, тогда $\alpha_2\in\{0,\dots,14\}$, $\beta_2\in\{0,\dots,17\}$ случаев $6\cdot 15\cdot 18-12$ (-12 – это 6 случаев, когда $\alpha_2=\beta_2=0$ и 6, када $\alpha_2=14$ и $\beta_2=17$)

2) $\alpha_1=14, \beta_2=17$, тогда $\alpha_2\in\{0,\dots,13\}$, $\beta_1\in\{1,\dots,16\}$ случаев $6\cdot 14\cdot 16$

3) $\alpha_2=14, \beta_1=17$, тогда $\alpha_1\in\{0,\dots 13\}$, $\beta_2\in\{0,\dots 16\}$ случаев $6\cdot 13\cdot 17$

всего $6\cdot 15\cdot 18-3+6\cdot 14\cdot 17-3+6\cdot 14\cdot 17+6\cdot 15\cdot 18-12+6\cdot 14\cdot 16+6\cdot 13\cdot 17=6(2\cdot 15\cdot 18+2\cdot 14\cdot 17+14\cdot 16+13\cdot 17-3)=$

$=6(2\cdot 15\cdot 18+14\cdot 33+27\cdot 17-3)=18(10\cdot 18+14\cdot 11+9\cdot 17-1)=18(180+154+153-1)=18(180+306)=18\cdot 486=8848$

Ответ: 8848

21101706 (U857011 M1296152)

Задача 5 Чистовик 3

$\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)\cdot\log_{6x-14}(x-1)^2\cdot\log_{x-1}\left(\frac{x}{3}+3\right)=4\cdot\log_{\frac{x}{3}+3}(x-1)\cdot\log_{x-1}\frac{x}{3}+3=4$ при $x>\frac{4}{3}$

$x\neq 2$

$x\neq \frac{13}{6}$

$x\neq -6$

пусть два числа равны t, а третье $t-1$

$t^2(t-1)=4$

$t^3-t^2-4=0$

$(t-2)(\underbrace{t^2+t+2}_{>0})=0$

$t=2$

I $\cancel{t-1=\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)}$ $\quad t=\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)$

$\cancel{1=\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)}$ $\quad 2=\log_{\sqrt{\frac{x}{3}+3}}(6x-14)$

$\cancel{\sqrt{\frac{x}{3}+3}=6x-14}$ $\quad \frac{x}{3}+3=6x-14$

$\cancel{\frac{x}{3}+3=36x^2-168x+196}$ $\quad \frac{14}{3}x=14$

$x=3$ (подх. под ограничения

$\cancel{36x^2-\left(168+\frac{1}{3}\right)x+193}$

$\log_{18-14}(3-1)^2=\log_4 4=1$

$\log_{3-1}\left(\frac{3}{3}+3\right)=\log_2 2=1$